DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2020.11.001

求解一维热传导方程的一族三层隐格式①

詹涌强, 凌 婷

广东交通职业技术学院 基础部数学教研室,广州 510800

摘要: 用待定系数法构造了求解一维热传导方程的一族高精度隐式格式. 格式的截断误差达到 $O(\tau^3+h^6)$. 证明了当 $r<\frac{\sqrt{5}}{10}$ 时,差分格式是稳定的. 通过数值试验,比较了差分格式的解和精确解的区别,说明了差分格式的有效性.

关 键 词: 一维热传导方程;隐式差分格式;截断误差

中图分类号:O241.82 **文献标志码:A** **文章编号:** 1000-5471(2020)11-0001-05

抛物型方程是偏微分方程中的一种重要方程,它广泛应用于力学、天文学、物理学、生态学及工程技术等各个领域中. 抛物型方程常见的数值解法有有限元法、有限体积法、边界元法和有限差分法等,在这些方法中,有限差分法仍然是求解抛物型方程的重要方法. 有限差分法中常见的差分格式有古典显式格式、古典隐式格式和 Crank-Nicolson 格式等. 古典显式格式的稳定性条件为 $r\leqslant\frac{1}{2}$,截断误差仅为 $O(\tau+h^2)$. 古典隐式格式和 Crank-Nicolson 格式则为无条件稳定的,古典隐式格式的截断误差为 $O(\tau+h^2)$,而 Crank-Nicolson 格式的截断误差为 $O(\tau^2+h^2)$[1-2]. 这些格式的精度都不高. 因此,寻找稳定性好且精度高的差分格式就成了当前许多学者所研究的问题.

本文主要考虑如下一维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0\leqslant x\leqslant L,\ t>0 \tag{1}$$

其中:$u=u(x,t)$ 表示温度,它是时间变量 t 与空间变量 x 的函数,$a>0$ 为热扩散项系数,它由材料的热传导率、密度与热容所决定,L 是一个大于零的常量. 为了确定一个具体的热传导过程,还必须知道物体的初始温度(初始条件),初始条件假设为

$$u(x,0)=\varphi(x),\ 0\leqslant x\leqslant L \tag{2}$$

$\varphi(x)$ 是已知的光滑函数. 另外物体在边界上所受到的外界的影响(边界条件)假设为

$$u(0,t)=u(L,t)=0,\ t>0 \tag{3}$$

热传导方程除了用来刻画热量的传导过程,在实际问题中还有着广泛的应用. 如生态学中提出的各种数学模型、神经轴突中电脉冲的传导及燃烧理论等许多物理现象,流体在多孔介质中的运动规律等都可归结为以上的热传导方程. 对方程(1)的求解,有学者提出了改进的差分格式,精度比常见的经典格式精度要高[3-9],如:文献[8]给出了一族高精度恒稳格式,格式的截断误差达 $O(\tau^2+h^6)$;文献[9]构造了一个截断误差达 $O(\tau^4+h^4)$ 的高精度隐格式,稳定性条件为 $0<r\leqslant 0.5$. 本文构造了一个更高精度的三层九点隐式

---

① 收稿日期:2019-05-22

基金项目:国家自然科学基金项目(61070165).

作者简介:詹涌强(1978-),男,副教授,主要从事微分方程数值解法研究.

格式，格式的截断误差达到了 $O(\tau^3+h^6)$，稳定性条件为 $r<\frac{\sqrt{5}}{10}$.

1 格式的构造

设时间步长为 τ，空间步长为 h，网格区域由点集 $(x_j,t_n)(j=0,1,2,\cdots,M;n=0,1,\cdots)$ 所组成，其中 $x_j=jh$，$t_n=n\tau$，$h=\frac{L}{M}$. 并记 $u_j^n=u(x_j,t_n)$.

用如下含参数的差分方程逼近微分方程(1)

$$\frac{c_1}{3}(\Delta_t u_{j+1}^n+\Delta_t u_j^n+\Delta_t u_{j-1}^n)+\frac{c_2}{3}(\Delta_t u_{j+1}^{n-1}+\Delta_t u_j^{n-1}+\Delta_t u_{j-1}^{n-1})=ac_3\delta_x^2u_j^{n+1}+ac_4\delta_x^2u_j^n+ac_5\delta_x^2u_j^{n-1} \tag{4}$$

其中：$\Delta_t u_j^n=\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}$，$\delta_x^2u_j^n=\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{h^2}$，其余类推；$c_i(i=1,\cdots,5)$ 为待定系数.

将(4)式中各节点上 u 的值在节点 $(jh,n\tau)$ 处作 Taylor 展开，并整理可得

$$\begin{aligned}&(c_1+c_2)a\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{1}{2}(c_1-c_2)a^2\tau\frac{\partial^4u}{\partial x^4}+\frac{1}{3}(c_1+c_2)ah^2\frac{\partial^4u}{\partial x^4}+\frac{1}{6}(c_1+c_2)a^3\tau^2\frac{\partial^6u}{\partial x^6}+\\&\frac{1}{6}(c_1-c_2)a^2h^2\tau\frac{\partial^6u}{\partial x^6}+\frac{1}{36}(c_1+c_2)ah^4\frac{\partial^6u}{\partial x^6}=\\&(c_3+c_4+c_5)a\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{1}{12}(c_3+c_4+c_5)ah^2\frac{\partial^4u}{\partial x^4}+(c_3-c_5)a^2\tau\frac{\partial^4u}{\partial x^4}+\\&\frac{1}{360}(c_3+c_4+c_5)ah^4\frac{\partial^6u}{\partial x^6}+\frac{1}{2}(c_3+c_5)a^3\tau^2\frac{\partial^6u}{\partial x^6}+\\&\frac{1}{12}(c_3-c_5)a^2h^2\tau\frac{\partial^6u}{\partial x^6}+O(\tau^3+h^6)\end{aligned}$$

为使格式(4)的截断误差达到 $O(\tau^3+h^6)$，需下面方程组成立

$$\begin{cases}c_1+c_2=1\\c_3+c_4+c_5=1\\\frac{1}{2}(c_1-c_2)a^2\tau+\frac{1}{3}ah^2=\frac{1}{12}ah^2+(c_3-c_5)a^2\tau\\\frac{1}{6}a^3\tau^2+\frac{1}{6}(c_1-c_2)a^2h^2\tau+\frac{1}{36}ah^4=\frac{1}{360}ah^4+\frac{1}{2}(c_3+c_5)a^3\tau^2+\frac{1}{12}(c_3-c_5)a^2h^2\tau\end{cases} \tag{5}$$

在方程组(5)中，$r=\frac{a\tau}{h^2}$，令 $c_5=\theta$，可解得

$$c_1=\frac{100r^2-240r^2\theta-60r+1}{60r(2r-1)}\qquad c_2=\frac{20r^2+240r^2\theta-1}{60r(2r-1)}$$

$$c_3=\frac{20r^2-30r\theta-60r^2\theta-7}{30r(2r-1)}\qquad c_4=\frac{60r\theta+40r^2-30r+7}{30r(2r-1)}$$

将所得各值代入(4)式，可得截断误差为 $O(\tau^3+h^6)$ 的一个隐式格式

$$\begin{aligned}&(360r^3\theta-60r^2\theta-120r^3+100r^2-18r+1)(u_{j+1}^{n+1}+u_{j-1}^{n+1})+\\&(240r^3+100r^2-600r^2\theta-720r^3\theta-144r+1)u_j^{n+1}=\\&(240r^3-100r^2-120r^2\theta-18r+2)(u_{j+1}^n+u_{j-1}^n)+(-1200r^2\theta-480r^3+440r^2-144r+2)u_j^n+\\&(360r^3\theta+60r^2\theta+20r^2-1)(u_{j+1}^{n-1}+u_{j-1}^{n-1})+(600r^2\theta-720r^3\theta+20r^2-1)u_j^{n-1}\end{aligned} \tag{6}$$

2 差分格式的稳定性分析

利用 Fourier 分析法，可算出格式(6)的传播矩阵为

$$\boldsymbol{G}(s)=\begin{bmatrix}g_{11}&g_{12}\\g_{21}&g_{22}\end{bmatrix}$$

其中

$$g_{11}=\frac{-1440r^2\theta+240r^2-180r+6-(-480r^2\theta+960r^3-400r^2-72r+8)s}{300r^2-720r^2\theta-180r+3-(400r^2-240r^2\theta-480r^3+1440r^3\theta-72r+4)s}$$

$$g_{12}=\frac{720r^2\theta+60r^2-3-(1440r^3\theta+240r^2\theta+80r^2-4)s}{300r^2-720r^2\theta-180r+3-(400r^2-240r^2\theta-480r^3+1440r^3\theta-72r+4)s}$$

$$g_{21}=1,\ g_{22}=0,\ s=\sin^2\frac{kh}{2}\in[0,1]$$

传播矩阵 $\boldsymbol{G}(s)$ 的特征方程为

$$\lambda^2-g_{11}\lambda-g_{12}=0 \tag{7}$$

引理 1[10]　特征方程(7)的根满足 $|\lambda_{1,2}|\leqslant 1$ 的充要条件是

$$|g_{11}|\leqslant 1-g_{12}<2 \tag{8}$$

引理 2[10]　差分格式(6)稳定，即矩阵族 $\boldsymbol{G}^n(s)(s\in[0,1],n=1,2,\cdots)$ 一致有界的充要条件是

1) $|\lambda_{1,2}|\leqslant 1$($\lambda_{1,2}$ 是方程(7)的两个根).

2) 使 $1-\dfrac{g_{11}^2}{4}=g_{11}^2+4g_{12}=0$ 成立的 s 或不存在，或不属于区间$[0,1]$.

定理 1　当 $0<r<\dfrac{\sqrt{5}}{10}$ 且 $\theta\geqslant\dfrac{40r^2-30r+1}{240r^2}$ 时，差分格式(6)稳定且收敛.

证　首先考虑条件(2)，当 $g_{12}\neq-1$ 时，使 $1-\dfrac{g_{11}^2}{4}=g_{11}^2+4g_{12}=0$ 的 s 不存在. 再由条件(1)和式(8)知，格式(6)稳定的条件为 $-1+g_{12}\leqslant g_{11}\leqslant 1-g_{12}<2$.

由 $g_{11}\leqslant 1-g_{12}$ 得

$$\frac{-720r^2\theta+300r^2-180r+3-(1440r^3\theta-240r^2\theta+960r^3-320r^2-72r+4)s}{300r^2-720r^2\theta-180r+3-(400r^2-240r^2\theta-480r^3+1440r^3\theta-72r+4)s}\leqslant 1 \tag{9}$$

为确定起见，不妨假定分母

$$300r^2-720r^2\theta-180r+3-(400r^2-240r^2\theta-480r^3+1440r^3\theta-72r+4)s<0 \tag{10}$$

(10)式成立的一个充分条件是

$$\begin{cases}300r^2-720r^2\theta-180r+3<0 & (11)\\ 480r^3-100r^2-480r^2\theta-1440r^3\theta-108r-1<0 & (12)\end{cases}$$

由(11),(12)式解得

$$\begin{cases}\theta>\dfrac{100r^2-60r+1}{240r^2} & (13)\\ \theta>\dfrac{480r^3-100r^2-108r-1}{480r^2(1+3r)} & (14)\end{cases}$$

当 $r<\dfrac{\sqrt{5}}{10}$ 时，$\dfrac{100r^2-60r+1}{240r^2}>\dfrac{480r^3-100r^2-108r-1}{480r^2(1+3r)}$，故 $r<\dfrac{\sqrt{5}}{10}$ 时(13)式优于(14)式，(13)式成立时(14)式也成立.

而当(10)式成立时，由(9)式解得

$$-720r^2(2r-1)s\geqslant 0 \tag{15}$$

(15)式成立的条件为

$$r\leqslant\frac{1}{2}$$

又由 $1-g_{12}<2$ 可得

$$360r^2-180r+(480r^3+72r-2880r^3\theta-480r^2)s<0 \tag{16}$$

(16)式成立的一个充分条件是

$$\begin{cases}360r^2-180r<0 & (17)\\ 480r^3-120r^2-2880r^3\theta-108r<0 & (18)\end{cases}$$

当 $r < \frac{1}{2}$ 时(17) 式成立.

由(18) 式解得

$$\theta > \frac{40r^2 - 10r - 9}{240r^2} \tag{19}$$

而当 $r < \frac{1}{3}$ 时，$\frac{100r^2 - 60r + 1}{240r^2} > \frac{40r^2 - 10r - 9}{240r^2}$ 成立，故(13) 式优于(19) 式，(13) 式成立时(19) 式也成立.

再由 $-1 + g_{12} \leqslant g_{11}$ 得

$$2880r^2\theta - 480r^2 + 360r - 12 + (480r^3 - 960r^2\theta - 80r^2 - 144r + 16)s \geqslant 0 \tag{20}$$

(20) 式成立的一个充分条件是

$$\begin{cases} 240r^2\theta - 40r^2 + 30r - 1 \geqslant 0 & (21) \\ 1920r^2\theta + 480r^3 - 560r^2 + 216r + 4 \geqslant 0 & (22) \end{cases}$$

由(21),(22) 式解得

$$\begin{cases} \theta \geqslant \frac{40r^2 - 30r + 1}{240r^2} & (23) \\ \theta \geqslant \frac{140r^2 - 54r - 120r^3 - 1}{480r^2} & (24) \end{cases}$$

当 $r < \frac{1}{2}$ 时，$\frac{100r^2 - 60r + 1}{240r^2} < \frac{40r^2 - 30r + 1}{240r^2}$ 成立，故(23) 式优于(13) 式，(23) 式成立时(13) 式也成立.

另外当 $r < \frac{\sqrt{5}}{10}$ 时，$\frac{140r^2 - 54r - 120r^3 - 1}{480r^2} < \frac{40r^2 - 30r + 1}{240r^2}$，故(23) 式成立时(24) 式也成立.

综上所述，由 Lax 的稳定性与收敛性定理可得定理 1 结论成立.

特别地，当 $\theta = \frac{40r^2 - 30r + 1}{240r^2}$ 时，差分格式(6) 演化为

$$\begin{aligned} &(-60r^3 + 45r^2 - 9r + \frac{3}{4})(u_{j+1}^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) + (120r^3 + 90r^2 - 72r - \frac{3}{2})u_j^{n+1} = \\ &(240r^3 - 120r^2 - 3r + \frac{3}{2})(u_{j+1}^{n} + u_{j-1}^{n}) + (-480r^3 + 240r^2 + 6r - 3)u_j^n + \\ &(60r^3 - 15r^2 - 6r - \frac{3}{4})(u_{j+1}^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}) + (-120r^3 + 210r^2 - 78r + \frac{3}{2})u_j^{n-1} \end{aligned} \tag{25}$$

3 数值例子

考虑扩散方程

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(x,\ 0) = \sin x,\ 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ u(0,\ t) = 0,\ u(1,\ t) = \mathrm{e}^{-t}\sin 1,\ t \geqslant 0 \end{cases} \tag{26}$$

利用格式(25) 求数值解，并与精确解进行比较.

取 $h = \frac{1}{20}$，$\tau = rh^2 = \frac{r}{400}$，$r = \frac{1}{10}, \frac{1}{8}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}$ 计算. 为方便起见，用式(26) 的精确解 $u(x,\ t) = \mathrm{e}^{-t}\sin x$ 计算第一层的值 u_j^1. 将本文格式(25) 与文献[9] 格式计算出的数值解和精确解进行比较，计算到 $n = 200$ 时的结果如表 1.

由表 1 看出，本文所构造差分格式的解与精确解有很好的吻合，与文献[9] 格式相比，本文格式的精度比文献[9] 格式的误差精度提高了 $10^{-3} \sim 10^{-4}$，结果说明本文构造的格式是一族高精度的差分格式.

表 1　格式(25)和文献[9]格式的数值解与精确解的比较

r	项　目	$x=0.1$	$x=0.3$	$x=0.5$	$x=0.7$
$\frac{1}{10}$	精确解	0.094 964 483 462 90	0.281 107 516 110 79	0.456 043 679 177 42	0.612 798 819 884 29
	格式(25)	0.094 964 483 462 91	0.281 107 516 110 83	0.456 043 679 177 48	0.612 798 819 884 36
	文献[9]格式	0.094 964 483 512 09	0.281 107 516 254 66	0.456 043 679 399 20	0.612 798 820 131 94
$\frac{1}{8}$	精确解	0.093 784 815 703 33	0.277 615 542 463 00	0.450 378 613 611 17	0.605 186 510 686 57
	格式(25)	0.093 784 815 703 34	0.277 615 542 463 04	0.450 378 613 611 23	0.605 186 510 686 63
	文献[9]格式	0.093 784 815 759 70	0.277 615 542 626 43	0.450 378 613 858 04	0.605 186 510 953 24
$\frac{1}{6}$	精确解	0.091 851 177 379 27	0.271 891 715 548 86	0.441 092 789 023 45	0.592 708 884 948 45
	格式(25)	0.091 851 177 379 29	0.271 891 715 548 92	0.441 092 789 023 53	0.592 708 884 948 54
	文献[9]格式	0.091 851 177 464 01	0.271 891 715 791 25	0.441 092 789 379 57	0.592 708 885 318 34
$\frac{1}{5}$	精确解	0.090 333 010 952 42	0.267 397 740 772 90	0.433 802 166 491 12	0.582 912 268 773 25
	格式(25)	0.090 333 010 952 44	0.267 397 740 772 95	0.433 802 166 491 20	0.582 912 268 773 33
	文献[9]格式	0.090 333 011 092 36	0.267 397 741 169 60	0.433 802 167 064 11	0.582 912 269 354 52

参考文献：

[1]　陆金甫，关　治．偏微分方程数值解法［M］．北京：清华大学出版社，2004.

[2]　戴嘉尊，邱建贤．微分方程数值解法［M］．南京：东南大学出版社，2002.

[3]　詹涌强．求解热传导方程的一个高精度格式［J］．西南师范大学学报(自然科学版)，2015，40(1)：18-22.

[4]　徐金平，单双荣．解抛物型方程的一个高精度显式差分格式［J］．华侨大学学报(自然科学版)，2009，30(4)：473-475.

[5]　马明书．解抛物型方程的一个高精度两层显格式［J］．河南师范大学学报(自然科学版)，1996，24(1)：80-81.

[6]　马明书．一维抛物型方程的一个新的高精度显式差分格式［J］．数值计算与计算机应用，2001，22(2)：156-160.

[7]　MA M S，WANG X F．A-High-Order Accuracy Implicit Difference Scheme for Solving the Equation of Parabolic Type［J］．Chinese Quarterly Journal of Mathematics，2000，15(2)：94-97.

[8]　曾文平．抛物型方程的一族双参数高精度恒稳格式［J］．华侨大学学报(自然科学版)，2002，23(4)：327-331.

[9]　MA M S，WANG X F．An Explicit Difference Scheme with High Accuracy and Branching Stability for Solving Parabolic Partial Differential Equation［J］．Chinese Quarterly Journal of Mathematics，2000，15(4)：99-103.

[10]　马驷良．二阶矩阵族 $G^n(k,\Delta t)$ 一致有界的充要条件及其对差分方程稳定性的应用［J］．高等学校计算数学学报，1980(2)：41-54.

A Class of Three-Level Implicit Difference Scheme for Solving One-Dimensional Heat Conduction Parabolic Equations

ZHAN Yong-qiang，　LING　Ting

Department of Mathematics Teaching and Research，Guangdong Communication Polytechnic College，Guangzhou 510800，China

Abstract：This paper presents a class of implicit difference schemes with high accuracy for solving one-dimension heat conduction equation by the method of undetermined parameters. The truncation error of the schemes is $O(\tau^3+h^6)$. The difference schemes are proved to be stable if $r<\frac{\sqrt{5}}{10}$. The numerical experiment shows the numerical solutions of difference schemes and the precise solutions are matched and the difference schemes are effective.

Key words：one-dimensional heat conduction equation；implicit difference schemes；truncation error

责任编辑　张　枸