DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2020.10.006

奇异四阶微分方程 m 点边值问题正解的存在性①

赵　微

大庆师范学院 教师教育学院,黑龙江 大庆 163712

摘要: 讨论了如下奇异四阶微分方程 m 点边值问题正解的存在性:

$$\begin{cases} u^{(4)}(t)+h(t)f(u)=0 \\ u(0)=u(1)=u''(0)=0 \\ u''(1)=\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i u''(\eta_i) \end{cases}$$

其中:$\eta_i\in(0,1)$,$0<\eta_1<\eta_2<\cdots<\eta_{m-2}<1$;$\beta_i\in[0,\infty)$ 且 $\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\eta_i<1$;函数 $h(t):(0,1)\longrightarrow[0,+\infty)$ 连续且不恒等于 0,允许 $h(t)$ 在 $t=0$ 或 $t=1$ 处奇异;$f:[0,+\infty)\longrightarrow[0,+\infty)$ 连续. 首先,构建了上述奇异四阶微分方程 m 点边值问题的格林函数,并得到其相关性质;其次,构建了 Banach 空间上的锥,及其锥上的凸泛函,通过运用凸泛函上的不动点指数定理来计算不动点指数,从而得到了上述边值问题至少有一个正解存在的结论;最后,给出一个例子,说明主要定理的具体应用.

关　键　词: 四阶微分方程;m 点边值问题;格林函数;凸泛函;不动点指数

中图分类号:O175.8　　**文献标志码:A**　　**文章编号:** 1000-5471(2020)10-0028-07

近几十年来,微分方程边值问题一直受到广泛的关注[1-12]. 而四阶常微分方程的边值问题可用来描述悬臂梁问题,以及弹性物理等工程实际问题,引起了许多学者的关注. 对于四阶常微分方程边值问题正解的存在性,一些学者已经做了较多的研究[1-6],多数文献通过运用 Krasnosel'skill 不动点定理、锥拉伸与压缩不动点定理、迭合度理论、上下解方法等得到了四阶微分方程边值问题正解存在的结果.

文献[1]研究了如下的奇异四阶微分方程两点边值问题:

$$\begin{cases} x^{(4)}(t)-h(t)f(x(t))=0 & 0<t<1 \\ x(0)=x(1)=x'(0)=x'(1)=0 \end{cases}$$

运用第一特征值的相关理论以及压缩映射原理,得到了上述问题正解的唯一存在性.

文献[3]研究了如下的四阶微分方程三点边值问题:

$$\begin{cases} u^{(4)}(t)=f(t,u(t)) & t\in[0,1] \\ u'(0)=u''(\eta)=u'''(0)=u(1)=0 \end{cases}$$

运用锥拉伸与压缩不动点定理,得到了上述问题正解的存在性.

文献[5]研究了如下的四阶微分方程三点边值问题:

$$\begin{cases} x^{(4)}(t)=f(t,x(t)) & t\in[0,1] \\ x(0)=x'(0)=x''(\eta)=x'''(1)=0 \end{cases}$$

运用 Krasnosel'skill 不动点定理,得到了上述问题正解的存在性.

① 收稿日期:2020-02-16

基金项目:黑龙江省自然科学基金项目(LH2020A017);吉林省教育厅"十三五"科学技术项目(JJKH20200235KJ).

作者简介:赵　微(1979-),女,副教授,主要从事非线性分析的研究.

受上述结论的启发，本文将研究如下奇异四阶微分方程 m 点边值问题，即

$$\begin{cases} u^{(4)}(t)+h(t)f(u(t))=0 \\ u(0)=u(1)=u''(0)=0 \\ u''(1)=\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i u''(\eta_i) \end{cases} \tag{1}$$

其中：$\eta_i\in(0,1)$，$0<\eta_1<\eta_2<\cdots<\eta_{m-2}<1$；$\beta_i\in[0,\infty)$ 且 $\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\eta_i<1$；允许 $h(t)$ 在 $t=0$ 或 $t=1$ 处奇异.

文中首先构建奇异四阶微分方程 m 点边值问题(1) 的格林函数，并得到其相关性质；其次构建 Banach 空间上的锥及其锥上的凸泛函，运用凸泛函上的不动点指数定理来计算不动点指数，得到了边值问题(1) 至少有一个正解的结论. 据作者所知，未见有讨论上述问题的相关文献，且作者所用方法不同于以往文献.

令 $G(t,s)$ 为齐次微分方程 $u^{(4)}(t)=0$ 满足问题(1) 中的边值条件下的格林函数，具体表示为

$$G(t,s)=g(t,s)+D^{-1}t(1-t^2)\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i k(\eta_i,s)$$

其中

$$g(t,s)=\begin{cases} -\frac{1}{6}s^3+\frac{1}{3}st+\frac{1}{6}s^3t-\frac{1}{2}st^2+\frac{1}{6}st^3 & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1 \\ -\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{3}st+\frac{1}{6}s^3t-\frac{1}{2}s^2t+\frac{1}{6}st^3 & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1 \end{cases}$$

$$k(\eta_i,s)=\begin{cases} \eta_i(1-s) & 0\leqslant \eta_i\leqslant s\leqslant 1 \\ s(1-\eta_i) & 0\leqslant s\leqslant \eta_i\leqslant 1 \end{cases}$$

$$D=6\left(1-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\eta_i\right)$$

引理 1　函数 $g(t,s)$ 满足下面不等式：

$$g(t,s)\leqslant\frac{1}{3}s(1-s)\qquad 0\leqslant t,s\leqslant 1 \tag{2}$$

$$g(t,s)\geqslant\frac{1}{128}s(1-s)\qquad \frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{3}{4},\ 0\leqslant s\leqslant 1 \tag{3}$$

证　令

$$\varphi(t,s)=-\frac{1}{6}s^3+\frac{1}{3}st+\frac{1}{6}s^3t-\frac{1}{2}st^2+\frac{1}{6}st^3\qquad 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1$$

$$\psi(t,s)=-\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{3}st+\frac{1}{6}s^3t-\frac{1}{2}s^2t+\frac{1}{6}st^3\qquad 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1$$

故当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时，有

$$\varphi(t,s)=\frac{1}{6}s[s^2(t-1)+t(2+t^2-3t)]=\frac{1}{6}s(1-t)[t(2-t)-s^2]\leqslant$$

$$\frac{1}{6}s(1-s)(2t-t^2-s^2)\leqslant\frac{1}{6}s(1-s)2t\leqslant\frac{1}{3}s(1-s)$$

$$\psi(t,s)=-\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{3}st+\frac{1}{6}s^3t-\frac{1}{2}s^2t+\frac{1}{6}st^3=\frac{1}{6}t(1-s)[s(2-s)-t^2]\leqslant$$

$$\frac{1}{6}t(1-s)2s\leqslant\frac{1}{3}s(1-s)$$

当 $\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{3}{4}$ 时，有

$$\varphi(t,s)=\frac{1}{6}s(1-t)[t(2-t)-s^2]\geqslant\frac{1}{6}s(1-t)2t(1-t)\geqslant\frac{1}{3}s(1-s)t(1-t)^2\geqslant\frac{1}{128}s(1-s)$$

$$\psi(t,s)=\frac{1}{6}t(1-s)[s(2-s)-t^2]\geqslant\frac{1}{6}t(1-s)(t-t^2)\geqslant\frac{1}{6}s(1-s)t^2(1-t)\geqslant\frac{1}{128}s(1-s)$$

为了方便，作如下假设条件：

(H_1) $1-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i u(\eta_i)>0$；

(H_2) $h:(0,1)\longrightarrow[0,+\infty)$ 连续，$h(t)$ 不恒等于 0，允许 $h(t)$ 在 $t=0,1$ 处奇异；

(H_3) $f:[0,+\infty)\longrightarrow[0,+\infty)$ 连续.

在 Banach 空间 $C[0,1]$ 中，其中范数为 $\|u\|=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|u(t)|$，令

$$P=\{u\in C[0,1]:u(t)\geqslant 0,\ t\in[0,1]\}$$

则 P 是 $C[0,1]$ 上的正锥. 取

$$P_1=\{u\in P:\min_{\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{3}{4}}u(t)\geqslant l\|u\|\}$$

其中 $l=\frac{1}{128}$.

定义算子

$$Au(t)=\int_0^1 G(t,s)h(s)f(u(s))\mathrm{d}s \qquad t\in[0,1] \tag{4}$$

引理 2 设条件(H_1)－(H_3)满足，则算子 $A:P_1\longrightarrow P_1$ 全连续.

证 由(2)式可知

$$(Au)(t)=\int_0^1 G(t,s)h(s)f(u(s))\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\int_0^1 s(1-s)h(s)f(u(s))\mathrm{d}s+\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i D^{-1}t(1-t^2)\int_0^1 k(\eta_i,s)h(s)f(u(s))\mathrm{d}s$$

于是

$$\|Au\|\leqslant\int_0^1 s(1-s)h(s)f(u(s))\mathrm{d}s+\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i D^{-1}\int_0^1 k(\eta_i,s)h(s)f(u(s))\mathrm{d}s$$

由(3)式，则有

$$\min_{\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{3}{4}}(Au)(t)\geqslant\int_0^1\frac{1}{128}s(1-s)h(s)f(u(s))\mathrm{d}s+\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i D^{-1}\frac{1}{128}\int_0^1 k(\eta_i,s)h(s)f(u(s))\mathrm{d}s\geqslant$$
$$\frac{1}{128}\left[\int_0^1 s(1-s)h(s)f(u(s))\mathrm{d}s+\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i D^{-1}\int_0^1 k(\eta_i,s)h(s)f(u(s))\mathrm{d}s\right]\geqslant$$
$$\frac{1}{128}\|Au\|$$

从而 $A:P_1\longrightarrow P_1$，且 $A(P_1)\longrightarrow P_1$. 由 Azela-Ascoli 定理则知，算子 $A:P_1\longrightarrow P_1$ 全连续.

下面介绍有关凸泛函的两个不动点指数引理.

定义 1[10] 如果锥 P 上的泛函 $\rho:P\longrightarrow\mathbb{R}$，对于 $\forall x,y\in P$，$t\in[0,1]$，满足

$$\rho(tx+(1-t)y)\leqslant t\rho(x)+(1-t)\rho(y)$$

则称 ρ 是锥 P 上的凸泛函.

引理 3[10] 设 P 是 E 中的锥，Ω 是 E 中的有界开集，且 $\theta\in\Omega$. 假设算子 $A:P\cap\bar{\Omega}\longrightarrow P$ 全连续，$\rho:P\longrightarrow[0,+\infty)$ 是凸泛函，且满足 $\rho(\theta)=0$，并对 $\forall x\neq\theta$，$\rho(x)>0$. 如果 $\rho(Ax)\leqslant\rho(x)$，且当 $x\in P\cap\partial\Omega$ 时，$Ax\neq x$，则不动点指数 $i(A,P\cap\Omega,P)=1$.

引理 4[10] 设 P 是 E 中的锥，Ω 是 E 中的有界开集. 假设算子 $A:P\cap\bar{\Omega}\longrightarrow P$ 全连续，$\rho:P\longrightarrow[0,+\infty)$ 是一致连续的凸泛函，且满足 $\rho(\theta)=0$，并对 $\forall x\neq\theta$，$\rho(x)>0$. 如果：

(i) $\inf\limits_{x\in P\cap\partial\Omega}\rho(x)>0$；

(ii) $\rho(Ax)\geqslant\rho(x)$，且对 $\forall x\in P\cap\partial\Omega$，$Ax\neq x$.

则不动点指数 $i(A,P\cap\Omega,P)=0$.

令

$$h_0 = \int_0^1 \left[\frac{1}{3}t(1-t) + D^{-1}\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i t(1-t)\right]h(t)\mathrm{d}t$$

$$h_\tau = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{1}{128}t(1-t)h(t)\mathrm{d}t$$

显然有 $h_0 \geqslant h_\tau > 0$.

定理 1　假设$(\mathrm{H}_1)-(\mathrm{H}_3)$成立，如果存在常数 a 和 b，使得当 $a,b>0$ 时满足：

(i) $b<a$；

(ii) $\forall\, u \leqslant bl^{-1}h_\tau^{-1}$，$f(u) \leqslant h_0^{-1}u$；

(iii) $\forall\, ah_\tau^{-1}l \leqslant u \leqslant ah_\tau^{-1}l^{-1}$，$f(u) \geqslant h_\tau^{-1}u$.

则四阶边值问题(1)至少存在一个正解.

证　令

$$\rho_1(u) = \int_0^1 \left[\frac{1}{3}t(1-t) + D^{-1}\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i t(1-t)\right]h(t)u(t)\mathrm{d}t$$

则 $\rho_1: P_1 \longrightarrow [0,+\infty)$ 是一致连续的凸泛函，且 $\rho_1(\theta)=0$.

对于 $\forall\, u \in P_1\backslash\{\theta\}$，有

$$\rho_1(u) \geqslant \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \left[\frac{1}{3}t(1-t) + D^{-1}\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i t(1-t)\right]h(t)u(t)\mathrm{d}t \geqslant$$

$$l\,\|u\|\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \left[\frac{1}{3}t(1-t) + D^{-1}\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i t(1-t)\right]h(t)\mathrm{d}t > 0$$

设 $\Omega_1 = \{u \in C[0,1]: \rho_1(u) < b\}$. 显然 Ω_1 是 $C[0,1]$ 上的开集，且 $\theta \in \Omega_1$.

如果 $u \in P_1 \cap \overline{\Omega_1}$，则有

$$b \geqslant \rho_1(u) \geqslant \int_0^1 \frac{1}{3}t(1-t)h(t)u(t)\mathrm{d}t \geqslant$$

$$l\,\|u\|\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{1}{3}t(1-t)h(t)\mathrm{d}t > l\,\|u\|\,h_\tau$$

因此有 $\|u\| \leqslant b\,l^{-1}h_\tau^{-1}$. 这意味着 $P_1 \cap \Omega_1$ 是有界的.

如果 $u \in P_1 \cap \partial\Omega_1$，则 $\rho_1(u)=b$ 且 $\|u\| \leqslant bl^{-1}h_\tau^{-1}$，因此

$$\begin{aligned}\rho_1(Au) = &\int_0^1 \left\{\left[\frac{1}{3}t(1-t) + D^{-1}\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i t(1-t)\right]h(t)\int_0^1 G(t,s)h(s)f(u(s))\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t \leqslant \\ &\int_0^1 \left[\frac{1}{3}t(1-t) + D^{-1}\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i t(1-t)\right]h(t)\mathrm{d}t \cdot \int_0^1 \left[\frac{1}{3}s(1-s) + D^{-1}\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i s(1-s)\right]h(s)h_0^{-1}u(s)\mathrm{d}s = \\ &\int_0^1 \left[\frac{1}{3}s(1-s) + D^{-1}\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i s(1-s)\right]h(s)u(s)\mathrm{d}s = \\ &\rho_1(u)\end{aligned}$$

假设 A 在 $P_1 \cap \partial\Omega_1$ 上没有不动点，则由引理 3 知

$$i(A, P_1 \cap \Omega_1, P_1) = 1$$

令

$$\rho_2(u) = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{1}{128}t(1-t)h(t)u(t)\mathrm{d}t$$

则 $\rho_2: P_1 \longrightarrow [0,+\infty)$ 是一致连续的凸泛函，且 $\rho_2(\theta)=0$，对于 $u \in P_1\backslash\{\theta\}$，$\rho_2(u)>0$.

设 $\Omega_2 = \{u \in C[0,1]: \rho_2(u) < a\}$. 显然 Ω_2 是 $C[0,1]$ 上的开集.

如果 $u \in P_1 \cap \overline{\Omega_2}$，则有

$$a \geqslant \rho_2(u) \geqslant l\,\|u\|\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{1}{128}t(1-t)h(t)\mathrm{d}t = l\,\|u\|\,h_\tau$$

于是得 $\|u\| \leqslant al^{-1}h_\tau^{-1}$. 这意味着 $P_1 \cap \Omega_2$ 是有界的.

如果 $u \in P_1 \cap \partial\Omega_2$，则 $\rho_2(u)=a$ 且 $\|u\| \leqslant al^{-1}h_\tau^{-1}$，由于

$$a=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{1}{128}t(1-t)h(t)u(t)\mathrm{d}t \leqslant$$

$$\|u\| \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{1}{128}t(1-t)h(t)\mathrm{d}t = \|u\| h_\tau$$

所以 $\|u\| \geqslant ah_\tau^{-1}$，于是

$$\min_{\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant \frac{3}{4}} u(t) \geqslant l\|u\| \geqslant lah_\tau^{-1}$$

所以

$$\begin{aligned}\rho_2(Au)=&\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}\left[\frac{1}{128}t(1-t)h(t)\int_0^1 G(t,s)h(s)f(u(s))\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t \geqslant\\ &\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{1}{128}t(1-t)h(t)\mathrm{d}t \cdot \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{1}{128}s(1-s)h(s)h_\tau^{-1}u(s)\mathrm{d}s=\\ &\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{1}{128}s(1-s)h(s)u(s)\mathrm{d}s=\\ &\rho_2(u)\end{aligned}$$

假设 A 在 $P_1 \cap \partial\Omega_2$ 上没有不动点，由引理4知

$$i(A, P_1 \cap \Omega_2, P_1)=0$$

$\forall u \in P_1 \cap \overline{\Omega_1}$，有

$$\rho_2(u) \leqslant \int_0^1 \frac{1}{3}t(1-t)h(t)u(t)\mathrm{d}t \leqslant \rho_1(u) \leqslant b < a$$

因此，$P_1 \cap \overline{\Omega_1} \subset P_1 \cap \Omega_2$，于是进一步得

$$i(A, P_1 \cap (\Omega_2 \backslash \overline{\Omega_1}), P_1)=-1$$

则 A 在 $P_1 \cap (\Omega_2 \backslash \overline{\Omega_1})$ 上至少有一个不动点，也即是四阶 m 点边值问题(1)至少存在一个正解.

定理2 假设(H_1)-(H_3)成立，如果存在常数 a 和 b，使得当 $0<b<a$ 时满足：

(i) $b<al^2h_\tau^2h_0^{-1}$；

(ii) $\forall blh_\tau^{-1} \leqslant u \leqslant bl^{-1}h_\tau^{-1}$，$f(u) \geqslant h_\tau^{-1}u$；

(iii) $\forall u \leqslant al^{-1}$，$f(u) \leqslant ah_0^{-1}$.

则四阶边值问题(1)至少存在一个正解.

证 因为

$$bl^{-1}h_\tau^{-1} < al^2h_\tau^2h_0^{-1}l^{-1}h_\tau^{-1} = alh_\tau h_0^{-1} < al^{-1}$$

对 $\forall u \leqslant bl^{-1}h_\tau^{-1}$，有

$$h_\tau^{-1}u \leqslant h_\tau^{-1}bl^{-1}h_\tau^{-1} = (h_\tau^{-1})^2al^2h_\tau^2h_0^{-1}l^{-1} = alh_0^{-1} < ah_0^{-1}$$

设

$$\rho_1(u)=\max_{\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant \frac{3}{4}} u(t) \qquad \rho_2(u)=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{1}{128}t(1-t)h(t)u(t)\mathrm{d}t$$

于是，$\rho_i: P_1 \longrightarrow [0,+\infty)$ 是一致连续凸泛函，且 $\rho_i(\theta)=0(i=1,2)$.

$\forall u \in P_1 \backslash \{\theta\}$，有

$$\rho_1(u) \geqslant \frac{1}{128}\|u\| > 0$$

$$\rho_2(u) \geqslant \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{1}{128}t(1-t)h(t)l\|u\|\mathrm{d}t > 0$$

令 $\Omega_1=\{u \in C[0,1]: \rho_2(u)<b\}$，$\Omega_2=\{u \in C[0,1]: \rho_1(u)<a\}$. 显然 Ω_1 和 Ω_2 是 $C[0,1]$ 上的开集，且 $\theta \in \Omega_1$.

如果 $u \in P_1 \cap \overline{\Omega_1}$，则有

$$b \geqslant \rho_2(u) \geqslant l\|u\| \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{1}{128} t(1-t) h(t) \mathrm{d}t = l\|u\| h_\tau$$

因此，$\|u\| \leqslant b l^{-1} h_\tau^{-1}$，这意味着 $P_1 \cap \Omega_1$ 是有界的. 进一步有

$$\rho_1(u) \leqslant \|u\| \leqslant b l^{-1} h_\tau^{-1} < a l^2 h_\tau^2 h_0^{-1} l^{-1} h_\tau^{-1} = a l h_\tau h_0^{-1} < al < a$$

所以 $P_1 \cap \overline{\Omega_1} \subset P_1 \cap \Omega_2$.

如果 $u \in P_1 \overline{\Omega_2}$，则有

$$a \geqslant \rho_1(u) \geqslant l\|u\|$$

于是 $\|u\| \leqslant a l^{-1}$，这意味着 $P_1 \cap \Omega_2$ 是有界的.

假设 A 在 $P_1 \cap \partial\Omega_1$ 和 $P_1 \cap \Omega_2$ 上没有不动点.

如果 $u \in P_1 \cap \partial\Omega_1$，则 $b = \rho_2(u) \leqslant \|u\| h_\tau$，且

$$\min_{\frac{1}{4} \leqslant t \leqslant \frac{3}{4}} u(t) \geqslant l\|u\| \geqslant l b h_\tau^{-1}$$

进一步则有

$$\begin{aligned}\rho_2(Au) = &\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{1}{128} t(1-t) h(t) \left[\int_0^1 G(t, s) h(s) f(u(s)) \mathrm{d}s\right] \mathrm{d}t \geqslant \\ &\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{1}{128} t(1-t) h(t) \mathrm{d}t \cdot \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{1}{128} s(1-s) h(s) h_\tau^{-1} u(s) \mathrm{d}s = \\ &\rho_2(u)\end{aligned}$$

所以由引理 4 知

$$i(A, P_1 \cap \Omega_1, P_1) = 0$$

如果 $u \in P_1 \cap \partial\Omega_2$，则

$$\begin{aligned}\rho_1(Au) = &\max_{\frac{1}{4} \leqslant t \leqslant \frac{3}{4}} \int_0^1 G(t, s) h(s) f(u(s)) \mathrm{d}s \leqslant \\ &\int_0^1 \frac{1}{3} s(1-s) h(s) a h_0^{-1} \mathrm{d}s = a = \rho_1(u)\end{aligned}$$

由引理 3 知

$$i(A, P_1 \cap \Omega_2, P_1) = 1$$

综上所述，

$$i(A, P_1 \cap (\Omega_2 \setminus \overline{\Omega_1}), P_1) = 1$$

则 A 在 $P_1 \cap (\Omega_2 \setminus \overline{\Omega_1})$ 上至少有一个不动点. 也即四阶 m 点边值问题(1) 至少存在一个正解.

例 1　考虑如下四阶边值问题

$$\begin{cases} u^{(4)}(t) + h(t) f(u(t)) = 0 \\ u(0) = u(1) = u''(0) = 0 \\ u''(1) = \beta_1 u''(\eta_1) + \beta_2 u''(\eta_2) + \beta_3 u''(\eta_3) \end{cases} \tag{5}$$

其中 $\eta_1 = \frac{1}{6}$，$\eta_2 = \frac{1}{5}$，$\eta_3 = \frac{1}{4}$，$\beta_1 = \frac{3}{2}$，$\beta_2 = \frac{4}{3}$，$\beta_3 = \frac{6}{5}$，$D^{-1} \approx 0.909\,1$.

取 $h(t) = \frac{1}{t^{\frac{2}{3}}(1-t)}$，$f(u) = 0.02 \cdot (\mathrm{e}^{0.2u} - 1)$，$a \approx 48.883\,7$，$b \approx 0.001\,113\,3$. 根据定理 1 知四阶微分方程的五点边值问题(5) 至少存在一个正解.

参考文献：

[1]　崔玉军，赵　聪. 四阶微分方程奇异边值问题解的唯一性 [J]. 山东大学学报(理学版)，2017，52(2)：73-76,96.

[2]　陆海霞，孙经先. 一类四阶非线性微分方程两点边值问题的正解 [J]. 数学的实践与认识，2014，44(8)：229-235.

[3]　杨忠贵，韩晓玲，王　姗. 一类非线性四阶三点边值问题正解的存在性 [J]. 陕西师范大学学报(自然科学版)，2019，47(3)：69-72.

[4] 达举霞，韩晓玲，霍 梅. 具有变号格林函数的四阶三点边值问题正解的存在性 [J]. 吉林大学学报(理学版)，2016，54(4)：695-699.

[5] 施恂栋，刘文斌. 一类非线性四阶微分方程三点边值问题的可解性 [J]. 淮阴师范学院学报(自然科学版)，2013，12(2)：95-98.

[6] 张亚莉. 一类非线性四阶常微分方程边值问题正解的存在性 [J]. 四川大学学报(自然科学版)，2019，56(6)：1004-1008.

[7] 纪宏伟. 一个典型弹性梁方程涉及第一特征值的正解 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2019，44(1)：14-19.

[8] 邢艳元，郭志明. 一类 Caputo 分数阶脉冲微分方程混合边值问题解的存在唯一性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2019，41(8)：48-53.

[9] 康淑瑰，岳亚卿，郭建敏. 分数阶微分方程奇异系统边值问题正解的存在性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2019，41(4)：104-108.

[10] ZHANG G W，SUN J X，ZHANG T. Existence of Positive Solutions for a Class of Second-Order Two-Point Boundary Value Problem [J]. Positivty，2008，12(3)：547-554.

[11] ZHANG G W，SUN J X. A Generalization of the Cone Expansion and Compression Fixed Point Theorem and Applications [J]. Nonlinear Analysis，2007，67(2)：579-586.

[12] 郭大钧. 非线性泛函分析 [M]. 2 版. 济南：山东科学技术出版社，2003：21-41.

Positive Solutions of *m*-Point Boundary Value Problem for Singular Fourth-Order Differential Equation

ZHAO Wei

Department of Teaching Education, Daqing Normal University, Daqing Heilongjiang 163712, China

Abstract: The existence of positive solutions for singular fourth-order m-point boundary value problem

$$\begin{cases} u^{(4)}(t)+h(t)f(u)=0 \\ u(0)=u(1)=u''(0)=0 \\ u''(1)=\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i u''(\eta_i) \end{cases}$$

has been obtained, where $\eta_i\in(0,1)$, $0<\eta_1<\eta_2<\cdots<\eta_{m-2}<1$; $\beta_i\in[0,\infty)$ with $\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\eta_i<1$. The function $h(t)$: $(0,1)\longrightarrow[0,+\infty)$ is continuous, not equal to zero and allowed to be singular at $t=0$ or $t=1$. The function f: $[0,+\infty)\longrightarrow[0,+\infty)$ is continuous. In this paper, firstly the Green function of the above singular fourth-order differential equation m-point boundary value problem has been constructed, and the properties of the Green function been obtained. Secondly, the cone on Banach space and its convex functional on cone have been constructed. By using the fixed point index theorem on convex functional to calculate the fixed point index, the conclusion that there is at least one positive solution to the above boundary value problem has been obtained. Finally, an example has been given to illustrate the application of the main theorem.

Key words: fourth-order differential equation; m-point boundary value problem; Green function; convex functional; fixed point index

责任编辑 廖 坤