第 45 卷　第 10 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2020 年 10 月
Vol. 45　No. 10　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　Oct.　2020

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2020.10.005

一类带 Φ-Laplace 算子的差分方程的非振荡解问题①

温春兰

四川大学 数学学院，成都 610064

摘要： 主要研究带 Φ-Laplace 算子的差分方程

$$\Delta(a_n\Phi(\Delta x_n))+b_n\mid x_{n+1}\mid^{\gamma}\operatorname{sgn}x_{n+1}=0\qquad n\geqslant 1,\ \gamma>0$$

的非振荡解问题．在 Φ,$\{a_n\}$和$\{b_n\}$分别满足一定条件下给出方程的非振荡解是最终严格单调的，并依据非振荡解的极限行为将其分为 4 类．利用 Schauder 不动点定理和离散型 Lebesgue 控制收敛定理证明了方程的 4 类非振荡解存在．

关　键　词： Φ-Laplace 算子；差分方程；非振荡解

中图分类号：O175.7　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1000－5471(2020)10－0021－07

本文研究带有 Φ-Laplace 算子的差分方程

$$\Delta(a_n\Phi(\Delta x_n))+b_n\mid x_{n+1}\mid^{\gamma}\operatorname{sgn}x_{n+1}=0\tag{1}$$

的非振荡解的存在性问题，其中$\{a_n\}$ 和$\{b_n\}$ 是正实数序列，$n\geqslant 1$，$\gamma>0$，Δ 表示向前差分算子，即 $\Delta x_n=x_{n+1}-x_n$．一个实数序列 $x=\{x_n\}$ 满足方程(1)，则称 x 是方程(1) 的解．显然，全零序列是方程(1) 的解．若存在 N，使得对每个 $n>N$，有 $x_{n+1}x_n>0$，则称 x 是非振荡的．

方程(1) 对应某类椭圆方程的离散形式[1-3]，建模于物理和化学的反应扩散问题[4-5]．很多学者对方程(1) 展开了研究[6-16]，文献[3,5,9-10] 研究了

(H_0) $\Phi(u)\equiv u$．

的情形下，$\{a_n\}$ 和$\{b_n\}$ 满足以下 4 种条件：

(C_1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}=\infty$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n<\infty$；

(C_2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}<\infty$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n<\infty$；

(C_3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}<\infty$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\infty$；

(C_4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}=\infty$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\infty$．

时方程(1) 非振荡解的存在性．

文献[7] 研究了如下情形下，$\{a_n\}$ 和$\{b_n\}$ 满足条件(C_1) 时方程(1) 非振荡解的存在性：

(H_1) Φ：$\mathbb{R}\longrightarrow(-\sigma,\sigma)$ 是单调递增的奇同胚映射，其中 $0<\sigma<\infty$，满足 $u\neq 0$ 时，$\Phi(u)u>0$，且

① 收稿日期：2020－02－29
作者简介：温春兰(1994－)，女，硕士研究生，主要从事微分方程与动力系统的研究．

$$\lim_{u\to 0}\frac{\Phi(u)}{u}=c \qquad 0<c<\infty \tag{2}$$

受上述工作的启发，本文取消对 Φ 的有界性要求，研究：

(H_2) Φ：$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 是单调递增的奇同胚映射，$u\neq 0$ 时，有 $\Phi(u)u>0$，且满足(2)式.

的情形下，$\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足条件 (C_2) 时方程(1)的非振荡解.本文给出了方程(1)的非振荡解是最终严格单调的，并依据非振荡解的极限行为将其分为 4 类，证明了方程(1)的 4 类非振荡解存在.

显然，若 $x=\{x_n\}$ 是方程(1)的解，则 $-x$ 也是方程(1)的解.因此，不失一般性，本文只考虑方程(1)最终正的非振荡解.记：

$$M^+=\{x：x \text{ 是方程(1)的解，存在 } n_0\geqslant 1\text{，使得对任意的 } n\geqslant n_0\text{，有 } x_n>0\text{，}\Delta x_n>0\}$$

$$M^-=\{x：x \text{ 是方程(1)的解，存在 } n_0\geqslant 1\text{，使得对任意的 } n\geqslant n_0\text{，有 } x_n>0\text{，}\Delta x_n<0\}$$

记 $x_n^{[1]}=a_n\Phi(\Delta x_n)$，另记：

$$M_{c,d}^+=\{x\in M^+：\lim_{n\to\infty}x_n=c_x，\lim_{n\to\infty}x_n^{[1]}=d_x，0<c_x,d_x<\infty\}$$

$$M_{c,0}^+=\{x\in M^+：\lim_{n\to\infty}x_n=c_x，\lim_{n\to\infty}x_n^{[1]}=0，0<c_x<\infty\}$$

$$M_{0,d}^-=\{x\in M^-：\lim_{n\to\infty}x_n=0，\lim_{n\to\infty}x_n^{[1]}=-d_x，0<d_x<\infty\}$$

$$M_{c,d}^-=\{x\in M^-：\lim_{n\to\infty}x_n=c_x，\lim_{n\to\infty}x_n^{[1]}=-d_x，0<c_x,d_x<\infty\}$$

定理 1 若条件 (H_2) 和 (C_2) 成立，则方程(1)的非振荡解属于 $M_{c,d}^+$(或 $M_{c,0}^+$，或 $M_{c,d}^-$，或 $M_{0,d}^-$).

证 任取方程(1)的非振荡解 $x=\{x_n\}$，不妨设 $n\geqslant n_0$ 时 $x_n>0$.则根据方程(1)，有

$$\Delta(x_n^{[1]})=-b_nx_{n+1}^{\gamma}<0 \qquad n\geqslant n_0 \tag{3}$$

因此 $n\geqslant n_0$ 时 $\{x_n^{[1]}\}$ 严格单调递减，则有以下两种情形：

情形 1 对任意的 $n\geqslant n_0$，都有 $x_n^{[1]}>0$.则根据条件 (H_2) 知，对每个 $n\geqslant n_0$ 有 $\Delta x_n>0$，即当 $n\geqslant n_0$ 时，$\{x_n\}$ 严格单调递增.又由 $n\geqslant n_0$ 时 $x_n>0$，可知

$$x=\{x_n\}\in M^+ \qquad \lim_{n\to\infty}x_n=c_x \qquad 0<c_x\leqslant\infty \tag{4}$$

据条件 (H_2) 和(2)式知 $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\Phi^{-1}(u)}{u}=\dfrac{1}{c}$，即存在 $\delta>0$ 以及 h_1,h_2，满足 $h_2>h_1>0$，使得

$$h_1u\leqslant\Phi(u)\leqslant h_2u \qquad u\in[0,\delta] \tag{5}$$

由条件 (C_2) 的第一个式子可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0 \tag{6}$$

则对给定的 δ，存在充分大的 N，使得对任意的 $n\geqslant N\geqslant n_0$，有 $0<\dfrac{x_{n_0}^{[1]}}{a_n}<\delta$.由(5)式得

$$\Phi^{-1}\left(\frac{x_{n_0}^{[1]}}{a_n}\right)\leqslant\frac{h_2x_{n_0}^{[1]}}{a_n} \qquad n\geqslant N \tag{7}$$

因 $n\geqslant n_0$ 时，$\{x_n^{[1]}\}$ 严格单调递减，那么 $x_n^{[1]}\leqslant x_{n_0}^{[1]}(n\geqslant n_0)$.根据条件 (H_2) 可得 $\Delta x_n\leqslant\Phi^{-1}\left(\dfrac{x_{n_0}^{[1]}}{a_n}\right)$ 对每个 $n\geqslant n_0$ 成立.通过(7)式可推得 $x_{n+1}\leqslant x_N+h_2x_{n_0}^{[1]}\sum\limits_{k=N}^{n}\dfrac{1}{a_k}(n\geqslant N)$.由条件 (C_2) 知 $c_x\neq\infty$.根据 $n\geqslant n_0$ 时 $\{x_n^{[1]}\}$ 的严格单调递减性以及 $x_n^{[1]}>0$ 推出 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n^{[1]}=d_x$，$d_x\in[0,\infty)$.因此通过(4)式和 $c_x\neq\infty$ 知，$d_x=0$ 时 $x\in M_{c,0}^+$，$d_x\in(0,\infty)$ 时 $x\in M_{c,d}^+$.

情形 2 若存在 $N\geqslant n_0$，使得 $x_N^{[1]}<0$，则由 $n\geqslant n_0$ 时 $\{x_n^{[1]}\}$ 严格单调递减知 $x_n^{[1]}<0(n\geqslant N)$.由条件 (H_2) 知，对每个 $n\geqslant N$ 有 $\Delta x_n<0$，即 $n\geqslant N$ 时，$\{x_n\}$ 严格单调递减.又因 $x_n>0$，所以

$$x=\{x_n\}\in M^- \qquad \lim_{n\to\infty}x_n=c_x \qquad 0\leqslant c_x<\infty \tag{8}$$

根据(3)式和 $n \geqslant N$ 时 $\{x_n\}$ 的严格单调递减性得，$x_n^{[1]} = x_N^{[1]} + \sum_{k=N}^{n-1} \Delta x_k^{[1]} \geqslant x_N^{[1]} - x_N^{\gamma} \sum_{k=N}^{n-1} b_k$ 对每个 $n > N$ 成立．则由条件(C_2)和 $n \geqslant N$ 时 $\{x_n^{[1]}\}$ 严格单调递减且 $x_n^{[1]} < 0$ 可知 $\lim_{n\to\infty} x_n^{[1]} = -d_x$，$d_x \in (0, \infty)$．因此通过(8)式知，$c_x = 0$ 时 $x \in M_{0,d}^-$，$c_x \in (0, \infty)$ 时 $x \in M_{c,d}^-$．定理 1 得证．

接下来本文研究 $M_{c,d}^+$，$M_{c,0}^+$，$M_{c,d}^-$ 和 $M_{0,d}^-$ 中满足方程(1)的解的存在性．考虑 l^∞ 为所有定义在正整数集上的有界序列构成的集，在其上定义范数

$$\| u \| = \sup_{n\geqslant 1} | u_n | \qquad u = \{u_n\} \in l^\infty$$

l^∞ 按照 $\| \cdot \|$ 是 Banach 空间．

引理 1[6]　令 $\{\alpha_{i,k}\}$ 是关于正整数 i,k 的实数序列，且对每个正整数 i,k，有 $\alpha_{i,k} \geqslant 0$．若存在序列 $\{\beta_k\}$，使得对每个正整数 i，满足 $\alpha_{i,k} \leqslant \beta_k$，且 $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k < \infty$．另外对每个正整数 k，$\lim_{i\to\infty} \alpha_{i,k}$ 存在．则

$$\lim_{i\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{i,k} = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{i\to\infty} \alpha_{i,k}$$

定理 2　若条件(H_2)和(C_2)成立，则 $M_{c,d}^- \neq \varnothing$．

证　由条件(C_2)和(6)式，对给定的 δ，可取充分大的 n_0，使得对每个 $n \geqslant n_0$，有

$$0 < \frac{1}{a_n} < \frac{\delta}{2} \tag{9}$$

且有

$$0 < h_2 \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{a_k} \leqslant \frac{1}{4} \qquad 0 < \sum_{k=n}^{\infty} b_k < 1 \tag{10}$$

定义

$$\Omega = \left\{ u = \{u_n\} \in l^\infty : \frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1,\ n \geqslant n_0 \right\}$$

显然 Ω 是 l^∞ 上的闭凸子集．任取 $u = \{u_n\} \in \Omega$，对每个 $j \geqslant n_0$，有 $0 < u_{j+1}^{\gamma} \leqslant 1$．则由(10)式，有

$$1 > 1 - \sum_{j=k}^{\infty} b_j u_{j+1}^{\gamma} > 1 - \sum_{j=k}^{\infty} b_j > 0 \qquad k \geqslant n_0 \tag{11}$$

因此 $0 < \frac{1}{a_k}\left(1 - \sum_{j=k}^{\infty} b_j u_{j+1}^{\gamma}\right) < \frac{1}{a_k} (k \geqslant n_0)$．则据条件($H_2$)有

$$0 < \Phi^{-1}\left(\frac{1}{a_k}\left(1 - \sum_{j=k}^{\infty} b_j u_{j+1}^{\gamma}\right)\right) < \Phi^{-1}\left(\frac{1}{a_k}\right) \qquad k \geqslant n_0$$

又因(5)式和(9)式，则对每个 $k \geqslant n_0$ 成立有 $\Phi^{-1}\left(\frac{1}{a_k}\right) \leqslant \frac{h_2}{a_k}$．那么

$$0 < \Phi^{-1}\left(\frac{1}{a_k}\left(1 - \sum_{j=k}^{\infty} b_j u_{j+1}^{\gamma}\right)\right) < \frac{h_2}{a_k} \qquad k \geqslant n_0 \tag{12}$$

于是根据(10)式和(12)式知，对任意的 $n \geqslant n_0$ 有

$$0 < \sum_{k=n}^{\infty} \Phi^{-1}\left(\frac{1}{a_k}\left(1 - \sum_{j=k}^{\infty} b_j u_{j+1}^{\gamma}\right)\right) < h_2 \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{a_k} \leqslant \frac{1}{4} \tag{13}$$

由此可定义 Ω 上的算子 $T: \Omega \longrightarrow l^\infty$，即 $Tu = w$，其中 $u = \{u_n\} \in \Omega$，$w = \{w_n\} \in l^\infty$，满足

$$w_n = \begin{cases} \frac{1}{2} + \sum_{k=n}^{\infty} \Phi^{-1}\left(\frac{1}{a_k}\left(1 - \sum_{j=k}^{\infty} b_j u_{j+1}^{\gamma}\right)\right) & n \geqslant n_0 \\ 1 & 1 \leqslant n < n_0 \end{cases} \tag{14}$$

通过(13)式和(14)式可知

$$\frac{1}{2} \leqslant w_n \leqslant \frac{3}{4} \qquad n \geqslant n_0 \tag{15}$$

即 $w \in \Omega$. 下证 T 连续. 考虑 Ω 中的柯西列 $\{u^{(i)}\}(i \geqslant 1)$. 由 l^{∞} 完备知 $\lim\limits_{i\to\infty} u^{(i)}$ 存在，记

$$u = \lim_{i\to\infty} u^{(i)} \tag{16}$$

其中 $u^{(i)} = \{u_n^{(i)}\}$，$u = \{u_n\}$. 因 Ω 是 l^{∞} 上的闭集，则 $u \in \Omega$. 记 $w^{(i)} = Tu^{(i)}$，$w = Tu$，其中 $i \geqslant 1$，$w^{(i)} = \{w_n^{(i)}\}$，$w = \{w_n\}$. 由(14)式可得

$$\| Tu^{(i)} - Tu \| \leqslant \sup_{n\geqslant n_0} | w_n^{(i)} - w_n | \leqslant \sum_{k=n_0}^{\infty} \alpha_{i,k} \tag{17}$$

其中

$$\alpha_{i,k} = \left| \Phi^{-1}\left(\frac{1}{a_k}\left(1 - \sum_{j=k}^{\infty} b_j (u_{j+1}^{(i)})^{\gamma}\right)\right) - \Phi^{-1}\left(\frac{1}{a_k}\left(1 - \sum_{j=k}^{\infty} b_j u_{j+1}^{\gamma}\right)\right) \right| \qquad i \geqslant 1,\ k \geqslant n_0 \tag{18}$$

对每个 $j \geqslant n_0$，b_j 有界，那么由(16)式可知

$$\lim_{i\to\infty} b(u_{j+1}^{(i)})^{\gamma} = b_j u_{j+1}^{\gamma} \qquad j \geqslant n_0 \tag{19}$$

另外，对每个 $j \geqslant n_0$，$i \geqslant 1$，满足 $0 < b_j (u_{j+1}^{(i)})^{\gamma} \leqslant b_j$. 因此据条件($C_2$)知，$0 < \sum\limits_{j=k}^{\infty} b_j \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ 对任意的 $k \geqslant n_0$ 成立. 则通过(19)式和引理1有

$$\lim_{i\to\infty} \sum_{j=k}^{\infty} b_j (u_{j+1}^{(i)})^{\gamma} = \sum_{j=k}^{\infty} \lim_{i\to\infty} b_j (u_{j+1}^{(i)})^{\gamma} = \sum_{j=k}^{\infty} b_j u_{j+1}^{\gamma} \qquad k \geqslant n_0 \tag{20}$$

由条件(H_2)知 Φ^{-1} 连续，因此据(18)式和(20)式可得

$$\lim_{i\to\infty} \alpha_{i,k} = 0 \qquad k \geqslant n_0 \tag{21}$$

由(18)式有

$$\alpha_{i,k} \leqslant \left| \Phi^{-1}\left(\frac{1}{a_k}\left(1 - \sum_{j=k}^{\infty} b_j (u_{j+1}^{(i)})^{\gamma}\right)\right) \right| + \left| \Phi^{-1}\left(\frac{1}{a_k}\left(1 - \sum_{j=k}^{\infty} b_j u_{j+1}^{\gamma}\right)\right) \right| \qquad i \geqslant 1,\ k \geqslant n_0 \tag{22}$$

进而对每个 $i \geqslant 1$，由 $u^{(i)} \in \Omega$ 知，对每个 $k \geqslant n_0$ 有 $0 < \Phi^{-1}\left(\frac{1}{a_k}\left(1 - \sum\limits_{j=k}^{\infty} b_j (u_{j+1}^{(i)})^{\gamma}\right)\right) < \frac{h_2}{a_k}$. 由此据(12)式和(22)式可知，对每个 $i \geqslant 1$，$k \geqslant n_0$，满足 $0 < \alpha_{i,k} \leqslant \frac{2h_2}{a_k}$. 由条件($C_2$)又有 $0 < \sum\limits_{k=n_0}^{\infty} \frac{2h_2}{a_k} < \infty$. 则由(21)式和引理1得 $\lim\limits_{i\to\infty} \sum\limits_{k=n_0}^{\infty} \alpha_{i,k} = \sum\limits_{k=n_0}^{\infty} \lim\limits_{i\to\infty} \alpha_{i,k} = 0$. 据(17)式知 $\lim\limits_{i\to\infty} \| Tu^{(i)} - Tu \| = 0$，即 T 连续.

下证 $T\Omega$ 相对紧. 任取 $w = \{w_n\} \in T\Omega$，不失一般性，令 $w = Tu$，$u = \{u_n\} \in \Omega$，由(12)式和(14)式，对每个 $n_2 > n_1 > n_0$，有

$$| w_{n_2} - w_{n_1} | = \sum_{k=n_1}^{n_2-1} \Phi^{-1}\left(\frac{1}{a_k}\left(1 - \sum_{j=k}^{\infty} b_j u_{j+1}^{\gamma}\right)\right) \leqslant h_2 \sum_{k=n_1}^{n_2-1} \frac{1}{a_k} \tag{23}$$

则通过条件(C_2)、(23)式和柯西收敛准则，对任意的 $\varepsilon > 0$，存在充分大的 $N \geqslant n_0$，使得对任意的 $n_2 > n_1 > N$，有 $| w_{n_2} - w_{n_1} | < \varepsilon$ 对任意的 $w = \{w_n\} \in T\Omega$ 成立. 由文献[6]的定义3.6.2可知 $T\Omega$ 是一致柯西的. 根据(14)式和(15)式知 $T\Omega$ 一致有界，又由文献[6]的定理3.6.3知 $T\Omega$ 相对紧. 由Schauder不动点定理，Ω 中存在 $u = \{u_n\}$ 满足

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2} + \sum\limits_{k=n}^{\infty} \Phi^{-1}\left(\dfrac{1}{a_k}\left(1 - \sum\limits_{j=k}^{\infty} b_j u_{j+1}^{\gamma}\right)\right) & n \geqslant n_0 \\ 1 & 1 \leqslant n < n_0 \end{cases} \tag{24}$$

令

$$x_n = u_n \qquad n \geqslant n_0 \tag{25}$$

对 $n = n_0 - 1, n_0 - 2, \cdots, 1$，依次定义

$$x_n = x_{n+1} - \Phi^{-1}\left(\frac{a_{n+1}\Phi(\Delta x_{n+1}) + b_n | x_{n+1} |^{\gamma} \operatorname{sgn} x_{n+1}}{a_n}\right) \tag{26}$$

易证 $x=\{x_n\}$ 满足方程(1)．事实上，$1\leqslant n<n_0$ 时，$\{x_n\}$ 显然满足方程(1)．$n\geqslant n_0$ 时，根据(24)，(25)式可知，$\Delta x_n=-\Phi^{-1}\left(\frac{1}{a_k}\left(1-\sum_{j=k}^{\infty}b_j u_{j+1}^{\gamma}\right)\right)$．则通过条件($H_2$)得到

$$a_n\Phi(\Delta x_n)=\sum_{j=n}^{\infty}b_j x_{j+1}^{\gamma}-1\qquad n\geqslant n_0\tag{27}$$

因而有

$$\Delta(a_n\Phi(\Delta x_n))+b_n x_{n+1}^{\gamma}=0\qquad n\geqslant n_0\tag{28}$$

又由(25)式知，$n\geqslant n_0$ 时 $x_n=u_n>0$，据(28)式有$\{x_n\}(n\geqslant n_0)$满足方程(1)．通过(11)，(25)式和(27)式知 $n\geqslant n_0$ 时 $\Delta x_n<0$，那么 $x\in M^{-}$．由条件(C_2)、(13)式和(24)式，有

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}u_n=\frac{1}{2}\tag{29}$$

根据条件(C_2)和(27)式可知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n^{[1]}=-1$．因此由(29)式有 $x\in M_{c,d}^{-}$．

定理 3　若条件(H_2)和条件(C_2)成立，则 $M_{0,d}^{-}\neq\varnothing$．

证　对给定的 δ，可取充分大的 n_0，使得对每个 $n\geqslant n_0$ 满足(9)式，且

$$\sum_{k=n}^{\infty}b_k<1\qquad h_2\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{a_k}\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\tag{30}$$

定义

$$\Omega=\left\{u=\{u_n\}\in l^{\infty}:\frac{h_1}{2}s_n\leqslant u_n\leqslant h_2 s_n,\ n\geqslant n_0\right\}$$

其中 $s_n=\sum\limits_{k=n}^{\infty}\frac{1}{a_k}$．显然 Ω 是 l^{∞} 上的闭凸子集．任取 $u=\{u_n\}\in\Omega$，由(30)式知，对每个 $j\geqslant n_0$，有 $0<u_{j+1}^{\gamma}\leqslant\frac{1}{2}$，则$\frac{1}{2a_k}\leqslant\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_k}\sum\limits_{j=k}^{\infty}b_j u_{j+1}^{\gamma}<\frac{1}{a_k}(k\geqslant n_0)$．通过(5)式和(9)式可推得，对每个 $k\geqslant n_0$，有 $\Phi^{-1}\left(\frac{1}{a_k}\right)\leqslant\frac{h_2}{a_k}$ 且 $\Phi^{-1}\left(\frac{1}{2a_k}\right)\geqslant\frac{h_1}{2a_k}$．又据条件($H_2$)知

$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{h_1}{2a_k}\leqslant\sum_{k=n}^{\infty}\Phi^{-1}\left(\frac{1}{a_k}\left(1-\sum_{j=k}^{\infty}b_j u_{j+1}^{\gamma}\right)\right)\leqslant\sum_{k=n}^{\infty}\frac{h_2}{a_k}\qquad n\geqslant n_0\tag{31}$$

于是对每个 $n\geqslant n_0$，有 $0<\sum\limits_{k=n}^{\infty}\Phi^{-1}\left(\frac{1}{a_k}\left(1-\sum\limits_{j=k}^{\infty}b_j u_{j+1}^{\gamma}\right)\right)\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$．因此可定义 Ω 上的算子 $T:\Omega\longrightarrow l^{\infty}$，即 $Tu=w$，其中 $u=\{u_n\}\in\Omega$，$w=\{w_n\}\in l^{\infty}$，满足

$$w_n=\begin{cases}\sum\limits_{k=n}^{\infty}\Phi^{-1}\left(\frac{1}{a_k}\left(1-\sum\limits_{j=k}^{\infty}b_j u_{j+1}^{\gamma}\right)\right) & n\geqslant n_0\\ 0 & 1\leqslant n<n_0\end{cases}$$

由(31)式可知 $w\in\Omega$．类似定理2的证明可证 T 连续，$T\Omega$ 相对紧．由 Schauder 不动点定理，Ω 中存在 $u=\{u_n\}$ 满足 $Tu=u$．令 $x_n=u_n(n\geqslant n_0)$．对 $n=n_0-1,n_0-2,\cdots,1$，依次定义(26)式，易验证 $x=\{x_n\}\in M_{0,d}^{-}$．

定理 4　若条件(H_2)和(C_2)成立，则 $M_{c,d}^{+}\neq\varnothing$．

证　对给定的 δ，可取充分大的 n_0，使得对每个 $n\geqslant n_0$，满足(9)式和(10)式．定义

$$\Omega=\left\{u=\{u_n\}\in l^{\infty}:\frac{1}{2}\leqslant u_n\leqslant 1,\ n\geqslant n_0\right\}$$

显然 Ω 是 l^{∞} 上的闭凸子集．对每个 $u=\{u_n\}\in\Omega$，$0<u_{j+1}^{\gamma}\leqslant 1(j\geqslant n_0)$．则由(10)式，对每个 $k\geqslant n_0$ 有 $0<\frac{1}{a_k}+\frac{1}{a_k}\sum\limits_{j=k}^{\infty}b_j u_{j+1}^{\gamma}<\frac{2}{a_k}$．通过条件($H_2$)、(5)式和(9)式可得

$$0<\Phi^{-1}\left(\frac{1}{a_k}\left(1+\sum_{j=k}^{\infty}b_j u_{j+1}^{\gamma}\right)\right)\leqslant\Phi^{-1}\left(\frac{2}{a_k}\right)\leqslant\frac{2h_2}{a_k}\qquad k\geqslant n_0$$

根据(10)式可知，对任意的 $n \geqslant n_0$ 有 $0 < \sum\limits_{k=n}^{\infty}\Phi^{-1}\left(\frac{1}{a_k}\left(1+\sum\limits_{j=k}^{\infty}b_j u_{j+1}^{\gamma}\right)\right) \leqslant \sum\limits_{k=n}^{\infty}\frac{2h_2}{a_k} \leqslant \frac{1}{2}$. 因此可定义 Ω 上的算子 $T: \Omega \longrightarrow l^{\infty}$，即 $Tu = w$，其中 $u = \{u_n\} \in \Omega$，$w = \{w_n\} \in l^{\infty}$，满足

$$w_n = \begin{cases} 1 - \sum\limits_{k=n}^{\infty}\Phi^{-1}\left(\frac{1}{a_k}\left(1+\sum\limits_{j=k}^{\infty}b_j u_{j+1}^{\gamma}\right)\right) & n \geqslant n_0 \\ 1 & 1 \leqslant n < n_0 \end{cases}$$

易见 $w \in \Omega$. 类似定理2的证明可证 T 连续，$T\Omega$ 相对紧. 由 Schauder 不动点定理，Ω 中存在 $u = \{u_n\}$ 满足 $Tu = u$. 令 $x_n = u_n (n \geqslant n_0)$. 对 $n = n_0 - 1, n_0 - 2, \cdots, 1$，依次定义(26)式，易验证 $x = \{x_n\} \in M_{c,d}^{+}$.

定理5 若条件(H_2)和(C_2)成立，则 $M_{c,0}^{+} \neq \varnothing$.

证 对给定的 δ，可取充分大的 n_0，使得对每个 $n \geqslant n_0$，满足(9)式和(10)式. 考虑定理4中的集合 Ω，对每个 $u = \{u_n\} \in \Omega$，由(10)式推得 $0 < \frac{1}{a_k}\sum\limits_{j=k}^{\infty}b_j u_{j+1}^{\gamma} \leqslant \frac{1}{a_k} (k \geqslant n_0)$. 又据(5)式和(9)式，对每个 $k \geqslant n_0$ 有 $\Phi^{-1}\left(\frac{1}{a_k}\right) \leqslant \frac{h_2}{a_k}$ 成立. 则由条件(H_2)有 $\Phi^{-1}\left(\frac{1}{a_k}\sum\limits_{j=k}^{\infty}b_j u_{j+1}^{\gamma}\right) \leqslant \frac{h_2}{a_k} (k \geqslant n_0)$. 那么根据条件($C_2$)和(10)式可知，对每个 $n \geqslant n_0$，满足 $0 < \sum\limits_{k=n}^{\infty}\Phi^{-1}\left(\frac{1}{a_k}\sum\limits_{j=k}^{\infty}b_j u_{j+1}^{\gamma}\right) \leqslant \sum\limits_{k=n}^{\infty}\frac{h_2}{a_k} \leqslant \frac{1}{4}$. 因此可定义 Ω 上的算子 $T: \Omega \longrightarrow l^{\infty}$，即 $Tu = w$，其中 $u = \{u_n\} \in \Omega$，$w = \{w_n\} \in l^{\infty}$，满足

$$w_n = \begin{cases} 1 - \sum\limits_{k=n}^{\infty}\Phi^{-1}\left(\frac{1}{a_k}\sum\limits_{j=k}^{\infty}b_j u_{j+1}^{\gamma}\right) & n \geqslant n_0 \\ 1 & 1 \leqslant n < n_0 \end{cases}$$

易见 $w \in \Omega$. 类似定理2的证明可证 T 连续，$T\Omega$ 相对紧. 由 Schauder 不动点定理，Ω 中存在 $u = \{u_n\}$ 满足 $Tu = u$. 令 $x_n = u_n (n \geqslant n_0)$. 对 $n = n_0 - 1, n_0 - 2, \cdots, 1$，依次定义(26)式，易验证 $x = \{x_n\} \in M_{c,0}^{+}$.

参考文献：

[1] BONHEURE D, HABETS P, OBERSNEL F, et al. Classical and Non-Classical Solutions of a Prescribed Curvature Equation [J]. J Diff Equ, 2007, 243(2): 208-237.

[2] MA R Y, GAO H L. Multiple Positive Solutions for a Class of Semipositone Neumann Problems with Singular Φ-Laplacian [J]. Acta Math Sci, 2017, 37(5): 1472-1482.

[3] DOSLA Z, MARINI M, MATUCCI S. Positive Decaying Solutions to BVPs with Mean Curvature Operator [J]. Rend Istit Mat Univ Trieste, 2017, 49: 147-164.

[4] 黄文姣，巨月娟，葛永斌. 求解一维扩散反应方程的隐式高精度紧致差分格式 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2018, 40(7): 85-90.

[5] 郭春丽. 一类空间非因果关系反应扩散方程的边界控制 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2018, 43(9): 22-29.

[6] AGARWAL R P, BOHNER M, GRACE S R, et al. Discrete Oscillation Theory [M]. New York: Hindawi Publishing Corporation, 2005.

[7] CECCHI M, DOSLA Z, MARINI M. On Oscillation of Difference Equations with Bounded Φ-Laplacian [J]. Comput Math Appl, 2012, 64(7): 2176-2184.

[8] LI W T. Classification Schemes for Nonoscillatory Solutions of Two-Dimensional Nonlinear Difference Systems [J]. Comput Math Appl, 2001, 42(3-5): 341-355.

[9] CECCHI M, DOSLA Z, MARINI M. On Oscillation and Nonoscillation Properties of Emden-Fowler Difference Equations [J]. Cent Eur J Math, 2009, 7(2): 322-334.

[10] HE X Z. Oscillatory and Asymptotic Behavior of Second Order Nonlinear Difference Equations [J]. J Math Anal Appl, 1993, 175(2): 482-498.

[11] SARASWATHI G, SUMATHI P. Oscillatory and Asymptotic Behaviour of Solutions of Two Nonlinear Dimensional Difference Systems [J]. J Appl Math Phys, 2019, 7(4): 1001-1011.

[12] JIANG J C, TANG X H. Oscillation and Asymptotic Behavior of Two-Dimensional Difference Systems [J]. Comput Math Appl, 2007, 54(9-10): 1240-1249.

[13] AGARWAL R P, MANOJLOVIC J V. On the Existence and the Asymptotic Behavior of Nonoscillatory Solutions of Second Order Quasilinear Difference Equations [J]. Funkc Ekvacioj, 2013, 56(1): 81-109.

[14] JIANG J C, TANG X H. Oscillation of Second Order Half-Linear Difference Equations (I) [J]. Applied Math Sci, 2014, 8: 1957-1968.

[15] CHENG S S, PATULA W T. An Existence Theorem for a Nonlinear Difference Equation [J]. Nonlinear Anal-Theor, 1993, 20(3): 193-203.

[16] HOOKER J W, PATULA W T. A Second-Order Nonlinear Difference Equation: Oscillation and Asymptotic Behavior [J]. J Math Anal Appl, 1983, 91(1): 9-29.

On Non-Oscillatory Solutions for a Class of Difference Equation with Φ-Laplace Operator

WEN Chun-lan

School of Mathematics, Sichuan university, Chengdu 610064, China

Abstract: This paper deals with the problem of non-oscillatory solutions for difference equation

$$\Delta(a_n\Phi(\Delta x_n)) + b_n \mid x_{n+1} \mid^{\gamma} \operatorname{sgn} x_{n+1} = 0 \qquad n \geqslant 1,\ \gamma > 0$$

involving Φ-Laplace operator. It gives that all of the non-oscillatory solutions are eventually strongly monotone when Φ and the sequences $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ satisfy certain conditions. Then it classifies them into four classes according to the behaviors of the non-oscillatory solutions. Moreover, the paper proves the existence of four types of non-oscillatory solutions to the equation by the Schauder fixed point theorem and the discrete analog of the Lebesgue dominated theorem.

Key words: Φ-Laplace operator; difference equation; non-oscillatory solutions

责任编辑　廖　坤