第 45 卷 第 10 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2020 年 10 月
Vol. 45 No. 10 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Oct. 2020

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2020.10.007

非线性复系统 $X^m-BX-C=0$ 的 Hermite 正定解[①]

黄敬频， 熊 昊， 张姗姗

广西民族大学 理学院，南宁 530006

摘要：非线性矩阵方程在控制理论、动态规划、梯形网络和随机过滤等领域有广泛应用. 在一定条件下讨论了 m 次非对称复系统 $\boldsymbol{X}^m-\boldsymbol{BX}-\boldsymbol{C}=\boldsymbol{0}(m\geqslant 2)$ 的 Hermite 正定解问题. 给出了该系统存在正定解的充要条件，并利用系数矩阵的极大极小特征值所构成代数方程的根以及 Brouwer 不动点定理，获得了其正定解的存在区间. 为迭代求出该系统的正定解，给出了与原方程同解且具对称结构的非线性系统. 然后针对系数矩阵 $\boldsymbol{B}$ 分别为正定、负定、不定 3 种情况构造出相应的迭代格式，并根据相关代数方程的特征性质，分别证明了所建立的 3 种迭代格式的收敛性. 与此同时根据每种迭代的特点，给出了迭代初始矩阵的选取方法. 运用一个 5 次复系统的数值算例，检验了所给方法的有效性及可行性.

关 键 词：非线性复系统；Hermite 正定解；存在性；迭代算法

中图分类号：**O241.6** **文献标志码**：**A** **文章编号**：1000-5471(2020)10-0035-07

本文研究非线性复系统

$$\boldsymbol{X}^m-\boldsymbol{BX}-\boldsymbol{C}=\boldsymbol{0} \tag{1}$$

的 Hermite 正定解，其中 $m\geqslant 2$ 是正整数，$\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\in C^{n\times n}$ 是 Hermite 矩阵且 $\boldsymbol{C}$ 正定. 当 $m=2$ 时，方程来源于 Markov 链的噪声 Wiener-Hopf 问题，在控制理论、动态规划、随机过滤等领域有广泛应用，许多学者对其求解方法和解的特征进行过研究[1-5]. 文献[6] 讨论了一类线性系统的 $\boldsymbol{M}$ 自共轭解；文献[7] 给出了二次系统 $\boldsymbol{AX}^2+\boldsymbol{BX}+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{0}$ 的最大解 $\boldsymbol{X}_1$ 和最小解 $\boldsymbol{X}_2$(即 $\boldsymbol{X}_1$ 特征值的模均大于 $\boldsymbol{X}_2$ 特征值的模) 存在的充分条件；文献[8] 在 $m=2$，$\boldsymbol{B}=b>0$ 且 $\boldsymbol{C}$ 对称正定时讨论了方程(1) 的正定解；文献[9] 在 $m=2$，$\boldsymbol{B}$ 是对角阵且 $\boldsymbol{C}$ 是非奇异 $\boldsymbol{M}$ 矩阵时讨论了一类非对称代数黎卡提方程(1) 解的性质；文献[10-11] 分别研究了一类 Lipschitz 非线性连续时滞系统基于非均匀采样测量的网络化状态估计问题，及具有状态时延的网络控制系统的有限时间镇定问题；文献[12-14] 分别研究了二次系统 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{DX}+\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{X}^{T}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{AXA}=\boldsymbol{XAX}$ 和 $\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{X}^2=\boldsymbol{X}$ 的一般解；文献[15] 采用线性矩阵方程迭代法得到了一个二元非线性差分系统正平衡点的稳定性；文献[16] 给出了对称非线性系统 $\boldsymbol{X}-\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{X}^{-2}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}$ 存在 Hermite 正定解的充分条件及正定解范围. 然而，目前对于高阶非对称系统的结构解研究甚少，在此本文讨论 m 次复系统(1) 的 Hermite 正定解的存在性及其求解算法.

用 $\lambda_{\max}(\boldsymbol{A})$，$\lambda_{\min}(\boldsymbol{A})$ 分别表示 Hermite 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最大和最小特征值. 对于正定矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$，用 $\boldsymbol{A}>\boldsymbol{B}$ 表示 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 是正定的. $\boldsymbol{A}^*$ 表示复矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的共轭转置.

1 正定解的存在性及算法

引理 1 非线性复系统(1) 存在 Hermite 正定解的充要条件是 $\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{CB}$.

---

① 收稿日期：2020-03-08

基金项目：国家自然科学基金项目(11661011).

作者简介：黄敬频(1964－)，男，教授，主要从事矩阵计算及应用的研究.

证 如果方程(1) 存在 Hermite 正定解 $\boldsymbol{X}$，则 $\boldsymbol{X}^m - \boldsymbol{C} = \boldsymbol{BX}$，两边取共轭转置可得

$$\boldsymbol{XB} = (\boldsymbol{BX})^* = (\boldsymbol{X}^m - \boldsymbol{C})^* = \boldsymbol{X}^m - \boldsymbol{C} = \boldsymbol{BX}$$

于是

$$\boldsymbol{BC} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{X}^m - \boldsymbol{BX}) = (\boldsymbol{X}^m - \boldsymbol{BX})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{CB}$$

反之，如果 $\boldsymbol{BC} = \boldsymbol{CB}$，则 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 可同时酉对角化，即存在酉矩阵 $\boldsymbol{U} \in U^{n\times n}$，使得

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{UD}_B\boldsymbol{U}^* \qquad \boldsymbol{C} = \boldsymbol{UD}_C\boldsymbol{U}^* \tag{2}$$

其中

$$\boldsymbol{D}_B = \mathrm{diag}(b_1, \cdots, b_n) \qquad b_i \in \mathbb{R}$$

$$\boldsymbol{D}_C = \mathrm{diag}(c_1, \cdots, c_n) \qquad c_i > 0,\ i = 1,\cdots,n$$

令 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{U}^*\boldsymbol{XU}$，则方程(1) 等价于

$$\boldsymbol{Y}^m - \boldsymbol{D}_B\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{D}_C = \boldsymbol{0} \tag{3}$$

取 $\boldsymbol{Y} = \mathrm{diag}(y_1, y_2, \cdots, y_n)$，则方程(3) 有正解 $\boldsymbol{Y} > \boldsymbol{0}$ 等价于下列 n 个代数方程均有正实根：

$$y_i^m - b_iy_i - c_i = 0 \qquad i = 1,2,\cdots,n \tag{4}$$

令 $f(y) = y^m - by - c(c > 0)$，则由 $f(0) = -c < 0$，$f(y) \to +\infty(y \to +\infty)$，以及 $f'(y) = my^{m-1} - b$ 可知 $f(y)$ 在$(0, +\infty)$ 至多存在一个驻点，因此 $\forall b \in \mathbb{R}$，$f(y) = 0$ 总存在唯一正根 $\tilde{y}$. 可见代数方程(4) 均有唯一正解，从而方程(1) 存在 Hermite 正定解. 证毕.

下面针对矩阵 $\boldsymbol{B}$ 分别为正定、负定、不定 3 种情况，讨论矩阵方程(1) 的正定解的迭代求解方法，主要论述不同情况下迭代格式的构造及收敛性问题.

1.1 $\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵的情形

引理 2 设 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C} \in C^{n\times n}$ 都是正定矩阵，$b_1 = \lambda_{\max}(\boldsymbol{B})$，$b_n = \lambda_{\min}(\boldsymbol{B})$，$h_1 = \lambda_{\max}(\boldsymbol{C})$，$h_n = \lambda_{\min}(\boldsymbol{C})$，则方程 $x^m - b_1x - h_1 = 0$ 与 $x^m - b_nx - h_n = 0$ 均存在唯一正根 α,β，且 $\beta \leqslant \alpha$.

证 正根 α,β 的存在唯一性由引理 1 已证，下面证明 $\beta \leqslant \alpha$.

由 $x^m - b_1x - h_1 = 0$ 得 $x = \sqrt[m]{h_1 + b_1x}$，构造数列

$$\{u_k \mid u_k = \sqrt[m]{h_1 + b_1u_{k-1}},\ u_0 = 0\} \tag{5}$$

则$\{u_k\}$ 严格递增且 $u_k \leqslant \alpha$. 因此$\{u_k\}$ 收敛，且由(5) 式得 $\lim\limits_{k\to+\infty} u_k = \alpha$. 同理，构造数列

$$\{v_k \mid v_k = \sqrt[m]{h_n + b_nv_{k-1}},\ v_0 = 0\} \tag{6}$$

则$\{v_k\}$ 严格递增且 $v_k \leqslant \beta$. 因此$\{v_k\}$ 收敛，且由(6) 式得 $\lim\limits_{k\to+\infty} v_k = \beta$. 另一方面，由(5) 式和(6) 式可知 $v_k \leqslant u_k$，根据极限保号性立即可得 $\beta \leqslant \alpha$. 证毕.

现考虑矩阵方程

$$\boldsymbol{X}^m - \boldsymbol{B}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{XB}^{\frac{1}{2}} - \boldsymbol{C} = \boldsymbol{0} \tag{7}$$

其中 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C} \in C^{n\times n}$ 是正定矩阵且 $\boldsymbol{BC} = \boldsymbol{CB}$.

引理 3 方程(1) 与(7) 具有相同的且与 $\boldsymbol{B}$ 可交换的正定解.

证 若 $\boldsymbol{X}$ 是方程(1) 的正定解，则由引理 1 知 $\boldsymbol{BX} = \boldsymbol{XB}$，因此 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{X}$ 能同时酉对角化，即存在酉矩阵 $\boldsymbol{V} \in U^{n\times n}$，使得 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{VD}_B\boldsymbol{V}^*$，$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{VD}_X\boldsymbol{V}^*$，于是

$$\boldsymbol{B}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{XB}^{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{VD}_B^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{V}^*\boldsymbol{VD}_X\boldsymbol{V}^*\boldsymbol{VD}_B^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{V}^* = \boldsymbol{VD}_B^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{D}_X\boldsymbol{D}_B^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{V}^* = \boldsymbol{VD}_B\boldsymbol{D}_X\boldsymbol{V}^* = \boldsymbol{VD}_B\boldsymbol{V}^*\boldsymbol{VD}_X\boldsymbol{V}^* = \boldsymbol{BX}$$

即 $\boldsymbol{X}$ 也是方程(7) 的与 $\boldsymbol{B}$ 可交换的正定解. 反之，若 $\boldsymbol{X}$ 是方程(7) 的且与 $\boldsymbol{B}$ 可交换的正定解，则由 $\boldsymbol{B}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{XB}^{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{BX}$ 可知 $\boldsymbol{X}$ 也是方程(1) 的正定解. 证毕.

引理 4 设 α,β 是引理 2 给出的正数，则矩阵方程(7) 在 $\Omega = [\beta\boldsymbol{I}, \alpha\boldsymbol{I}]$ 内必存在正定解.

证 建立矩阵函数

$$F(\boldsymbol{X}) = \sqrt[m]{\boldsymbol{B}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{XB}^{\frac{1}{2}} + \boldsymbol{C}} \tag{8}$$

则由 $b_1 = \lambda_{\max}(\boldsymbol{B})$，$b_n = \lambda_{\min}(\boldsymbol{B})$，$h_1 = \lambda_{\max}(\boldsymbol{C})$，$h_n = \lambda_{\min}(\boldsymbol{C})$，$\forall \boldsymbol{X} \in \Omega$，有

$$F(\boldsymbol{X}) = \sqrt[m]{\boldsymbol{B}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{XB}^{\frac{1}{2}} + \boldsymbol{C}} \leqslant \sqrt[m]{\boldsymbol{B}^{\frac{1}{2}}\alpha\boldsymbol{B}^{\frac{1}{2}} + \boldsymbol{C}} \leqslant \sqrt[m]{b_1^{\frac{1}{2}}\alpha b_1^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{I} + h_1\boldsymbol{I}} = \sqrt[m]{(\alpha b_1 + h_1)\boldsymbol{I}} = \sqrt[m]{\alpha^m\boldsymbol{I}} = \alpha\boldsymbol{I}$$

且

$$F(X)=\sqrt[m]{B^{\frac{1}{2}}XB^{\frac{1}{2}}+C}\geqslant\sqrt[m]{B^{\frac{1}{2}}\beta B^{\frac{1}{2}}+C}\geqslant\sqrt[m]{b_n^{\frac{1}{2}}\beta b_n^{\frac{1}{2}}I+h_nI}=\sqrt[m]{(\beta b_n+h_n)I}=\sqrt[m]{\beta^m I}=\beta I$$

因此 $F(\Omega)\subset\Omega$. 根据 Brouwer 不动点定理，$X=F(X)$ 在$[\beta I,\alpha I]$内存在不动点 $\widetilde{X}$，即方程(7)在 Ω 内必存在正定解. 证毕.

利用函数(8)构造迭代格式

$$X_{k+1}=\sqrt[m]{B^{\frac{1}{2}}X_kB^{\frac{1}{2}}+C}\tag{9}$$

定理 1　设 $m\geqslant2$ 是正整数，$B,C\in C^{n\times n}$ 是正定矩阵，且 $BC=CB$，α,β 是引理 2 给出的两个正数，则 $\forall X_0=sI\in\Omega$，$\beta\leqslant s\leqslant\alpha$，迭代式(9)总收敛到方程(1)的正定解.

证　由引理 1 的证明过程可知，B,C 具有分解式(2)，令 $Y=U^*XU$，代入方程(7)可得相应的迭代格式

$$Y_{k+1}=\sqrt[m]{D_B^{\frac{1}{2}}Y_kD_B^{\frac{1}{2}}+D_C}\tag{10}$$

于是(9)式收敛等价于(10)式收敛. 当 $X_0=sI(\beta\leqslant s\leqslant\alpha)$ 时，$Y_0=sI$，这时迭代式(10)等价于

$$\begin{cases}y_{k+1}^{(i)}=\sqrt[m]{c_i+b_iy_k^{(i)}}\\ y_0^{(i)}=s\end{cases}\qquad i=1,2,\cdots,n\tag{11}$$

根据引理 2 的证明过程可知，数列$\{y_k^{(i)}\}(i=1,2,\cdots,n)$均收敛到一个正实数，从而(9)式收敛到方程(1)的正定解. 证毕.

根据定理 1 的证明过程可得方程(1)的 Hermite 正定解表达式.

推论 1　设 $m\geqslant2$ 是正整数，$B,C\in C^{n\times n}$ 是正定矩阵，且 $BC=CB$，则矩阵

$$\widetilde{X}=U\mathrm{diag}(p_1,p_2,\cdots,p_n)U^*\tag{12}$$

是方程(1)的正定解，其中 U 由分解式(2)所给出，$p_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是数列(11)的收敛点.

证　因为 p_i 是数列(11)的收敛点，所以 $p_i^m-b_ip_i-c_i=0(i=1,2,\cdots,n)$. 把矩阵(12)代入方程(1)左边，得

$$X^m-BX-C=U\mathrm{diag}(p_1^m,p_2^m,\cdots,p_n^m)U^*-UD_BU^*U\mathrm{diag}(p_1,p_2,\cdots,p_n)U^*-UD_CU^*=$$
$$U\mathrm{diag}(p_1^m-b_1p_1-c_1,p_2^m-b_2p_2-c_2,\cdots,p_n^m-b_np_n-c_n)U^*=0$$

即 $\widetilde{X}$ 是方程(1)的正定解.

注 1　根据前面的讨论可知，由定理 1 或推论 1 求出的正定解 $\widetilde{X}$ 满足矩阵不等式 $\beta I\leqslant\widetilde{X}\leqslant\alpha I$，其中 α,β 是引理 2 给出的正数.

注 2　当矩阵阶数 n 较大时，对矩阵 B,C 进行同时酉对角化较为困难，因此不便利用推论 1 中的公式(12)来计算方程(1)的正定解. 此时采用迭代公式(9)计算，只需估计 α 或 β 的近似值就可选取初始矩阵 $X_0=\alpha I$ 或 $X_0=\beta I$，大大降低计算难度. 实际上根据引理 2 知

$$\alpha^m-b_1\alpha-h_1=0\Rightarrow\alpha=\sqrt[m]{b_1\alpha+h_1}\geqslant\sqrt[m]{h_1}\Rightarrow\alpha\geqslant\sqrt[m]{b_1\sqrt[m]{h_1}+h_1}$$

因此，可选取 $X_0=(\sqrt[m]{b_1\sqrt[m]{h_1}+h_1})I$ 作为迭代式(9)的初始矩阵.

1.2　B 为负定矩阵的情形

首先指出，当 B 是负定矩阵，C 是正定矩阵时，引理 2 的结论仍然成立. 事实上，当 $B<0$，$C>0$ 时，有

$$b_1=\lambda_{\max}(B)<0\qquad b_n=\lambda_{\min}(B)<0\qquad h_1=\lambda_{\max}(C)>0\qquad h_n=\lambda_{\min}(C)>0$$

令 $g(x)=x^m+dx-h(d,h>0)$，则由 $g(0)=-h<0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$，以及 $\forall x\in(0,+\infty)$，$g'(x)=mx^{m-1}+d>0$，可知方程 $x^m-b_1x-h_1=0$ 与 $x^m-b_nx-h_n=0$ 分别存在唯一正根 μ,γ. 因此有 $\mu^m=b_1\mu+h_1$，$\gamma^m=b_n\gamma+h_n$. 倘若 $\gamma>\mu>0$，则 $\gamma^m>\mu^m>0$，所以有

$$b_n\gamma+h_n>b_1\mu+h_1\geqslant b_n\mu+h_1\Rightarrow(h_1-h_n)+b_n(\mu-\gamma)<0\tag{13}$$

另一方面，$(h_1-h_n)\geqslant0$，$b_n(\mu-\gamma)\geqslant0\Rightarrow(h_1-h_n)+b_n(\mu-\gamma)\geqslant0$，与(13)式矛盾，从而 $\gamma\leqslant\mu$. 这时，为迭代求解方程(1)，建立拟牛顿迭代格式如下：

$$\boldsymbol{X}_{k+1}=\boldsymbol{X}_k-[m\boldsymbol{X}_k^{m-1}-\boldsymbol{B}]^{-1}[\boldsymbol{X}_k^m+(-\boldsymbol{B})^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{X}_k(-\boldsymbol{B})^{\frac{1}{2}}-\boldsymbol{C}] \tag{14}$$

定理 2 设 $m\geqslant 2$ 是正整数，$\boldsymbol{B}<0$，$\boldsymbol{C}>0$ 且 $\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{CB}$，则 $\forall\,\boldsymbol{X}_0=t\boldsymbol{I}$，$\gamma\leqslant t\leqslant\mu$，迭代式(14) 总收敛到方程(1) 的正定解.

证 类似于定理 1 的证明过程，考虑到方程 $y^m+d_iy-c_i=0(d_i,c_i>0)$ 的牛顿迭代

$$\begin{cases} y_{k+1}^{(i)}=y_k^{(i)}-\dfrac{(y_k^{(i)})^m+d_iy_k^{(i)}-c_i}{m\,(y_k^{(i)})^{m-1}+d_i} & i=1,2,\cdots,n;\ k=0,1,\cdots \\ y_0^{(i)}=t & t\in\left(0,\dfrac{c_i}{d_i}\right) \end{cases} \tag{15}$$

所产生的数列$\{y_k^{(i)}\}(i=1,2,\cdots,n)$分别收敛到区间$\left(0,\dfrac{c_i}{d_i}\right)$内唯一正实数，且当$\gamma\leqslant t\leqslant\mu$时$t\in\left(0,\dfrac{c_i}{d_i}\right)$，于是迭代式(14) 总收敛到方程(1) 的正定解.

注 3 由定理 2 可知，当 $\boldsymbol{B}<0$，$\boldsymbol{C}>0$ 且 $\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{CB}$ 时，方程(1) 的正定解 $\hat{\boldsymbol{X}}$ 满足不等式 $\gamma\boldsymbol{I}\leqslant\hat{\boldsymbol{X}}\leqslant\mu\boldsymbol{I}$，其中 μ,γ 分别是 $x^m-b_1x-h_1=0$ 与 $x^m-b_nx-h_n=0$ 的唯一正根.

1.3 $\boldsymbol{B}$ 为不定矩阵的情形

当 $\boldsymbol{B}$ 是不定矩阵，$\boldsymbol{C}$ 是正定矩阵时，不妨设

$$b_1=\lambda_{\max}(\boldsymbol{B})>0 \qquad b_n=\lambda_{\min}(\boldsymbol{B})<0 \qquad h_1=\lambda_{\max}(\boldsymbol{C})>0 \qquad h_n=\lambda_{\min}(\boldsymbol{C})>0$$

利用前面 1.2 的方法，容易知道引理 2 的结论仍然成立. 也就是说方程 $x^m-b_1x-h_1=0$ 与 $x^m-b_nx-h_n=0$ 分别存在唯一正根 σ,τ，且 $\tau\leqslant\sigma$. 这时可把方程(1) 改写为

$$\boldsymbol{X}^m-\boldsymbol{X}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}^{\frac{1}{2}}-\boldsymbol{C}=\boldsymbol{0} \tag{16}$$

根据方程(16) 建立新的拟牛顿迭代格式

$$\boldsymbol{X}_{k+1}=\boldsymbol{X}_k-[m\boldsymbol{X}_k^{m-1}-\boldsymbol{B}]^{-1}[\boldsymbol{X}_k^m-\boldsymbol{X}_k^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_k^{\frac{1}{2}}-\boldsymbol{C}] \tag{17}$$

定理 3 设 $m\geqslant 2$ 是正整数，$\boldsymbol{B}$ 是 Hermite 矩阵，$\boldsymbol{C}>\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{CB}$，则 $\forall\,\boldsymbol{X}_0=t\boldsymbol{I}$，$\tau\leqslant t\leqslant\sigma$，迭代式(17) 总收敛到方程(1) 的正定解.

证 由前面的讨论可知，我们只需考虑方程 $y^m-b_iy-c_i=0(c_i>0,\ b_i\in\mathbb{R})$ 的牛顿迭代

$$y_{k+1}^{(i)}=y_k^{(i)}-\frac{(y_k^{(i)})^m-b_iy_k^{(i)}-c_i}{m\,(y_k^{(i)})^{m-1}-b_i} \qquad i=1,\cdots,n;\ k=0,1,\cdots \tag{18}$$

对于初值 $y_0^{(i)}=t$ 的收敛性.

当 $b_i<0$ 时，由(15) 式可知对 $\forall\,t\in\left(0,\dfrac{c_i}{|b_i|}\right)$，迭代式(18) 收敛；

当 $b_i=0$ 时，显然对 $\forall\,t\in(0,\sqrt[m]{c_i})$，迭代式(18) 收敛；

当 $b_i>0$ 时，由注 2 可知对 $\forall\,t\in(0,\sqrt[m]{b_i\sqrt[m]{c_i}+c_i})$，迭代式(18) 收敛.

又因为

$$\frac{c_i}{|b_i|}\geqslant\frac{h_n}{|b_n|} \qquad \sqrt[m]{b_i\sqrt[m]{c_i}+c_i}\geqslant\sqrt[m]{c_i}\geqslant\sqrt[m]{h_n}$$

其中 $b_n=\lambda_{\min}(\boldsymbol{B})<0$，$h_n=\lambda_{\min}(\boldsymbol{C})>0$. 令 $\delta=\min\left\{\dfrac{h_n}{|b_n|},\sqrt[m]{h_n}\right\}$，则当 $t\in(0,\delta)$ 时，迭代式(18) 的所有数列$\{y_k^{(i)}\}$都收敛. 所以选取 $\boldsymbol{X}_0=t\boldsymbol{I}$，迭代式(17) 总收敛到方程(1) 的正定解.

2 数值算例

例 1 给定两个 n 阶 Hermite 正定矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & \mathrm{i} & & \\ -\mathrm{i} & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \mathrm{i} \\ & & -\mathrm{i} & 2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 5 & 1.2\mathrm{i} & & \\ -1.2\mathrm{i} & 5 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1.2\mathrm{i} \\ & & -1.2\mathrm{i} & 5 \end{pmatrix}$$

试求方程 $\boldsymbol{X}^5-\boldsymbol{BX}-\boldsymbol{C}=\boldsymbol{0}$ 的 Hermite 正定解.

解　对任意正整数 n 直接验证可知 $\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{CB}$，因此由引理 1 知方程 $\boldsymbol{X}^5-\boldsymbol{BX}-\boldsymbol{C}=\boldsymbol{0}$ 存在 Hermite 正定解.

对于 $\boldsymbol{B}>\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{C}>\boldsymbol{0}$，可采用(9)式建立迭代格式. 根据 Getschgorin 圆盘定理，$\boldsymbol{B}$ 的特征值 b_i 分布在圆盘 $|\lambda-2|\leqslant 2$ 内的实轴上，$\boldsymbol{C}$ 的特征值 c_i 分布在圆盘 $|\lambda-5|\leqslant 2.4$ 内的实轴上. 由于 $\sqrt[5]{2\cdot\sqrt[5]{5}+5}\approx 1.5$，根据定理 1 的注 2，迭代初始矩阵可选取为 $\boldsymbol{X}_0=1.5\boldsymbol{I}$，因此有

$$\begin{cases}\boldsymbol{X}_{k+1}=\sqrt[5]{\boldsymbol{B}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{B}^{\frac{1}{2}}+\boldsymbol{C}}\\ \boldsymbol{X}_0=1.5\boldsymbol{I}\end{cases}$$

当 $n=5$ 时，计算结果为

$$\widetilde{\boldsymbol{X}}=\begin{pmatrix}1.5029 & 0.1162\mathrm{i} & 0.0147 & -0.0028\mathrm{i} & -0.0006\\ -0.1162\mathrm{i} & 1.4882 & 0.1190\mathrm{i} & 0.0153 & -0.0028\mathrm{i}\\ 0.0147 & -0.1190\mathrm{i} & 1.4876 & 0.1190\mathrm{i} & 0.0147\\ 0.0028\mathrm{i} & 0.0153 & -0.1190\mathrm{i} & 1.4882 & 0.1162\mathrm{i}\\ -0.0006 & 0.0028\mathrm{i} & 0.0147 & -0.1162\mathrm{i} & 1.5029\end{pmatrix}$$

用 error $=\|\boldsymbol{X}_k^5-\boldsymbol{BX}_k-\boldsymbol{C}\|_\infty$ 表示第 k 次近似解的余项，iter 表示迭代次数，time 表示运行时间，当 $n=100,500,1\,000$ 时，计算结果见表 1.

取 $\widetilde{\boldsymbol{B}}=-\boldsymbol{B}$，则 $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ 是一个 Hermite 负定矩阵. 对于 $\widetilde{\boldsymbol{B}}<\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{C}>\boldsymbol{0}$ 可采用迭代(14)来求方程 $\boldsymbol{X}^5-\widetilde{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{X}-\boldsymbol{C}=\boldsymbol{0}$ 的正定解. 根据 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 的特征值分布和定理 2 证明过程中(15)式可知，迭代初始矩阵可选取为 $\boldsymbol{X}_0=1.25\boldsymbol{I}$，因此有

$$\begin{cases}\boldsymbol{X}_{k+1}=\boldsymbol{X}_k-[5\boldsymbol{X}_k^4+\boldsymbol{B}]^{-1}[\boldsymbol{X}_k^5+\boldsymbol{B}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{B}^{\frac{1}{2}}-\boldsymbol{C}]\\ \boldsymbol{X}_0=1.25\boldsymbol{I}\end{cases}$$

当 $n=5$ 时，计算结果为

$$\hat{\boldsymbol{X}}=\begin{pmatrix}1.2090 & -0.0007\mathrm{i} & -0.0001 & 0 & 0\\ 0.0007\mathrm{i} & 1.2090 & -0.0007\mathrm{i} & -0.0001 & 0\\ -0.0001 & 0.0007\mathrm{i} & 1.2090 & -0.0007\mathrm{i} & -0.0001\\ 0 & -0.0001 & 0.0007\mathrm{i} & 1.2090 & -0.0007\mathrm{i}\\ 0 & 0 & -0.0001 & 0.0007\mathrm{i} & 1.2090\end{pmatrix}$$

当 $n=100,500,1\,000$ 时，计算结果见表 1.

表 1　3 种情况迭代计算结果

	矩阵阶数 n	iter	error	time/s
$\boldsymbol{B}$ 正定 采用迭代式(9)	100	7	5.5279×10^{-8}	0.250 0
	500	7	5.5282×10^{-8}	7.329 0
	1 000	7	5.5286×10^{-8}	45.099 0
$\boldsymbol{B}$ 负定 采用迭代式(14)	100	2	1.6173×10^{-9}	0.156 0
	500	2	1.6177×10^{-9}	1.109 0
	1 000	2	1.6184×10^{-9}	7.157 0
$\boldsymbol{B}$ 不定 采用迭代式(17)	100	5	1.5061×10^{-8}	0.232 0
	500	5	1.5061×10^{-8}	7.681 0
	1 000	5	1.5062×10^{-8}	53.132 0

表 1 结果显示，本文所给 3 种迭代用较少迭代次数均能达到预设误差精度，表明敛速较高.

给出一个不定矩阵如下：

$$\hat{\boldsymbol{B}}=\begin{pmatrix}0.5 & \mathrm{i} & & \\ -\mathrm{i} & 0.5 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \mathrm{i} \\ & & -\mathrm{i} & 0.5\end{pmatrix}$$

对于不定矩阵$\hat{\boldsymbol{B}}$及$\boldsymbol{C}>\boldsymbol{0}$，可采用迭代式(17)来求方程$\boldsymbol{X}^5-\hat{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{X}-\boldsymbol{C}=\boldsymbol{0}$的正定解．由于$\hat{\boldsymbol{B}},\boldsymbol{C}$的特征值范围是$-1.5\leqslant\lambda(\hat{\boldsymbol{B}})\leqslant 2.5$，$2.6\leqslant\lambda(\boldsymbol{C})\leqslant 7.4$，根据定理3的证明过程可知，迭代初始矩阵可选取为$\boldsymbol{X}_0=\delta\boldsymbol{I}$，其中$\delta=\min\left\{\frac{h_n}{|b_n|},\ \sqrt[m]{h_n}\right\}\approx\min\left\{\frac{2.6}{1.5},\ \sqrt[5]{2.6}\right\}\approx 1.2$，因此有

$$\begin{cases}\boldsymbol{X}_{k+1}=\boldsymbol{X}_k-[5\boldsymbol{X}_k^4-\boldsymbol{B}]^{-1}[\boldsymbol{X}_k^5-\boldsymbol{X}_k^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_k^{\frac{1}{2}}-\boldsymbol{C}] \\ \boldsymbol{X}_0=1.2\boldsymbol{I}\end{cases}$$

当$n=5$时，计算结果为

$$\hat{\boldsymbol{X}}=\begin{pmatrix}1.3957 & 0.1424\mathrm{i} & 0.0222 & -0.0050\mathrm{i} & -0.0012 \\ -0.1424\mathrm{i} & 1.3735 & 0.1474\mathrm{i} & 0.0234 & -0.0050\mathrm{i} \\ 0.0222 & -0.1474\mathrm{i} & 1.3723 & 0.1474\mathrm{i} & 0.0222 \\ 0.0050\mathrm{i} & 0.0234 & -0.1474\mathrm{i} & 1.3735 & 0.1424\mathrm{i} \\ -0.0012 & 0.0050\mathrm{i} & 0.0222 & -0.1424\mathrm{i} & 1.3957\end{pmatrix}$$

当$n=100,500,1\,000$时，计算结果见表1.

3 结　论

非线性系统(1)是一个非对称m次矩阵方程，本文在$\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$为Hermite矩阵且$\boldsymbol{C}$正定的条件下讨论了它的正定解．给出了方程(1)有正定解的充要条件及其解的存在区间．针对矩阵$\boldsymbol{B}$分别为正定、负定、不定3种情况建立相应的迭代格式，并结合代数方程的特点证明了它们的收敛性．其中迭代式(9)充分利用了迭代序列的严格单调性，迭代式(14)根据矩阵函数求导恒正的特点建立了拟牛顿算法，迭代式(17)通过把$\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}$转化成$\boldsymbol{X}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}^{\frac{1}{2}}$克服了对不定矩阵$\boldsymbol{B}$开方的障碍．根据3种迭代的特点分析给出初始矩阵的选取方法．数值算例表明，本文所给方法对求解非线性系统(1)可行、有效.

参考文献：

[1] HIGHAM N J, KIM H M. Numerical Analysis of a Quadratic Matrix Equation [J]. IMA J Numer Anal, 2000, 20(4): 499-519.

[2] BAI Z Z, GAO Y H. Modified Bernoulli Iteration Methods for Quadratic Matrix Equation [J]. J Comput Math, 2007, 25(5): 498-511.

[3] LONG J H, HU X Y, ZHANG L. Improved Newton's Method with Exact Line Searches to Solve Quadratic Matrix Equation [J]. J Comput Appl Math, 2008, 222(2): 645-654.

[4] KIM Y J, KIM H M. Diagonal Update Method for a Quadratic Matrix Equation [J]. Appl Math Comput, 2016, 283: 208-215.

[5] LIU L D. Perturbation Analysis of a Quadratic Matrix Equation Associated with an M-Matrix [J]. J Comput Appl Math, 2014, 260: 410-419.

[6] 蓝家新，黄敬频，王　敏，等. 四元数矩阵方程$AXB+CXD=E$的M自共轭解[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2019, 44(8): 1-6.

[7] 苏仰锋，张开军，刘明李. 二次矩阵方程最大最小解存在的充分条件[J]. 复旦学报(自然科学版), 2004, 43(3): 303-306.

[8] 尤俊丽，廖安平，段雪峰. 二次矩阵方程$X^2-bX-C=0$的正定解[J]. 大学数学, 2012, 28(3): 101-103.

[9] LU L Z, AHMED Z, GUAN J R. Numerical Methods for a Quadratic Matrix Equation with a Nonsingular M-Matrix [J]. Appl Math Lett, 2016, 52: 46-52.

[10] 周　磊，肖小庆，孙婷婷. 一类非线性系统状态的网络化估计方法[J]. 西南大学学报(自然科学版), 2018, 40(1):

149-156.

[11] 姚合军. 一类时延网络控制系统的有限时间镇定 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2018，40(7)：153-158.

[12] VORONTSOV Y O，IKRAMOV K D. Numerical Algorithm for Solving Quadratic Matrix Equations of a Certain Class [J]. Comput Math Math Phy，2014，54(11)：1643-1646.

[13] ADAM M S I，DING J，HUANG Q L，et al. Solving a Class of Quadratic Matrix Equations [J]. Appl Math Lett，2018，82：58-63.

[14] CHEN C R，LI R C，MA C F. Highly Accurate Doubling Algorithm for Quadratic Matrix Equation from Quasi-Birth-and-Death Process [J]. Linear Algebra Appl，2019，583：1-45.

[15] 张千宏，徐昌进. 一个非线性差分方程组解的表现[J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2010，35(4)：55-58.

[16] 崔晓梅，谭丽辉，赵世佳. 矩阵方程 $X-A^*X^{-1}A+B^*X^{-2}B=I$ 正定解存在的充分条件[J]. 数学学报(中文版)，2014，57(5)：973-980.

Hermite Positive Definite Solution of Nonlinear Complex System $\boldsymbol{X^m-BX-C=0}$

HUANG Jing-pin，　XIONG　Hao，　ZHANG Shan-shan

College of Science，Guangxi University for Nationalities，Nanning 530006，China

Abstract：Nonlinear matrix equations are widely used in fields of control theory，dynamic programming，ladder networks，and stochastic filtering. The Hermite positive definite solution of the m－th asymmetric complex system $\boldsymbol{X}^m-\boldsymbol{BX}-\boldsymbol{C}=\mathbf{0}(m\geqslant 2)$ under the certain conditions has been discussed. The necessary and sufficient conditions for the existence of positive definite solutions of this system have been given，and the roots of two algebraic equations been used on the based on minimax eigenvalues of the coefficient matrices and Brouwer fixed point theorem，the existence interval of positive definite solution is obtained. In order to use the iterative method to find the positive definite solution of the system，a nonlinear system has been given with the same solution and symmetric structure. Then，the three iterative schemes corresponding to B are positive definite，negative definite and indeterminate are constructed respectively，and by the properties of the relative algebraic equations，the convergence of these iterations are proved. At the same time，according to the features of each iteration，the selection method of iteration initial matrix is given. Finally，a simulation example is given to illustrate the validity and feasibility of the method.

Key words：nonlinear complex system；Hermite positive definite solution；existence；iterative algorithm

责任编辑　廖　坤