第 45 卷 第 10 期 西 南 师 范 大 学 学 报（自然科学版） 2020 年 10 月
Vol. 45 No. 10 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Oct. 2020

DOI：10.13718/j.cnki.xsxb.2020.10.004

一类双单叶近于凸解析函数类的系数估计[①]

郭 栋[1]， 敖 恩[2]， 汤 获[2]， 李宗涛[3]

1. 滁州职业技术学院 基础部，安徽 滁州 239000；2. 赤峰学院 数学与统计学院，内蒙古 赤峰 024000；
3. 广州民航职业技术学院 人文社科学院，广州 510403

摘要：引入并研究了一类单位圆盘 U 内的双单叶近于凸解析函数类，得到了此函数类的 $|a_2|$，$|a_3|$ 的系数估计及其 Fekete-Szegö 不等式.

关 键 词：近于凸函数；系数估计；Fekete-Szegö 不等式；微分从属

中图分类号：**O174.51** **文献标志码**：**A** **文章编号**：1000-5471(2020)10-0016-05

令 H 表示在单位圆盘 $U=\{z:|z|<1\}$ 内具有下述形式的解析函数类：

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n \tag{1}$$

S 表示 H 中的单叶函数族. 用 S^* 和 K 分别表示星像函数类和近于凸函数类. 易知 $f(z)\in S^*$ 当且仅当 $\mathrm{Re}\left\{\dfrac{zf'(z)}{f(z)}\right\}>0\ (z\in U)$. 设 $f(z)\in S$，若存在 $g(z)\in S^*$，使得 $\mathrm{Re}\left\{\dfrac{zf'(z)}{g(z)}\right\}>0\ (z\in U)$，则称 $f(z)$ 为近于凸函数，其全体记为 K，近于凸函数类是由文献[1]提出的.

文献[2]证明了如下结果：

定理 1[2] 设 $f\in S$，$0\leqslant\mu<1$，则有

$$|a_3-\mu a_2^2|\leqslant 1+2\exp\left(-\frac{2\mu}{1-\mu}\right)$$

且对每个 μ，存在 f 使得等号都成立.

文献[3]引入函数类 $K(\beta)$，定义如下：对于 $f(z)\in S$，$0<\beta\leqslant 1$，若存在 $g(z)\in S^*$ 使得

$$\left|\frac{zf'(z)}{g(z)}-1\right|<\beta\left|\frac{zf'(z)}{g(z)}+1\right| \qquad z\in U$$

成立，则称 $f(z)$ 为 β 型近于凸函数，其全体记为 $K(\beta)$. 当 $\beta=1$ 时，$K(1)=K$.

著名的 Koebe-$\dfrac{1}{4}$ 定理表明：每个具有形式(1)的单叶函数 f 都存在逆函数 f^{-1}，且

$$f^{-1}(f(z))=z \qquad z\in U$$

$$f(f^{-1}(\omega))=\omega \qquad |\omega|<r_0(f) \qquad r_0(f)>\frac{1}{4}$$

其中

$$f^{-1}(\omega)=\omega-a_2\omega^2+(2a_2^2-a_3)\omega^3-(5a_2^3-5a_2a_3+a_4)\omega^4+\cdots \tag{2}$$

---

① 收稿日期：2020-02-17
基金项目：国家自然科学基金项目(11561001)；内蒙古自然科学基金项目(2014MS0101)；安徽省高校自然科学基金项目(KJ2018A0833，KJ2018A0839)；内蒙古自治区高校科学研究项目(NJZY19211)；安徽省高等学校省级质量工程项目(2018mooc608)；广东省博士启动项目(2016A030310106)；国家自然科学基金校级重点培育项目(18X0428，18X0433).
作者简介：郭 栋(1976-)，男，副教授，主要从事函数单叶性的研究.

函数 $f(z)$ 称为双单叶函数当且仅当 f 和 f^{-1} 在 U 内都是单叶函数．现记 Σ 表示单位圆盘 U 内所有具有形式(1) 的双单叶函数．文献[4] 首先引入了双单叶函数族，证明了 $f(z)\in\Sigma$，则有 $|a_2|\leqslant 1.51$．随后，许多作者研究了双单叶函数族的子类的 $|a_2|,|a_3|$ 的上界问题[5-12]．

如果

$$g(z)=z+b_2z^2+b_3z^3+\cdots\in S \tag{3}$$

在 U 内解析且满足

$$\operatorname{Re}\frac{zg'(z)}{g(z)}>0 \qquad z\in U$$

和

$$\operatorname{Re}\frac{wG'(w)}{G(w)}>0 \qquad w\in U$$

其中 $G(w)=g^{-1}(w)=\omega-b_2\omega^2+(2b_2^2-b_3)\omega^3-(5b_2^3-5b_2b_3+b_4)\omega^4+\cdots$，则称 $g(z)$ 为双单叶星像解析函数，其全体记为 S_Σ^*．

类似于函数类 $K(\beta)$ 的定义，作者定义了一类双单叶近于凸解析函数类 $K_\Sigma(\beta)$．假设

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n\in\Sigma$$

如果存在双单叶星像解析函数 g，满足

$$\left|\frac{zf'(z)}{g(z)}-1\right|<\beta\left|\frac{zf'(z)}{g(z)}+1\right| \qquad z\in U$$

和

$$\left|\frac{wh'(w)}{G(w)}-1\right|<\beta\left|\frac{wh'(w)}{G(w)}+1\right| \qquad w\in U$$

其中 $0<\beta\leqslant 1$，$h=f^{-1}$，$G=g^{-1}$，则称 $f(z)$ 为 β- 型双单叶近于凸函数．其全体记为 $K_\Sigma(\beta)$．

本文研究了函数类 $K_\Sigma(\beta)$ 的前两项系数 a_2,a_3 的估计及其 Fekete-szegö 不等式．

引理 1[11]　设 $g(z)$ 由(3) 式给出，且满足 $g(z)\in S_\Sigma^*$，则有

$$|b_2|\leqslant\sqrt{2}$$

引理 2[12]　设 $g(z)$ 由(3) 式给出，且满足 $g(z)\in S_\Sigma^*$，则有

$$|b_3-\mu b_2^2|\leqslant\begin{cases}2(1-\mu) & \mu\leqslant\dfrac{1}{2}\\[2ex] 1 & \dfrac{1}{2}\leqslant\mu\leqslant\dfrac{3}{2}\\[2ex] 2(\mu-1) & \mu\geqslant\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

引理 3[3]　$f(z)\in K(\beta)$ 当且仅当存在 $g(z)\in S^*$ 使得

$$\frac{zf'(z)}{g(z)}\prec\frac{1+\beta z}{1-\beta z} \qquad z\in U$$

其中 $\prec$ 表示函数的从属关系．由函数从属的定义，上式也可写成

$$\frac{zf'(z)}{g(z)}=\frac{1+\beta\omega(z)}{1-\beta\omega(z)} \qquad z\in U$$

其中 $\omega(z)$ 在 U 内解析，且 $\omega(0)=0$，$|\omega(z)|<1$．

引理 4[13]　设 $\omega(z)=c_1z+c_2z^2+\cdots$ 在 U 内解析，且 $|\omega(z)|<1$，则有

$$|c_1|\leqslant 1 \qquad |c_2|\leqslant 1-|c_1|^2$$

引理 5[14]　设 $\omega(z)=c_1z+c_2z^2+\cdots$ 在 U 内解析，且 $|\omega(z)|<1$，则对任意的实数 t，有

$$|c_2-tc_1^2|\leqslant\begin{cases}-t & t\leqslant -1\\ 1 & -1\leqslant t\leqslant 1\\ t & t\geqslant 1\end{cases}$$

定理 2 假设 $f(z) \in K_{\Sigma}(\beta)(0 < \beta \leqslant 1)$，则有

$$|a_2| \leqslant \min\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}+\beta,\ \sqrt{\frac{2+2\sqrt{2}\beta+2\beta}{3}}\right\} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{2}+\beta & 0<\beta<\dfrac{2-\sqrt{2}+2\sqrt{3-\sqrt{2}}}{6} \\ \sqrt{\dfrac{2+2\sqrt{2}\beta+2\beta}{3}} & \dfrac{2-\sqrt{2}+2\sqrt{3-\sqrt{2}}}{6} \leqslant \beta \leqslant 1 \end{cases}$$

和

$$|a_3| \leqslant \frac{2+2\sqrt{2}\beta+2\beta}{3}$$

证 因为 $f(z) \in K_{\Sigma}(\beta)$，则由引理3可知，存在 U 内的两个函数 ω_1, ω_2，满足

$$zf'(z) = g(z)\frac{1+\beta\omega_1(z)}{1-\beta\omega_1(z)} \tag{4}$$

和

$$wh'(w) = G(w)\frac{1+\beta\omega_2(w)}{1-\beta\omega_2(w)} \tag{5}$$

其中函数 g, G, ω_1 和 ω_2 的展式分别为

$$g(z) = z + b_2z^2 + b_3z^3 + \cdots \tag{6}$$

$$G(w) = g^{-1}(w) = \omega - b_2\omega^2 + (2b_2^2 - b_3)\omega^3 - (5b_2^2 - 5b_2b_3 + b_4)\omega^4 + \cdots \tag{7}$$

$$\omega_1(z) = c_1z + c_2z^2 + \cdots \tag{8}$$

$$\omega_2(w) = d_1w + d_2w^2 + \cdots \tag{9}$$

由(1),(2),(4),(5),(6),(7),(8)和(9)式，得

$$2a_2 = b_2 + 2\beta c_1 \tag{10}$$

$$3a_3 = b_3 + 2\beta b_2c_1 + 2\beta^2c_1^2 + 2\beta c_2 \tag{11}$$

$$-2a_2 = -b_2 + 2\beta d_1 \tag{12}$$

$$6a_2^2 - 3a_3 = 2b_2^2 - b_3 - 2\beta b_2d_1 + 2\beta^2d_1^2 + 2\beta d_2 \tag{13}$$

由(10),(12)式得

$$c_1 = -d_1 \tag{14}$$

$$4a_2 = 2b_2 + 2\beta(c_1 - d_1) \tag{15}$$

$$8a_2^2 = 2b_2^2 + 4\beta b_2(c_1 - d_1) + 4\beta^2(c_1^2 + d_1^2) \tag{16}$$

$$-4a_2^2 = -b_2^2 + 2\beta b_2d_1 - 2\beta b_2c_1 + 4\beta^2c_1d_1 \tag{17}$$

由(15)式及引理1、引理4，得

$$|a_2| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}+\beta \tag{18}$$

由(16)式及引理1、引理4，得

$$|a_2| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}+\beta \tag{19}$$

由(17)式及引理1、引理4，得

$$|a_2| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}+\beta \tag{20}$$

用(11)式加上(13)式，得

$$6a_2^2 = 2b_2^2 + 2\beta b_2(c_1 - d_1) + 2\beta[(c_2 + \beta c_1^2) + (d_2 + \beta d_1^2)] \tag{21}$$

由(21)式及引理4、引理5，得

$$|a_2| \leqslant \sqrt{\frac{2+2\sqrt{2}\beta+2\beta}{3}} \tag{22}$$

由(18),(19),(20)和(22)式，得

$$|a_2|\leqslant\min\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}+\beta,\ \sqrt{\frac{2+2\sqrt{2}\beta+2\beta}{3}}\right\}=$$

$$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\beta & 0<\beta<\dfrac{2-\sqrt{2}+2\sqrt{3-\sqrt{2}}}{6}\\ \sqrt{\dfrac{2+2\sqrt{2}\beta+2\beta}{3}} & \dfrac{2-\sqrt{2}+2\sqrt{3-\sqrt{2}}}{6}\leqslant\beta\leqslant 1\end{cases}$$

由(11)式和引理 1、引理 2、引理 5，得

$$|a_3|\leqslant\frac{1}{3}|b_3|+\frac{2\beta}{3}|b_2||c_1|+\frac{2\beta}{3}|c_2+\beta c_1^2|\leqslant$$

$$\frac{2+2\sqrt{2}\beta+2\beta}{3}$$

定理 3　假设 $f(z)\in K_\Sigma(\beta)(0<\beta\leqslant 1)$，对任意的实数 λ，则有

$$|a_3-\lambda a_2^2|\leqslant\begin{cases}\dfrac{2(1-\lambda)}{3}(1+\sqrt{2}\beta+\beta) & \lambda<0\\ \dfrac{2(1-\lambda)}{3}(1+\sqrt{2}\beta)+\dfrac{2\beta}{3} & 0\leqslant\lambda<\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{3}+\dfrac{2\sqrt{2}\beta}{3}(1-\lambda)+\dfrac{2\beta}{3} & \dfrac{1}{2}\leqslant\lambda<1\\ \dfrac{1}{3}+\dfrac{2\sqrt{2}\beta}{3}(\lambda-1)+\dfrac{2\beta}{3} & 1\leqslant\lambda<\dfrac{3}{2}\\ \dfrac{2(\lambda-1)}{3}(1+\sqrt{2}\beta)+\dfrac{2\beta}{3} & \dfrac{3}{2}\leqslant\lambda<2\\ \dfrac{2(\lambda-1)}{3}(1+\sqrt{2}\beta+\beta) & \lambda\geqslant 2\end{cases}$$

证　由(11),(21)式得

$$a_3-\lambda a_2^2=\frac{1}{3}b_3+\frac{2\beta}{3}b_2c_1+\frac{2\beta^2}{3}c_1^2+\frac{2\beta}{3}c_2-$$

$$\lambda\left\{\frac{1}{3}b_2^2+\frac{\beta}{3}b_2(c_1-d_1)+\frac{\beta}{3}[(c_2+\beta c_1^2)+(d_2+\beta d_1^2)]\right\}=$$

$$\frac{1}{3}(b_3-\lambda b_2^2)+\frac{2\beta(1-\lambda)}{3}b_2c_1+\frac{\beta(2-\lambda)}{3}[c_2+\beta c_1^2]-\frac{\beta\lambda}{3}[d_2+\beta d_1^2]$$

利用引理 1、引理 4 和引理 5，得

$$|a_3-\lambda a_2^2|\leqslant\frac{1}{3}|b_3-\lambda b_2^2|+\frac{2\sqrt{2}\beta}{3}|1-\lambda|+\frac{\beta|2-\lambda|}{3}+\frac{\beta|\lambda|}{3}\tag{23}$$

由(23)式和引理 2 可得定理 3.

参考文献：

[1] KAPLAN W. Close-to-Convex Schlicht Functions [J]. Michigan Math J, 1952, 1(2): 169-185.

[2] FEKETE M, SZEGÖ G. Eine Bermerkung Über Ungerade Schlichte Functionen [J]. Journal of the London Mathematical Society, 1933, 8(2): 85-89.

[3] 高纯一. 近于凸函数族的 Fekete-Szegö 问题 [J]. 数学年刊(A 辑), 1994, 15(6): 650-656.

[4] LEWIN M. On a Coefficient Problem for Bi-Univalent Functions [J]. Proc Am Math Soc, 1967, 18(1): 63-68.

[5] NAIK U H, PATIL A B. On Initial Coefficient Inequalities for Certain New Subclasses of Bi-Univalent Functions [J]. Journal of the Egyptian Mathematical Society, 2017, 25(3): 291-293.

[6] 熊良鹏. 双单叶星形和凸函数的系数边界 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2015, 40(6): 5-9.

[7] LASHIN A Y. On Certain Subclasses of Analytic and Bi-Univalent Functions [J]. Journal of the Egyptian Mathematical

Society, 2016, 24(2): 220-225.
[8] GUO D, LI Z T. On the Coefficients of Several Classes of Bi-Univalent Functions Defined by Convolution [J]. Communications In Mathematical Research, 2018, 34(1): 65-76.
[9] PENG Z G, HAN Q Q. On the Coefficients of Several Classes of Bi-Univalent Functions [J]. Acta Mathematica Scientia, 2014, 34(1): 228-240.
[10] LI Z T, GUO D. Coefficient Estimates for a Subclass of Bi-Univalent Strongly Quasi-Starlike Functions [J]. Communications In Mathematical Research, 2018, 34(4): 303-308.
[11] KUMAR S S, KUMAR V, RAVICHANDRAN V. Estimates for the Initial Coefficients of Bi-Univalent Functions [J]. Tamsui Oxford Journal of Information and Mathematical Sciences, 2013, 29(4): 487-504.
[12] ZAPRAWA P. On the Fekete-Szegö Problem for Classes of Bi-Univalent Functions [J]. Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin, 2014, 21(1): 169-178.
[13] 夏道行，张开明. 关于从属函数的几个不等式 [J]. 数学学报，1958，8(3)：408-412.
[14] PROKHOROV D V, SZYNAL J. Inverse Coefficients for (α, β)-Convex Functions [J]. Annales Universitatis Mariae Curie-Sklodowska Lublin-Polonia, 1981, 15: 125-143.

On Coefficient Estimates for Subclasses of Bi-Close-to-Convex Functions

GUO Dong[1], AO En[2], TANG Huo[2], LI Zong-tao[3]

1. Department of Basic Courses, Chuzhou Vocational And Technical College, Chuzhou Anhui 239000, China;
2. School of Mathematics and Statistics, Chifeng University, Chifeng Inner Mongolia 024000, China;
3. Faculty of Humanities and Social Sciences, Guangzhou Civil Aviation College, Guangzhou 510403, China

Abstract: Subclasses of bi-close-to-convex function defined in the open unit disk has been introduced. Estimates on the coefficients $|a_2|$, $|a_3|$ and Fekete-Szegö inequality for functions in this new subclass been obtained.

Key words: bi-close-to-convex function; coefficient estimates; Fekete-Szegö inequality; subordination

责任编辑 廖 坤