

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2020.10.019

义务教育数学教材内容的螺旋式编写特点研究

——以轴对称为例^①

宋运明¹, 宋乃庆²

1. 贵州师范大学 数学科学学院, 贵州 贵安新区 550025; 2. 西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715

摘要: 采用内容分析法, 从内容广度、螺旋间隔和内容深度3个维度对现行6个版本的义务教育数学教材中轴对称内容的螺旋式编写特点进行研究, 发现: 随着学段递升, 各版教材中螺旋式内容的广度或深度基本上都有实质性的增加, 同一版本教材中不同知识内容及不同版本教材中的同一知识内容在螺旋间隔上差异较大. 提出反思建议: 某些教材的基本观念需要适度渗透与螺旋, 学科逻辑与年龄特征应当兼顾, 各个螺旋之间需考虑有效衔接.

关键词: 数学教材; 螺旋式; 编写特点; 轴对称; 内容分析法

中图分类号: G624

文献标志码: A

文章编号: 1000-5471(2020)10-0129-06

直线式与螺旋式是课程与教材内容组织的两种基本形式. 直线式较为注重学科逻辑, 可以引导学生快速直接地达到知识目标, 为一些学科专家所青睐, 但对学生的认识特点关注不够. 螺旋式相对于直线式, 虽然内容上有一定重复, 但可以分散知识学习的困难, 容易照顾到学生的认识特点, 加深其对学科的理解^[1]. 近年来, 教材编写者依据课程标准(教学大纲)与自身理解, 选择小学和初中数学中的许多重要内容进行了螺旋式编写, 如分数、平行四边形、轴对称等. 基于现行教材内容分析可作出如下界定: 某一知识内容的螺旋式编写是指该知识内容在教材的不同学段、不同单元(章)或不同小节中重复出现, 逐渐增加广度或深度, 即教材后面的内容作为前面内容的扩展或深化, 与其他知识内容以交叉递进的方式前进. 然而在实践中发现, 不少教师在理解和使用数学教材中的螺旋式内容时存在困惑, 对其中的螺旋式理念认识不到位, 难以把握每个阶段的教学要求. 现行教材中一些螺旋式内容的编写尚存优化空间.

几何变换是对物体运动的抽象, 使得几何学由静态转向动态, 是学生认识图形的工具, 还可以作为论证的一种手段^[2]. 轴对称是现代数学中几何变换的重要组成部分, 在义务教育阶段的图形与几何领域具有突出地位, 具备较高的学科价值与核心素养发展价值. 我国现行数学教材编写者将其编排在义务教育的三个学段, 较好地体现了螺旋式编排理念. 因而本研究尝试以内容分析法为主要研究方法, 以轴对称内容为例, 探析义务教育阶段数学教材内容的螺旋式编写特点, 并进行深度反思, 希望能对数学教材中螺旋式内容尤其是轴对称的理解、使用与编写提供参考.

① 收稿日期: 2020-07-03

基金项目: 贵州师范大学2015年博士科研启动项目(12004).

作者简介: 宋运明(1980-), 男, 副教授, 博士, 主要从事数学课程与教材的研究.

通信作者: 宋乃庆, 教授.

1 研究设计

1.1 研究对象

教育部公布的《2019 年义务教育国家课程教学用书目录》^[3]中的六三制数学教材, 1—6 年级(小学)有 7 个版本, 7—9 年级(初中)有 10 个版本. 为保持所研究数学教材内容的连续性, 更好刻画其螺旋式编写特点, 本研究从中选择既出版小学数学教材、又出版初中数学教材的 6 家出版社出版的义务教育数学教材作为研究对象. 它们分别由北京出版社、北京师范大学出版社、河北教育出版社、凤凰出版传媒股份有限公司(江苏凤凰教育出版社和江苏科学技术出版社是其旗下成员, 分别出版小学和初中数学教材)、青岛出版社和人民教育出版社出版. 将这 6 个版本不分先后, 模糊地简称为 A 版、B 版、C 版、D 版、E 版和 F 版. 1—3 年级、4—6 年级、7—9 年级分别为第一学段、第二学段和第三学段. 研究以课堂练习(在不同版本或册别教材中名称不同)为标志, 把小节作为分析单位. 只分析聚焦于轴对称内容的章或单元中的小节. 在这些小节中, 仅分析正文及课堂练习. 各版教材含轴对称内容的册次、单元(章)数目和小节数目等信息见表 1, 其中一年级下册, 简称“一下”, 其他册次类似.

表 1 各版教材含轴对称内容的具体信息

信息类别	A 版	B 版	C 版	D 版	E 版	F 版
册次(出版年)	二下(2015)	二上(2013)	三上(2014)	三上(2014)	三下(2015)	二下(2013)
	四下(2015)	三下(2014)	五下(2014)	四下(2014)	五上(2015)	四下(2014)
	八上(2014)	五上(2014)	八上(2013)	八上(2013)	八上(2013)	八上(2013)
	九下(2016)	七下(2013)	八下(2013)			
		八上(2014)				
单元(章)数目	4	5	4	4	3	3
小节数目	7	8	7	6	6	6

1.2 分析框架

孔凡哲认为课程的螺旋式上升可以从深度、广度、应用等维度予以实现^[4]. 课程标准在教材编写建议中的螺旋上升是指在深度、广度等方面都要有实质性的变化^[5]. 螺旋间隔是数学教材内容螺旋式编写的骨架. 因此, 基于前文螺旋式编写的界定, 对照研究对象的实际状况, 分析框架可分为内容广度、螺旋间隔和内容深度 3 个一级维度.

1.2.1 内容广度

依据文献[6-7]对知识团和知识点的界定, 分析可得 6 个版本教材中轴对称内容有 16 个知识点, 组成 3 个知识团: 概念、性质和绘图方法. ①概念: G_1 ——对称, G_2 ——轴对称图形, G_3 ——两个图形关于某直线成轴对称, G_4 ——轴对称变换, G_5 ——对称轴, G_6 ——对应点(对称点), G_7 ——对应边(线段), G_8 ——对应角. ②性质: 轴对称图形的两个对称部分, 或关于某直线对称的两个图形(以下简称轴对称的图形), X_1 ——形状、大小相同, X_2 ——全等, X_3 ——新图形上的每一点都是原图形上某一点关于对称轴的对称点, X_4 ——对应点所连线段被对称轴垂直平分, X_5 ——对应边(线段)长度相等, X_6 ——对应角相等. ③绘图方法(轴对称的图形): F_1 ——找到并画出对称轴, F_2 ——辨认或绘制轴对称的图形.

在教材中设置适当的数学活动引导学生去感悟知识点的本质, 却不明确它们的定义或界定, 知识点的这种教材呈现形态称为隐性形态. 若教材中呈现了知识点的明确定义或界定, 则称该知识点的教材呈现形态为显性形态. 在对某一知识点编码时, 仅对该知识点的显性形态或者它的第一次显性形态出现之前的隐性形态编码. 研究将从学段层面中知识点的个数来分析轴对称的内容广度.

1.2.2 螺旋间隔

从整个主题和其中的重复知识点两个层面来分析教材中轴对称知识内容的螺旋间隔特点. 该维度包括螺旋起点、螺旋数目和间隔时间 3 个二级维度. 其中, 知识内容的螺旋起点指起始学期(每册教材代表 1 个学期).

针对某版教材中的轴对称知识主题, 含轴对称的 1 个单元或章称为轴对称的 1 次螺旋(不存在连续的含轴对称的单元(章)), 单元数与章数之和称为轴对称主题在该版教材中的螺旋数. 在 1 个单元(章)呈现的含有某一知识点的所有小节中, 若有几个小节是连续的, 则认为这几个小节对该知识点进行了直线式编写; 若存在 2 个小节被不含该知识点的小节分割, 则视为此单元对该知识点进行了螺旋式编写. 含有该知识点的相对独立的 1 个小节或几个按直线式编写的小节称为该知识点的 1 次螺旋. 在 1 次螺旋中重复出现的知识点只编码 1 次. 一个知识点在某版教材中的螺旋数是它在该版所有单元与章中的螺旋数之和.

相邻 2 次螺旋的间隔时间以学期为单位计量, 学期数即是其所在册次之间的册数(不含所在册), 若不足 1 学期, 则忽略其间隔时间. 为突出重点, 间隔时间仅分析教材中相邻螺旋间的最长间隔时间.

1.2.3 内容深度

该维度仅对重复知识点在不同螺旋阶段所需的思维深度变化进行分析. 思维深度很难量化, 与涉及到的呈现形式、知识点之间的关联度等方面有关^[4]. 具体知识点思维深度的影响因素需要具体分析.

2 研究结果与分析

2.1 内容广度

A 版、B 版、C 版、D 版、E 版和 F 版 6 个版本(简称 6 个版本)教材的知识点总数分别为: 10, 11, 13, 9, 10 和 11. 在第一学段, 6 个版本的知识点个数范围是 3~5, 交集中有 G_2 和 F_2 两个知识点. 在第二学段, 6 个版本的知识点个数范围是 4~5, 交集中有 G_6 , F_1 和 F_2 3 个知识点. 在第三学段, 6 个版本的知识点个数范围是 8~12, 交集中有 G_2 , G_3 , G_5 , G_6 , X_4 和 F_2 6 个知识点. 各版教材中轴对称的知识点个数基本上随着学段的升高而增多, 广度增加. 轴对称的概念、性质和绘图方法的基本结构整体上随着学段的升高, 不断得到丰富和拓广.

2.2 螺旋间隔

就整个轴对称主题而言, 除 D 版外, 其他 5 版中含主题的册数即是其螺旋数. 在 6 个版本教材轴对称的各小节中, 重复的知识点有 G_1 , G_2 , G_3 , G_5 , G_6 , X_4 , F_1 , F_2 ; 考虑到知识点在知识主题中的重要程度及其螺旋式特点的鲜明程度, 研究仅对 G_2 , X_4 , F_2 3 个知识点的螺旋间隔及内容深度变化进行分析. 轴对称主题及 3 个知识点的螺旋起点、螺旋数目和最长间隔时间(单位是学期)的具体信息见表 2.

表 2 各版教材轴对称主题及 3 个知识点的螺旋间隔

知识内容	螺旋起点						螺旋数目						最长间隔时间					
	A 版	B 版	C 版	D 版	E 版	F 版	A 版	B 版	C 版	D 版	E 版	F 版	A 版	B 版	C 版	D 版	E 版	F 版
主题	二下	二上	三上	三上	三下	二下	4	5	4	4	3	3	6	4	4	6	5	6
G_2	二下	二上	三上	三上	三下	二下	3	3	2	2	3	2	10	7	9	9	5	10
X_4	八上	五上	五下	八上	八上	四下	2	3	4	2	1	3	2	4	4	0	0	6
F_2	二下	二上	三上	三上	三下	二下	4	5	5	4	3	4	6	4	4	6	5	6

总体而言, 同一版本教材中的不同知识内容及不同版本教材中的同一知识内容在螺旋起点、螺旋数目和最长间隔时间维度的编写上存在较大差异. 6 版教材中, 轴对称知识主题的螺旋起点均在第一学段; 螺旋数目的平均值约为 3.8, 最多是 5; 最长间隔时间的平均值约为 5.2 个学期. G_2 , X_4 , F_2 3 个知识点的螺

螺旋起点分别为第一学段、第二或第三学段、第一学段；螺旋数目的平均值分别是 2.5, 2.5, 4.2；最长间隔时间的平均值分别约为 8.3, 2.7, 5.2 个学期。螺旋式内容的螺旋起点、螺旋数目和最长间隔时间与知识的复杂性、学生对其熟悉程度等因素有关。比如，3 个知识点中， F_2 的螺旋数目最多，可能与其较为复杂有关； G_2 的起点较早和最长间隔时间最长，可能与其不太复杂且对学生较为熟悉有关。

2.3 内容深度

2.3.1 轴对称图形

教材中概念与性质的呈现可以通过形成、描述和应用 3 个阶段来刻画。 G_2 螺旋内容的深度变化主要体现在描述阶段。文献[8]将数学定义的形式分为名义定义和实质定义，比如，“像这样剪出来的图形都是对称的，它们都是轴对称图形”为名义定义，“如果一个平面图形沿一条直线折叠后，直线两旁的部分能够互相重合，那么这个图形叫做轴对称图形”是实质定义。 G_2 的描述可分为无描述、名义定义和实质定义 3 种。而实质定义的描述也有深度区别，包括蕴含“直线(对称轴)”和“轴对称(变换)”2 类。上述情况所需思维深度依次加深。据此可得，6 个版本中有 5 个版本 G_2 的相邻螺旋间的描述都有明显的深度差异，即各个螺旋的深度均比上一次呈现加深。

2.3.2 对应点所连线段被对称轴垂直平分

X_4 螺旋的深度变化也主要体现在描述阶段。它的描述可分为 3 种形态：方格图中的特例描述、空白平面上的抽象描述、坐标系中的解析描述。所需思维深度依次加深，比如结合相应图形阐明，“点 A 和 A' 到对称轴的距离都是 2 个方格，点 B 和 B' 到对称轴的距离都是 4 个方格”为方格图中的特例描述；“如果两个图形关于某一条直线成轴对称，那么对应点所连的线段被对称轴垂直平分”是空白平面上的抽象描述；“关于 x 轴对称的两点，横坐标相等，纵坐标互为相反数；关于 y 轴对称的两点，横坐标互为相反数，纵坐标相等”是坐标系中的解析描述。据分析，各版教材中， X_4 各个螺旋的深度均比上一次呈现增加。比如，C 版在五下的呈现为方格图中的特例描述，八上的螺旋是空白平面上的抽象描述，八下的两次螺旋均为坐标系中的解析描述。第一次偏重于“点”，第二次偏重于“图形”。

2.3.3 辨认或绘制轴对称的图形

影响 F_2 深度的因素主要有 2 个。一是图形种类，包括一个轴对称图形和两个成轴对称的图形。二是辨认或绘图方式，包括辨认或欣赏、动手操作(剪、扎等)、在方格图上画、在空白平面上画、在坐标系中画。上述 2 个影响因素的各个类目所需思维层次均依次加深。分析发现，每个版本中 F_2 的各个螺旋的深度均比上一次呈现加深。

3 结论与反思

3.1 主要结论

由上述结果及分析可知，6 个版本数学教材中轴对称内容的编写较好地落实了螺旋上升的原则，具体表现在：(1)随着学段的升高，轴对称内容的广度增加，概念、性质和绘图方法的基本结构整体上得到丰富和拓广。(2)同一版本教材中不同知识内容及不同版本教材中的同一知识内容在螺旋起点、螺旋数目和间隔时间维度的编写上差异较大。(3) G_2 、 X_4 和 F_2 3 个知识点的绝大多数螺旋的深度均比上一次呈现加深。

3.2 反思

3.2.1 基本观念需要适度渗透与螺旋

布鲁纳在螺旋式课程的论述中倡导基本观念的螺旋^[9]，这里的基本观念在数学学科里很大程度上指的是数学思想方法。数学思想方法的深刻领悟对学生的数学学习乃至终身可持续发展有着重要影响。6 个版本中有 5 个版本(含 A 和 E 版)在第一学段通过对称引入 G_2 ，引导学生从生活空间中的对称走向抽象平面

中的轴对称,有利于他们对变换思想感受得更加自然和真实.在第三学段,A和E版呈现了轴对称(变换),并编写了应用其解决平面几何问题的例题,让几何变换的“使得几何学由静态转向动态,是学生认识图形的工具,还可以作为论证的一种手段”的功能得以凸显.A和E版教材中的这些内容对变换的数学思想方法进行了较为明显地渗透与螺旋,能够促进学生对其体验得更加深刻,进而提升几何直观和空间观念等数学核心素养,值得借鉴.

3.2.2 学科逻辑与年龄特征应当兼顾

与直线式课程相比,螺旋式课程是一种更高级的课程组织形式,组织的难度更大.直线式课程主要是根据学科知识的逻辑体系展开的.螺旋式课程则不仅反映学科的逻辑体系,而且还需将学科逻辑和学生的年龄特征有机结合起来^[10].各版教材在3个学段对轴对称进行了螺旋式编写,每个螺旋的呈现形式基本符合学生的年龄特征,体现出教材的螺旋式编写较为重视学生的认知特点.在教材的第二学段, X_4 是“在方格图中补全轴对称图形”(即 F_2)的直接依据.然而,有3版教材在此学段的螺旋中没有呈现它,导致教师在教 F_2 时只能把 G_2 勉强作为绘图依据或另外补充 X_4 ,造成了教材中概念、性质和绘图方法基本结构的逻辑断裂.另外3版以方格图中的特例描述即隐性形态编写了 X_4 ,使得整个螺旋内容的逻辑与学生年龄特征得到有效兼顾,值得肯定.

3.2.3 各个螺旋之间需考虑有效衔接

在数学教材内容的螺旋式编写中,加强相邻螺旋之间的有效衔接对学生获得深刻的经验,加深基本概念、基本结构等的理解进而增强学习累积效应是十分必要的.比如,重视一个螺旋内容对上一次呈现的适度重复和基本结构的顺承.在第三学段,D版教材把空白平面中的轴对称和坐标系中的轴对称两部分内容分别编写在先后不连续的两章中,引导学生通过两段时间螺旋式地学习轴对称.对于前部分内容,教材的结构是先呈现 X_4 ,后呈现 F_2 .对于后部分内容,教材展示的结构是先引导写出对称图形中对应点的坐标,可以视为 F_2 (但此前并未说明写出对应点坐标的依据是 X_4),然后再引导学习 X_4 .此处轴对称内容的编写不仅与空白平面中的轴对称的结构不同,同时也违背了学生的认知顺序,建议改进.使得“从性质到绘图方法”的逻辑结构在空白平面中的轴对称和坐标系中的轴对称两部分内容中得以顺承,螺旋间的衔接变得自然.

数学教材的一些重要、复杂或抽象的内容需要螺旋式编写,已成为广大教材编写者的共识.但在教材编写中如何适度渗透基本观念,恰当处理学科逻辑和学生年龄特征的关系,有效衔接各个螺旋,进而更好发挥教材的引教导学作用,需要教材编写者与研究者等的共同努力.

参考文献:

- [1] 施良方.课程理论——课程的基础、原理与问题[M].北京:教育科学出版社,1996:119.
- [2] 张奠宙,沈文选.中学几何研究[M].北京:高等教育出版社,2006:118.
- [3] 中华人民共和国教育部.教育部办公厅关于印发2019年中小学教学用书目录的通知[EB/OL].[2019-09-20].http://www.moe.gov.cn/srcsite/A26/moe_714/201906/t20190605_384649.html.
- [4] 孔凡哲.基础教育新课程中“螺旋式上升”的课程设计和教材编排问题探究[J].教育研究,2007,27(5):62-68.
- [5] 中华人民共和国教育部.义务教育数学课程标准(2011年版)[M].北京:北京师范大学出版社,2012:62.
- [6] 史宁中,孔凡哲,严家丽,等.十国高中数学教材的若干比较研究及启示[J].外国教育研究,2015,42(10):106-116.
- [7] 韩健,熊军,亢红道.对我国大陆地区与台湾地区现行初中数学教材的分析比较[J].数学通报,1990,29(11):3-9.
- [8] 史宁中.试论数学推理过程的逻辑性——兼论什么是有逻辑的推理[J].数学教育学报,2016,25(4):1-16.
- [9] (美)J. S. 布鲁纳.布鲁纳教育论著选[M].邵瑞珍,张渭城,等,译.北京:人民教育出版社,2018:27-28.
- [10] 张华.课程与教学论[M].上海:上海教育出版社,2000:303.

Research on the Spiral Writing Features of Mathematical Textbook Content in Compulsory Education Stage ——Taking Axis Symmetry as an Example

SONG Yun-ming¹, SONG Nai-qing²

1. School of Mathematical Sciences, Guizhou Normal University, Guiyan new district Guizhou 550025, China;

2. School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: The research on the spiral writing characteristics of mathematics textbook contents is carried out, in which axis symmetry content in the 6 editions mathematics textbooks being used in compulsory education stage is the study object and content analysis is adopted from the three dimensions of content breadth, spiral interval and content depth. The results found are as followed. With the rise of the school stage, the breadth or depth of the spiral content in each edition of the textbooks has basically increased substantially. The different knowledge content in the same version of the textbooks and the same knowledge content in the different version of the textbooks are quite different in the spiral interval. In some textbooks, the basic concepts need to be penetrated and spiraled moderately, subject logic and age characteristics should be balanced, and effective cohesion between spirals needs to be considered.

Key words: mathematical textbook; spiral; writing feature; axis symmetry; content analysis

责任编辑 廖 坤