

一类带有加法 Allee 效应的捕食-食饵模型 共存解的存在性和稳定性^①

代净玉^{1,2}, 李艳玲¹

1. 陕西师范大学 数学与信息科学学院, 西安 710119;

2. 临沂第一中学, 山东 临沂 276000

摘要: 研究了一类食饵带有加法 Allee 效应的捕食-食饵模型共存解的存在性和稳定性. 首先, 利用局部分歧理论, 分别以食饵和捕食者的出生率为分歧参数, 得到了发自半平凡解的局部分歧解; 其次, 利用全局分歧理论, 将局部分歧进行延拓并分析了全局分歧解的整体走向, 从而得到了正解存在的充分条件; 再次, 讨论了局部分歧解的稳定性; 最后, 应用数值模拟技术验证并补充了一些理论结果. 结果表明, 当参数满足一定条件时, 两物种可共存且共存解稳定.

关键词: 捕食-食饵模型; 加法 Allee 效应; 分歧; 稳定性; 数值模拟

中图分类号: O175.26

文献标志码: A

文章编号: 1000-5471(2020)11-0006-12

近年来 Allee 效应^[1] 受到了国内外生态学家和数学家的极大关注, 但大多数研究的是带有乘法 Allee 效应的模型^[2-4].

文献[5]构造了如下的加法 Allee 效应:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \left[r \left(1 - \frac{\vartheta}{K} \right) - \frac{m}{\vartheta + b} \right] \vartheta$$

其中: ϑ 是种群密度, r 表示 ϑ 的内在增长率, K 为 ϑ 的环境承载力, m 与 b 为 Allee 效应常量, 反映了该效应的强弱程度. 当 $m < br$ 时, 此方程代表弱 Allee 效应; 当 $m > br$ 时, 此方程代表了强 Allee 效应. 大量事实表明, 在弱 Allee 效应的影响下, 食饵的单位增长率虽会降到很低但仍能保持为正.

本文主要研究如下带有加法 Allee 效应的捕食-食饵模型

$$\begin{cases} u_t - d_1 \Delta u = au \left(1 - \frac{u}{K} \right) - \frac{mu}{u+b} - \frac{cuv}{(1+\alpha u)(1+\beta v)}, & x \in \Omega, t > 0 \\ v_t - d_2 \Delta v = v \left(r - dv - \frac{ev}{k+u} \right), & x \in \Omega, t > 0 \\ u = v = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, v(x, 0) = v_0(x) \geq 0, & x \in \Omega \end{cases} \quad (1)$$

其中: Ω 为 $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) 中具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界开区域; u 和 v 分别表示食饵和捕食者的密度; 参数 $a, r, K, d, d_1, d_2, m, b, c, \alpha, \beta, e, k$ 均为正常数且 $m < ab$, a 和 r 分别表示食饵和捕食者的出生率, K 表示环境对食饵的容纳量, d 表示捕食者的种内压力, d_1 和 d_2 分别是食饵和捕食者的扩散系数; $\frac{m}{u+b}$ 是加法 Allee 效应

① 收稿日期: 2018-11-29

基金项目: 国家自然科学基金项目(61672021).

作者简介: 代净玉(1992-), 女, 硕士, 主要从事偏微分方程理论及应用方面的研究.

通信作者: 李艳玲, 教授, 博士研究生导师.

项, m 和 b 是 Allee 效应常量, 反应了 Allee 效应的强弱程度; $\frac{cu}{(1+au)(1+\beta v)}$ 是 Crowley-Martin 功能反应函数, 与 Beddington-DeAngelis 反应函数相比, 它更具有优越性, 且与现实中的某些生物现象更加契合; $\frac{ev}{k+u}$ 为修正的 Leslie-Gower 项, e 表示食饵的转化率, k 为环境对捕食者的承载量.

当 $\alpha = \beta = d = 0$ 时, 文献[6] 在齐次 Neumann 边界条件下讨论了系统正常数解的稳定性和非常数正解的存在性和不存在性; 当 $m = \beta = d = 0$ 时, 文献[7] 利用分歧理论研究了该系统正解的存在性、稳定性、多解性和唯一性; 文献[8] 在齐次 Neumann 边界条件下利用度理论研究了该系统非常数正解的存在性和不存在性; 当 $m = d = 0$ 时, 文献[9] 利用扰动理论、分歧理论以及度理论讨论了系统正解的存在性、稳定性、唯一性和多解性. 然而, 对齐次 Dirichlet 边界条件下带有 Allee 效应的捕食-食饵模型的研究极少, 原因在于在齐次 Dirichlet 边界条件下研究系统的半平凡解问题比较困难. 因此, 本文主要讨论系统(1) 正解的存在性和稳定性.

本文主要考虑系统(1) 对应的平衡态系统

$$\begin{cases} -d_1 \Delta u = au \left(1 - \frac{u}{K}\right) - \frac{mu}{u+b} - \frac{cuv}{(1+au)(1+\beta v)}, & x \in \Omega \\ -d_2 \Delta v = v \left(r - dv - \frac{ev}{k+u}\right), & x \in \Omega \\ u = v = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2)$$

为了方便研究, 作如下变换:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{a}{d_1 K} u, \bar{a} = \frac{a}{d_1}, \bar{m} = \frac{am}{d_1^2 K}, \bar{b} = \frac{ab}{d_1 K}, \bar{c} = \frac{cd_2}{dd_1}, \bar{\alpha} = \frac{\alpha d_1 K}{a}, \bar{\beta} = \frac{\beta d_2}{d}, \\ \bar{v} &= \frac{d}{d_2} v, \bar{r} = \frac{r}{d_2}, \bar{e} = \frac{ae}{dd_1 K}, \bar{k} = \frac{ak}{d_1 K} \end{aligned}$$

并将 $\bar{u}, \bar{a}, \bar{m}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{v}, \bar{r}, \bar{e}, \bar{k}$ 分别记为 $u, a, m, b, c, \alpha, \beta, v, r, e, k$, 则系统(2) 转化为

$$\begin{cases} -\Delta u = u(a - u) - \frac{mu}{u+b} - \frac{cuv}{(1+au)(1+\beta v)}, & x \in \Omega \\ -\Delta v = v \left(r - v - \frac{ev}{k+u}\right), & x \in \Omega \\ u = v = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (3)$$

本文主要利用分歧理论和稳定性理论研究系统(3) 共存解的存在性和稳定性.

1 预备知识

本节主要介绍一些基本的概念和结论, 为后面的研究作准备.

设 $q(x) \in C(\bar{\Omega})$, 考虑如下特征值问题

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)u = \lambda u, & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (4)$$

根据文献[10-11] 可知, 问题(4) 的所有特征值满足 $\lambda_1(q) < \lambda_2(q) \leq \lambda_3(q) \leq \dots \rightarrow \infty$, 相应的特征函数为 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \dots$, 其主特征值

$$\lambda_1(q) = \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ \|u\|_{L^2(\Omega)} = 1}} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + q(x)u^2) dx$$

是单重的. 对 $j \geq 1$, 若 $q_1 \geq q_2$, 则 $\lambda_j(q_1) \geq \lambda_j(q_2)$, 且若 $q_1 \not\equiv q_2$, 则 $\lambda_j(q_1) > \lambda_j(q_2)$. 记 $\lambda_1(0) = \lambda_1$, 相应的主特征函数记作 φ_1 ($\varphi_1 > 0, x \in \Omega$).

考察非线性边值问题

$$\begin{cases} -\Delta v = v(r - v), & x \in \Omega \\ v = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (5)$$

根据文献[12] 知, 如果 $r > \lambda_1$, 则方程(5) 有唯一正解, 记为 θ_r , 且 $0 < \theta_r < r$. 对于 $r \in (\lambda_1, +\infty)$, 映射 $r \rightarrow \theta_r$ 是连续的, 且若 $r_1 < r_2$, 则 $\theta_{r_1} < \theta_{r_2}$. 因此对于边值问题

$$\begin{cases} -\Delta v = v\left(r - v - \frac{e}{k}v\right), & x \in \Omega \\ v = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (6)$$

当 $r > \lambda_1$ 时, 问题(6) 有唯一正解 $\frac{k}{k+e}\theta_r$, 记为 θ_r^* .

考虑非线性边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = u\left(a - u - \frac{m}{u+b}\right), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (7)$$

由文献[13] 知, 当 $m < \min\{b^2, ab\}$ 且 $a > \lambda_1 + \frac{m}{b}$ 时, 问题(7) 存在唯一正解, 记为 θ_a^* .

根据以上对于问题(6), (7) 的讨论知: 如果 $m < \min\{b^2, ab\}$ 且 $a > \lambda_1 + \frac{m}{b}$, 那么系统(3) 存在半平凡解 $(\theta_a^*, 0)$; 如果 $r > \lambda_1$, 那么系统(3) 存在半平凡解 $(0, \theta_r^*)$.

下面给出系统(3) 正解存在的必要性条件.

引理 1 设 $m < \min\{b^2, ab\}$. 如果 (u, v) 是系统(3) 的正解, 则 $a > \lambda_1 + \frac{m}{b}$, $r > \lambda_1$.

证 在系统(3) 中关于 u 的方程两端同乘 u , 并在 Ω 上积分得

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} -u\Delta u \, dx &= \int_{\Omega} \left[u^2 \left(a - u - \frac{m}{u+b} \right) - \frac{cu^2v}{(1+\alpha u)(1+\beta v)} \right] dx < \\ &= \int_{\Omega} u^2 \left(a - u - \frac{m}{u+b} \right) dx < \int_{\Omega} u^2 \left(a - \frac{m}{b} \right) dx = \left(a - \frac{m}{b} \right) \int_{\Omega} u^2 dx \end{aligned}$$

由 Poincaré 不等式得 $a - \frac{m}{b} > \lambda_1$, 即 $a > \lambda_1 + \frac{m}{b}$. 同理可证 $r > \lambda_1$.

利用上下解方法和极大值原理易得系统(3) 正解的先验估计, 即下面的引理 2.

引理 2 设 $m < \min\{b^2, ab\}$. 如果 (u, v) 是系统(3) 的正解, 则

$$0 < u \leq \theta_a^* < a, \theta_r^* \leq v \leq \frac{k+a}{k+a+e}\theta_r < \frac{(k+a)r}{k+a+e}$$

在本节最后, 我们给出下面的引理.

引理 3 设 L_0 是问题(6) 在 θ_r^* 处的线性化算子, 即 $L_0 = -\Delta - r + 2\left(1 + \frac{e}{k}\right)\theta_r^*$. 如果 $r > \lambda_1$, 那么 L_0 的所有特征值均大于 0.

证 由 $r > \lambda_1$ 知, θ_r^* 是 $-\Delta v = v\left(r - v - \frac{e}{k}v\right)$ 的唯一正解, 于是 $\lambda_1\left(-\Delta - r + \left(1 + \frac{e}{k}\right)\theta_r^*\right) = 0$, 从而 $\lambda_1\left(-\Delta - r + 2\left(1 + \frac{e}{k}\right)\theta_r^*\right) > \lambda_1\left(-\Delta - r + \left(1 + \frac{e}{k}\right)\theta_r^*\right) = 0$. 因此, L_0 的所有特征值均大于 0.

2 局部分歧解的存在性

本节分别以 a 和 r 为分歧参数, 研究系统(3) 发自半平凡解的分歧解.

先以 a 为分歧参数, 讨论系统(3) 发自半平凡分支 $\{(a; 0, \theta_r^*): a \in \mathbb{R}^+\}$ 的局部分支. 为了应用分歧理论, 引入空间

$$X = C_0^1(\bar{\Omega}) \times C_0^1(\bar{\Omega})$$

其中 $C_0^1(\bar{\Omega}) = \{u \in C^1(\bar{\Omega}): u = 0, x \in \partial\Omega\}$.

设 $\tilde{a}$ 是边值问题

$$\begin{cases} -\Delta\phi + \left(\frac{m}{b} + \frac{c\theta_r^*}{1+\beta_r^*}\right)\phi = a\phi, & x \in \Omega \\ \phi = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (8)$$

的主特征值, $\phi_1 > 0$ 为相应的特征函数.

定理 1 设 $r > \lambda_1$, 则 $(\bar{a}; 0, \theta_r^*)$ 是系统(3)的分歧点, 且在 $(\bar{a}; 0, \theta_r^*)$ 的邻域内, 系统(3)存在正解, 其中 $\bar{a}$ 由(8)式给出.

证 定义算子 $A: \mathbb{R}^+ \times X \longrightarrow X$ 为

$$A(a; u, v) = \left(\Delta u + u(a - u) - \frac{mu}{u + b} - \frac{cuv}{(1 + au)(1 + \beta v)}, \Delta v + v \left(r - v - \frac{ev}{k + u} \right) \right)$$

则 $A(a; u, v)$ 为 X 上的可微算子. 令 $L(\bar{a}; 0, \theta_r^*) = DA_{(u, v)}(\bar{a}; 0, \theta_r^*)$, 则

$$L(\bar{a}; 0, \theta_r^*)(\xi, \eta) = \left(\Delta \xi + \left(\bar{a} - \frac{m}{b} - \frac{c\theta_r^*}{1 + \beta\theta_r^*} \right) \xi, \Delta \eta + \left(r - 2\theta_r^* - \frac{2e\theta_r^*}{k} \right) \eta + \frac{e(\theta_r^*)^2}{k^2} \xi \right)$$

因此 $L(\bar{a}; 0, \theta_r^*)(\xi, \eta) = 0$ 等价于

$$\begin{cases} -\Delta \xi = \left(\bar{a} - \frac{m}{b} - \frac{c\theta_r^*}{1 + \beta\theta_r^*} \right) \xi, & x \in \Omega \\ -\Delta \eta = \left(r - 2\theta_r^* - \frac{2e\theta_r^*}{k} \right) \eta + \frac{e(\theta_r^*)^2}{k^2} \xi, & x \in \Omega \\ \xi = \eta = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

若 $\xi \equiv 0$, 则 $\eta \equiv 0$, 故 $\xi \not\equiv 0$, 从而由前面 $\bar{a}$ 的定义知, $\xi = \phi_1$. 由引理 3 知, L_0 的所有特征值均大于 0, 所以 $\eta = \phi_1 = L_0^{-1} \left(\frac{e(\theta_r^*)^2}{k^2} \phi_1 \right)$, 其中 L_0^{-1} 是算子 L_0 的逆算子. 利用最大值原理可知, $\phi_1 > 0$. 因此 $L(\bar{a}; 0, \theta_r^*)$ 的核空间 $N(L(\bar{a}; 0, \theta_r^*)) = \text{span}\{(\phi_1, \phi_1)\}$.

令 $L^*(\bar{a}; 0, \theta_r^*)$ 为 $L(\bar{a}; 0, \theta_r^*)$ 的伴随算子, 则

$$L^*(\bar{a}; 0, \theta_r^*)(\xi, \eta) = \left(\Delta \xi + \left(\bar{a} - \frac{m}{b} - \frac{c\theta_r^*}{1 + \beta\theta_r^*} \right) \xi + \frac{e(\theta_r^*)^2}{k^2} \eta, \Delta \eta + \left(r - 2\theta_r^* - \frac{2e\theta_r^*}{k} \right) \eta \right)$$

于是 $L^*(\bar{a}; 0, \theta_r^*)(\xi, \eta) = 0$ 等价于

$$\begin{cases} -\Delta \xi = \left(\bar{a} - \frac{m}{b} - \frac{c\theta_r^*}{1 + \beta\theta_r^*} \right) \xi + \frac{e(\theta_r^*)^2}{k^2} \eta, & x \in \Omega \\ -\Delta \eta = \left(r - 2\theta_r^* - \frac{2e\theta_r^*}{k} \right) \eta, & x \in \Omega \\ \xi = \eta = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

显然, $\eta = 0, \xi = \phi_1$, 从而 $N(L^*(\bar{a}; 0, \theta_r^*)) = \text{span}\{(\phi_1, 0)\}$. 由 Fredholm 选择定理可知, $L(\bar{a}; 0, \theta_r^*)$ 的值域 $R(L(\bar{a}; 0, \theta_r^*)) = \{(\xi, \eta) \in X: \int_{\Omega} \xi \phi_1 dx = 0\}$. 因此 $\text{codim } R(L(\bar{a}; 0, \theta_r^*)) = 1$.

令 $L_1(\bar{a}; 0, \theta_r^*)(\phi_1, \phi_1) = D_{a(u, v)} A(\bar{a}; 0, \theta_r^*)(\phi_1, \phi_1)$, 则 $L_1(\bar{a}; 0, \theta_r^*)(\phi_1, \phi_1) = (\phi_1, 0) \notin R(L(\bar{a}; 0, \theta_r^*))$.

因此, 根据 Crandall-Rabinowitz 分歧定理^[14] 知, 存在充分小的 $\delta > 0$ 和 C^1 函数 $(a(s); \phi(s), \psi(s))$: $(-\delta, \delta) \longrightarrow \mathbb{R} \times X$, 使得 $a(0) = \bar{a}, \phi(0) = 0, \psi(0) = 0$, 且 $\phi(s), \psi(s) \in Z$, 这里 $X = Z \oplus N(L(\bar{a}; 0, \theta_r^*))$. 因此, $(a(s); u(s), v(s))$ ($|s| < \delta$) 是系统(3)的解分支, 其中 $u(s) = s(\phi_1 + \phi(s)), v(s) = \theta_r^* + s(\psi_1 + \psi(s))$. 如果取 $0 < s < \delta$, 则它恰是系统(3)的正解, 即分支 $(a(s); u(s), v(s))$ ($0 < s < \delta$) 是系统(3)的共存解, 且系统(3)在分歧点 $(\bar{a}; 0, \theta_r^*)$ 附近的非负非平凡解, 或者在分支 $\{(a; 0, \theta_r^*): a \in \mathbb{R}^+\}$ 上, 或者在分支 $\{(a(s); u(s), v(s)): 0 < s < \delta\}$ 上.

下面以 r 为分歧参数, 考察系统(3)发自半平凡解 $(\theta_a^*, 0)$ 的局部分歧. 类似定理 1 的证明过程能证明下面的定理 2 成立.

定理 2 设 $m < \min\{b^2, ab\}$ 且 $a > \lambda_1 + \frac{m}{b}$, 则 $(\tilde{r}; \theta_a^*, 0)$ 是系统(3)的分歧点, 且在 $(\tilde{r}; \theta_a^*, 0)$ 的邻域内, 系统(3)存在正解, 其中 $\tilde{r} = \lambda_1$, 相应的特征函数为 φ_1 .

引理 4 设 $m < \min\{b^2, ab\}, \lambda_1 + \frac{m}{b} < a < \lambda_1 + \frac{m}{b} + \frac{c}{\beta}$. 若 (u, v) 是系统(3)的一个正解, 则存在充分大的常数 $M > 0$, 使得 $\tilde{r} < r \leq M$.

证 由系统(3)中关于 v 的方程可得

$$r = \lambda_1 \left(v + \frac{cv}{k+u} \right) > \lambda_1(0) = \lambda_1 = \tilde{r}$$

下面利用反证法证明 $r \leq M$. 假设 $r > M$. 令 $q_r = \frac{c\theta_r^*}{(1+\alpha\theta_a^*)(1+\beta\theta_r^*)} + \frac{m}{b}$. 因为 $\lambda_1(q_r)$ 是关于 r 的单调递增函数, $\lim_{r \rightarrow +\infty} \lambda_1(q_r) = \lambda_1 + \frac{m}{b} + \frac{c}{\beta}$, 且 M 充分大, 所以当 $r > M$ 时, $a < \lambda_1(q_r)$. 另一方面, 由 $r > \lambda_1$ 易得 $v \geq \theta_r^*$. 考虑到 $m < b^2$, 有 $u + \frac{m}{u+b} + \frac{cv}{(1+\alpha u)(1+\beta v)} > \frac{c\theta_r^*}{(1+\alpha\theta_a^*)(1+\beta\theta_r^*)} + \frac{m}{b}$. 于是, 根据系统(3)中关于 u 的方程可得,

$$a = \lambda_1 \left(u + \frac{m}{u+b} + \frac{cv}{(1+\alpha u)(1+\beta v)} \right) > \lambda_1 \left(\frac{c\theta_r^*}{(1+\alpha\theta_a^*)(1+\beta\theta_r^*)} + \frac{m}{b} \right) = \lambda_1(q_r)$$

矛盾. 因此 $r \leq M$.

注 1 由引理 4 可知, 在半平凡解分支 $\{(r; \theta_a^*, 0)\}$ 上产生的局部分歧解一定在分歧点 $(\tilde{r}; \theta_a^*, 0)$ 的右侧. 同时也可以知道, 如果该分歧解能延拓为整体分歧, 则该整体分歧是不可能随参数 r 到达无穷远处的.

3 局部分歧解的延拓

本节主要利用全局分歧理论^[15-17], 把定理 1 和定理 2 给出的局部分歧分别延拓为全局分歧. 为了研究方便, 引入以下记号:

$$P_1 = \{u \in C_0^1(\bar{\Omega}): u(x) > 0, x \in \Omega, \frac{\partial u}{\partial n} |_{\partial\Omega} < 0\};$$

$$P = \{(a; u, v) \in \mathbb{R}^+ \times X: u, v \in P_1\}.$$

定理 3 设 $r > \lambda_1$, 则由定理 1 给出的正分歧解在 P 内沿 a 增大到 ∞ .

证 令 $\omega = u$, $\chi = v - \theta_r^*$. 若 (u, v) 是系统(3)的非负解, 则 $0 \leq \omega < a$, $\chi \geq 0$, 且 ω, χ 满足

$$\begin{cases} -\Delta\omega = \left(a - \frac{m}{b} - \frac{c\theta_r^*}{1+\beta\theta_r^*}\right)\omega + F_1(\omega, \chi), & x \in \Omega \\ -\Delta\chi = \left(r - 2\theta_r^* - \frac{2c\theta_r^*}{k}\right)\chi + \frac{e(\theta_r^*)^2}{k^2}\omega + F_2(\omega, \chi), & x \in \Omega \\ \omega = \chi = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (9)$$

其中

$$F_1(\omega, \chi) = -\omega^2 - \frac{m\omega}{\omega+b} + \frac{m\omega}{b} + \frac{c\theta_r^*\omega}{1+\beta\theta_r^*} - \frac{c\omega(\chi+\theta_r^*)}{(1+\alpha\omega)[1+\beta(\chi+\theta_r^*)]}$$

$$F_2(\omega, \chi) = -\chi^2 - \frac{e(\theta_r^*)^2\omega}{k^2} + \frac{2c\theta_r^*\chi}{k} - \frac{e(\chi+\theta_r^*)^2}{k+\omega} + \frac{e(\theta_r^*)^2}{k}$$

显然 $F = (F_1, F_2)$ 连续, $F(0, 0) = 0$, 且 F 关于 (ω, χ) 的 Fréchet 导数 $D_{(\omega, \chi)} F|_{(0, 0)} = 0$. 令 K 为 $(-\Delta)^{-1}$, 则(9)式等价于

$$\begin{cases} \omega = K\left(a - \frac{m}{b} - \frac{c\theta_r^*}{1+\beta\theta_r^*}\right)\omega + KF_1(\omega, \chi), & x \in \Omega \\ \chi = K\left(r - 2\theta_r^* - \frac{2c\theta_r^*}{k}\right)\chi + K\frac{e(\theta_r^*)^2}{k^2}\omega + KF_2(\omega, \chi), & x \in \Omega \\ \omega = \chi = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (10)$$

定义算子 $T: \mathbb{R}^+ \times X \rightarrow X$ 为

$$T(a; \omega, \chi) = \left(K\left(a - \frac{m}{b} - \frac{c\theta_r^*}{1+\beta\theta_r^*}\right)\omega + KF_1(\omega, \chi), K\left(r - 2\theta_r^* - \frac{2c\theta_r^*}{k}\right)\chi + K\frac{e(\theta_r^*)^2}{k^2}\omega + KF_2(\omega, \chi)\right)$$

那么 $T(a; \omega, \chi)$ 为 X 上的紧可微算子. 令 $G(a; \omega, \chi) = (\omega, \chi) - T(a; \omega, \chi)$, 则 G 是 C^1 函数, 并且 $G(a; \omega, \chi) = 0$. 易知, $G(a; \omega, \chi)$ 满足 $0 \leq \omega < a$, $\chi \geq 0$ 的零点恰好是系统(3)的非负解.

令

$$K(a)(\omega, \chi) = DT_{(\omega, \chi)}(a; 0, 0)(\omega, \chi) =$$

$$\left(K\left(a - \frac{m}{b} - \frac{c\theta_r^*}{1 + \beta_r^*}\right)\omega, K\left(r - 2\theta_r^* - \frac{2e\theta_r^*}{k}\right)\chi + K\frac{e(\theta_r^*)^2}{k^2}\omega\right)$$

则 $I - K(\tilde{a})$ 的伴随算子

$$(I - K^*(\tilde{a}))(\omega, \chi) = \left(\omega - \left(\tilde{a} - \frac{m}{b} - \frac{c\theta_r^*}{1 + \beta_r^*}\right)K\omega - \frac{e(\theta_r^*)^2}{k^2}K\chi, \chi - \left(r - 2\theta_r^* - \frac{2e\theta_r^*}{k}\right)K\chi\right)$$

因此 $(I - K^*(\tilde{a}))(\omega, \chi) = 0$ 等价于

$$\begin{cases} \omega - \left(\tilde{a} - \frac{m}{b} - \frac{c\theta_r^*}{1 + \beta_r^*}\right)K\omega - \frac{e(\theta_r^*)^2}{k^2}K\chi = 0, & x \in \Omega \\ \chi - \left(r - 2\theta_r^* - \frac{2e\theta_r^*}{k}\right)K\chi = 0, & x \in \Omega \\ \omega = \chi = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (11)$$

令 $\omega = -\Delta\tilde{\omega}$, $\chi = -\Delta\tilde{\chi}$. 则(11)式等价于

$$\begin{cases} -\Delta\tilde{\omega} - \left(\tilde{a} - \frac{m}{b} - \frac{c\theta_r^*}{1 + \beta_r^*}\right)\tilde{\omega} - \frac{e(\theta_r^*)^2}{k^2}\tilde{\chi} = 0, & x \in \Omega \\ -\Delta\tilde{\chi} - \left(r - 2\theta_r^* - \frac{2e\theta_r^*}{k}\right)\tilde{\chi} = 0, & x \in \Omega \\ \tilde{\omega} = \tilde{\chi} = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

显然, 若 $\tilde{\chi} \equiv 0$, 则 $\tilde{\omega} = \phi_1$, 从而 $N(I - K^*(\tilde{a})) = \text{span}\{(-\Delta\phi_1, 0)\}$.

设 $\mu \geq 1$ 是 $K(a)$ 的一个特征值, 相应的特征函数为 (ω, χ) , 则有 $K(a)(\omega, \chi) = \mu(\omega, \chi)$, 即

$$\begin{cases} -\mu\Delta\omega = \left(a - \frac{m}{b} - \frac{c\theta_r^*}{1 + \beta_r^*}\right)\omega, & x \in \Omega \\ -\mu\Delta\chi = \left(r - 2\theta_r^* - \frac{2e\theta_r^*}{k}\right)\chi + \frac{e(\theta_r^*)^2}{k^2}\omega, & x \in \Omega \\ \omega = \chi = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

如果 $\omega \equiv 0$, 那么 $\chi \equiv 0$, 矛盾. 因此 $\omega \not\equiv 0$, 于是存在某个 $i (i = 1, 2, \dots)$, 使得 $a = a_i(\mu)$, 其中 $a_i(\mu)$ 是问题

$$\begin{cases} -\mu\Delta\omega = \left(a - \frac{m}{b} - \frac{c\theta_r^*}{1 + \beta_r^*}\right)\omega, & x \in \Omega \\ \omega = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

的特征值. 对于任意的 i , $a_i(\mu)$ 关于 $\mu \geq 1$ 严格单调递增, 且满足

$$0 < a_1(\mu) < a_2(\mu) \leq a_3(\mu) \leq \dots \rightarrow \infty, a_1(1) = \tilde{a}$$

另一方面, 若 $\mu \geq 1$, 则 L_μ 的所有特征值都是正的, 其中 $L_\mu = -\mu\Delta - r + 2\left(1 + \frac{e}{k}\right)\theta_r^*$, 从而 $\chi = L_\mu^{-1}\left(\frac{e(\theta_r^*)^2}{k^2}\omega\right)$ 且 (ω, χ) 是 $K(a)$ 的一个特征函数. 因此, $\mu \geq 1$ 是 $K(a)$ 的特征值当且仅当存在某个 $i = 1, 2, \dots$, 使得 $a = a_i(\mu)$.

假设 $a < \tilde{a}$, 则对任意的 $\mu \geq 1, i \geq 1$, 都有 $a < a_1(1) \leq a_i(\mu)$. 因此, $K(a)$ 没有大于或等于 1 的特征值, 从而 $\text{index}(T(a, \cdot), 0) = 1$.

假设 $\tilde{a} < a < a_2(1)$, 则对任意的 $\mu \geq 1, i \geq 2$, 有 $a < a_i(\mu)$. 又因为 $a_1(1) = \tilde{a}, \lim_{\mu \rightarrow \infty} a_1(\mu) = +\infty$, 且 $a_1(\mu)$ 关于 $\mu \geq 1$ 严格递增, 因此存在唯一的 μ_1 , 使得 $a = a_1(\mu_1)$. 于是 $N(\mu_1 I - K(a)) = \text{span}\{(\omega_1, \chi_1)\}$, $\dim(N(\mu_1 I - K(a))) = 1$, 其中 $\omega_1 > 0$ 是问题

$$\begin{cases} -\mu_1\Delta\omega = \left(a - \frac{m}{b} - \frac{c\theta_r^*}{1 + \beta_r^*}\right)\omega, & x \in \Omega \\ \omega = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (12)$$

的主特征函数, $\chi_1 = L_{\mu_1}^{-1}\left(\frac{e(\theta_r^*)^2}{k^2}\omega_1\right)$.

下证 $N(\mu_1 I - K(a)) \cap R(\mu_1 I - K(a)) = \{0\}$. 事实上, 如果假设不成立, 设 $(\omega_1, \chi_1) \in R(\mu_1 I -$

$K(a)$), 则存在 $(\omega, \chi) \in X$, 使得 $(\mu_1 I - K(a))(\omega, \chi) = (\omega_1, \chi_1)$, 即

$$\begin{cases} -\mu_1 \Delta \omega - \left(a - \frac{m}{b} - \frac{c\theta_r^*}{1 + \beta\theta_r^*}\right)\omega = -\Delta \omega_1, & x \in \Omega \\ \omega = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (13)$$

在方程(13) 两端同乘 ω_1 , 再在 Ω 上积分, 并利用格林公式得

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} -\omega_1 \Delta \omega_1 dx &= \int_{\Omega} \left[-\mu_1 \Delta \omega - \left(a - \frac{m}{b} - \frac{c\theta_r^*}{1 + \beta\theta_r^*}\right)\omega \right] \omega_1 dx = \\ &= \int_{\Omega} \left[-\mu_1 \Delta \omega_1 - \left(a - \frac{m}{b} - \frac{c\theta_r^*}{1 + \beta\theta_r^*}\right)\omega_1 \right] \omega dx = 0 \end{aligned}$$

另一方面, 结合(12) 式可得 $\int_{\Omega} -\omega_1 \Delta \omega_1 dx = \frac{1}{\mu_1} \int_{\Omega} \left(a - \frac{m}{b} - \frac{c\theta_r^*}{1 + \beta\theta_r^*}\right) \omega_1^2 dx = 0$, 矛盾. 因此 μ_1 的代数重数是 1. 所以当 $\tilde{a} < a < a_2(1)$ 时, $\text{index}(T(a, \cdot), 0) = -1$.

根据全局分歧定理^[15] 可知, 在 $\mathbb{R}^+ \times X$ 内, 存在发自 $(\tilde{a}; 0, 0)$ 的连通分支 C_0 满足 $G(a; \omega, \chi) = 0$, 且在点 $(\tilde{a}; 0, 0)$ 附近, $G(a; \omega, \chi)$ 的所有零点都在定理 1 给出的分歧曲线 $\{(a(s); s(\phi_1 + \phi(s)), s(\phi_1 + \psi(s))) : |s| < \delta\}$ 上. 定义 $C_1 = C_0 - \{(a(s); s(\phi_1 + \phi(s)), s(\phi_1 + \psi(s))) : -\delta < s < 0\}$ 为最大连通分支, 则在分歧点 $(\tilde{a}; 0, 0)$ 附近, C_1 满足曲线 $\{(a(s); s(\phi_1 + \phi(s)), s(\phi_1 + \psi(s))) : 0 < s < \delta\}$. 令 $C = \{(a; u, v) : u = \omega, v = \theta_r^* + \chi, (a; \omega, \chi) \in C_1\}$, 则 C 为系统(3) 发自 $(\tilde{a}; 0, \theta_r^*)$ 的解分支, 且在 $(\tilde{a}; 0, \theta_r^*)$ 的小邻域内有 $C \subset P$.

基于 Rabinowitz 给出的全局分歧定理^[15] 和文献[16-17] 的研究, 易知分支 $C - \{(\tilde{a}; 0, \theta_r^*)\}$ 满足下列条件之一:

- (i) C 连接了分歧点 $(\hat{a}; 0, \theta_r^*)$ 和 $(\tilde{a}; 0, \theta_r^*)$, 其 $\hat{a} \neq \tilde{a}$ 且 $I - K(\hat{a})$ 不可逆;
- (ii) C 在 $\mathbb{R}^+ \times X$ 内从点 $(\tilde{a}; 0, \theta_r^*)$ 延伸到 ∞ ;
- (iii) C 包含了一个点 $(a; u, v) \in \mathbb{R}^+ \times (\bar{Z} \setminus \{0\})$, 其中 $\bar{Z}$ 是 $N(I - K^*(\tilde{a}))$ 的补空间.

下面证明 $C - \{(\tilde{a}; 0, \theta_r^*)\} \subset P$. 利用反证法, 假设 $C - \{(\tilde{a}; 0, \theta_r^*)\} \not\subset P$, 则存在点 $(\hat{a}; \hat{u}, \hat{v}) \in \{C - (\tilde{a}; 0, \theta_r^*)\} \cap \partial P$ 以及序列 $\{(a_n; u_n, v_n)\} \subset C \cap P$, 这里 $u_n, v_n > 0$, 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时, $(a_n; u_n, v_n) \rightarrow (\hat{a}; \hat{u}, \hat{v})$. 由于 $(\hat{a}; \hat{u}, \hat{v}) \in \partial P$, 故 $\hat{u} \in \partial P_1$ 或 $\hat{v} \in \partial P_1$. 假设 $\hat{u} \in \partial P_1$, 则 $\hat{u} \geq 0$, $x \in \bar{\Omega}$, 从而或者存在 $x_0 \in \Omega$, 使得 $\hat{u}(x_0) = 0$, 或者存在 $x_0 \in \partial\Omega$, 使得 $\frac{\partial \hat{u}}{\partial n} \big|_{x=x_0} = 0$. 由系统(3) 的第一个方程知, $\hat{u}$ 满足方程

$$\begin{cases} -\Delta \hat{u} = \hat{u}(a - \hat{u}) - \frac{m\hat{u}}{\hat{u} + b} - \frac{c\hat{u}\hat{v}}{(1 + a\hat{u})(1 + \beta\hat{v})}, & x \in \Omega \\ \hat{u} = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

故由极大值原理知 $\hat{u} \equiv 0$. 同理, 假设 $\hat{v} \in \partial P_1$, 则 $\hat{v} \equiv 0$. 因此, $(\hat{u}, \hat{v})$ 有以下 3 种可能的情况:

- 1) 假设 $(\hat{u}, \hat{v}) = (0, \theta_r^*)$, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, $(a_n; u_n, v_n) \rightarrow (\hat{a}; 0, \theta_r^*)$. 令 $U_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_{\infty}}$, 则 U_n 满足

$$\begin{cases} -\Delta U_n = U_n(a_n - u_n) - \frac{mU_n}{u_n + b} - \frac{cU_n v_n}{(1 + a u_n)(1 + \beta v_n)}, & x \in \Omega \\ U_n = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (14)$$

由 L^p 估计和 Sobolev 嵌入定理知, 存在 U_n 的一个收敛子列(不失一般性, 仍记为 U_n), 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时, $U_n \rightarrow U$ 在 $C_0^1(\bar{\Omega})$ 上成立, 且 $U \geq 0$ ($U \not\equiv 0$), $x \in \bar{\Omega}$. 在(14) 式中, 令 $n \rightarrow \infty$ 得

$$\begin{cases} -\Delta U = \left(a - \frac{m}{b} - \frac{c\theta_r^*}{1 + \beta\theta_r^*}\right)U, & x \in \Omega \\ U = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

由极大值原理知 $U > 0$, $x \in \Omega$. 因此 $\hat{a} = \tilde{a}$, 这与 $\hat{a} \neq \tilde{a}$ 矛盾.

2) 假设 $(\hat{u}, \hat{v}) = (\theta_a^*, 0)$, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, $(a_n; u_n, v_n) \rightarrow (a; \theta_a^*, 0)$. 令 $V_n = \frac{v_n}{\|v_n\|_\infty}$, 则 V_n 满足

$$\begin{cases} -\Delta V_n = V_n \left(r - v_n - \frac{ev_n}{k + u_n} \right), & x \in \Omega \\ V_n = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (15)$$

类似地, 依据 L^p 估计和 Sobolev 嵌入定理知, V_n 存在一个收敛子列 (不失一般性, 仍记为 V_n), 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时, $V_n \rightarrow V$ 在 $C_0^1(\bar{\Omega})$ 上成立, 且 $V \geq 0 (V \not\equiv 0)$, $x \in \bar{\Omega}$. 在 (15) 式中, 令 $n \rightarrow \infty$ 得

$$\begin{cases} -\Delta V = rV, & x \in \Omega \\ V = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

由极大值原理知 $V > 0$, $x \in \Omega$. 因此 $r = \lambda_1$, 与 $r > \lambda_1$ 矛盾.

3) 假设 $(\hat{u}, \hat{v}) = (0, 0)$, 类似于上面的方法, 同样得出矛盾.

因此, $C - \{(\bar{a}; 0, \theta_r^*)\} \subset P$. 由此得出 (i) 不成立. 另一方面, 不妨取 (iii) 中 $\bar{Z} = R(I - K(\bar{a})) = (N(I - K^*(\bar{a})))^\perp = \{(\omega, \chi) \in X; \int_\Omega -\omega \Delta \phi_1 dx = 0\}$, 其中 $N(I - K^*(\bar{a})) = \text{span}\{(-\Delta \phi_1, 0)\}$. 若 C 包含一个点 $(a; u, v) \in \mathbb{R}^+ \times (\bar{Z} \setminus \{0\})$, 则有 $\int_\Omega -u \Delta \phi_1 dx = 0$, 这与 $\int_\Omega s(\phi_1 + \phi(s)) \left(\bar{a} - \frac{m}{b} - \frac{c\theta_r^*}{1 + \beta_r^*} \right) \phi_1 dx \neq 0 (s > 0)$ 矛盾. 因此 (iii) 也不成立. 由引理 2, L^p 估计和 Sobolev 嵌入定理知, 存在常数 $M' > 0$, 使得 $\|u\|, \|v\| \leq M'$. 所以 C 在正锥 P 内只能沿参数 a 延伸到 ∞ .

类似地, 定理 2 给出的局部分歧也可以延拓为全局分歧, 下面主要对全局分歧的具体走向作一下说明.

定理 4 设 $m < \min\{b^2, ab\}$, $\lambda_1 + \frac{m}{b} < a < \lambda_1 + \frac{m}{b} + \frac{c}{\beta}$, 则由定理 2 给出的正分歧解与半平凡分支 $H_1 = \{(r; 0, \theta_r^*)\}$ 相连接.

证 令 H 为系统 (3) 由 $(\tilde{r}; \theta_a^*, 0)$ 出发的解曲线, 且在 $(\tilde{r}; \theta_a^*, 0)$ 的小邻域内 $H \subset P$. 因此根据全局分歧定理^[15]和文献[16-17]的研究知, 分支 $H - \{(\tilde{r}; \theta_a^*, 0)\}$ 满足下列条件之一:

- (i) H 连接了分歧点 $(\hat{r}; \theta_a^*, 0)$ 和 $(\tilde{r}; \theta_a^*, 0)$, 其中 $\hat{r} \neq \tilde{r}$ 且 $I - K(\hat{r})$ 不可逆;
- (ii) H 在 $\mathbb{R}^+ \times X$ 内从点 $(\tilde{r}; \theta_a^*, 0)$ 延伸至 ∞ ;
- (iii) H 包含了一个点 $(r; u, v) \in \mathbb{R}^+ \times (\bar{Z} \setminus \{0\})$, 其中 $\bar{Z}$ 是 $N(I - K^*(\tilde{r}))$ 的补空间.

下面证明 $H - \{(\tilde{r}; \theta_a^*, 0)\} \not\subset P$. 利用反证法, 假设 $H - \{(\tilde{r}; \theta_a^*, 0)\} \subset P$, 则条件 (i) 不成立. 类似于定理 3 中 (ii) 和 (iii) 的证明知, (iii) 不成立, 且存在 $M' > 0$, 使得当 $(u, v) \in H$ 时, $\|u\|, \|v\| \leq M'$. 另一方面, 由引理 4 知, r 是有界的, 故 (ii) 也不成立. 因此 $H - \{(\tilde{r}; \theta_a^*, 0)\} \not\subset P$, 于是存在点 $(\hat{r}; u^*, v^*) \in \{H - (\tilde{r}; \theta_a^*, 0)\} \cap \partial P$ 和序列 $\{(r_n; u_n^*, v_n^*)\} \subset H \cap P$, $u_n^* > 0$, $v_n^* > 0$, 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时, $(r_n; u_n^*, v_n^*) \rightarrow (\hat{r}; u^*, v^*)$. 依据极大值原理易知, (u^*, v^*) 有以下 3 种可能:

- 1) $(u^*, v^*) = (\theta_a^*, 0)$;
- 2) $(u^*, v^*) = (0, 0)$;
- 3) $(u^*, v^*) = (0, \theta_r^*)$.

假设 $(u^*, v^*) = (\theta_a^*, 0)$, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, $(r_n; u_n^*, v_n^*) \rightarrow (\hat{r}; \theta_a^*, 0)$. 令 $V_n^* = \frac{v_n^*}{\|v_n^*\|_\infty}$, 那么 V_n^* 满足

$$\begin{cases} -\Delta V_n^* = V_n^* \left(r_n - v_n^* - \frac{ev_n^*}{k + u_n^*} \right), & x \in \Omega \\ V_n^* = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (16)$$

根据 L^p 估计和 Sobolev 嵌入定理知, 存在 V_n^* 的一个收敛子列 (不失一般性, 仍记为 V_n^*), 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时, 在 $C_0^1(\bar{\Omega})$ 上有 $V_n^* \rightarrow V^*$ 成立, 且 $V^* \geq 0 (V^* \not\equiv 0)$, $x \in \bar{\Omega}$. 因此在 (16) 式中, 令 $n \rightarrow \infty$ 得

$$\begin{cases} -\Delta V^* = \hat{r}V^*, & x \in \Omega \\ V^* = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

由极大值原理可得 $V^* > 0$, $x \in \Omega$. 因此 $\hat{r} = \tilde{r}$ 与 $\hat{r} \neq \tilde{r}$ 矛盾.

假设 $(u^*, v^*) = (0, 0)$, 与上面的方法类似, 同样可得出矛盾.

因此 $(u^*, v^*) = (0, \theta_r^*)$, 即 H 与 H_1 连接于点 $(\hat{r}; 0, \theta_r^*)$.

注 2 定理 4 说明, $(\hat{r}; 0, \theta_r^*)$ 是 $H_1 = \{(r; 0, \theta_r^*)\}$ 上的一个分歧点. 因为 $(\tilde{a}; 0, \theta_r^*)$ 是半平凡解分支 $\{(a; 0, \theta_r^*)\}$ 上的分歧点, 所以 $\hat{r}$ 恰好由 $a = \lambda_1 \left(\frac{m}{b} + \frac{c\theta_r^*}{1 + \beta\theta_r^*} \right)$ 来决定. 因此, 我们可以得到系统 (3) 正解存在的一个充分条件, 即有下面的结论成立.

定理 5 设 $m < \min\{b^2, ab\}$, $\lambda_1 + \frac{m}{b} < a < \lambda_1 + \frac{m}{b} + \frac{c}{\beta}$. 若 $\tilde{r} < r < \hat{r}$, 则系统 (3) 至少存在一个正解.

4 局部分歧解的稳定性

本节主要利用特征值线性扰动理论和稳定性定理^[18-19] 分别讨论分歧点 $(\tilde{a}; 0, \theta_r^*)$ 和 $(\tilde{r}; \theta_r^*, 0)$ 附近分歧解的稳定性. 为了研究方便, 引入下列记号:

$$X_1 = [C^{2,\sigma}(\bar{\Omega}) \times C^{2,\sigma}(\bar{\Omega})] \cap X$$

$$Y = C^\sigma(\bar{\Omega}) \times C^\sigma(\bar{\Omega}), \quad 0 < \sigma < 1$$

$i: X_1 \longrightarrow Y$ 为由 X_1 到 Y 的包含映射.

引理 5 0 是 $L(\tilde{a}; 0, \theta_r^*)$ 的 i -单重特征值.

证 由定理 1 的证明易知, $N(L(\tilde{a}; 0, \theta_r^*)) = \text{span}\{(\phi_1, \phi_1)\}$, $\text{codim } R(L(\tilde{a}; 0, \theta_r^*)) = 1$, 且 $R(L(\tilde{a}; 0, \theta_r^*)) = \{(\xi, \eta) \in X: \int_{\Omega} \xi \phi_1 dx = 0\}$. 又因为 $i(\phi_1, \phi_1) \notin R(L(\tilde{a}; 0, \theta_r^*))$, 故 0 是 $L(\tilde{a}; 0, \theta_r^*)$ 的 i -单重特征值.

引理 6 0 是 $L(\tilde{a}; 0, \theta_r^*)$ 实部最大的特征值, 其它特征值均在左半复平面上.

证 反证法. 假设 λ_0 是 $L(\tilde{a}; 0, \theta_r^*)$ 实部大于 0 的特征值, (ξ, η) 是相应的特征函数, 则 $L(\tilde{a}; 0, \theta_r^*)(\xi, \eta) = \lambda_0(\xi, \eta)$, 即

$$\begin{cases} \Delta \xi + \left(\tilde{a} - \frac{m}{b} - \frac{c\theta_r^*}{1 + \beta\theta_r^*} \right) \xi = \lambda_0 \xi, & x \in \Omega \\ \Delta \eta + \left(r - 2\theta_r^* - \frac{2c\theta_r^*}{k} \right) \eta + \frac{e(\theta_r^*)^2}{k^2} \xi = \lambda_0 \eta, & x \in \Omega \\ \xi = \eta = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

若 $\xi \equiv 0$, 则 λ_0 是算子 $-L_0$ 的一个特征值, 其中 L_0 由引理 3 给出, 从而 $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ 且 $\lambda_0 < 0$, 矛盾, 故 $\xi \not\equiv 0$,

于是 λ_0 是算子 $\Delta + \left(\tilde{a} - \frac{m}{b} - \frac{c\theta_r^*}{1 + \beta\theta_r^*} \right) I$ 的一个特征值. 由于 $\tilde{a} = \lambda_1 \left(\frac{m}{b} + \frac{c\theta_r^*}{1 + \beta\theta_r^*} \right)$, 故 0 是 $\Delta + \left(\tilde{a} - \frac{m}{b} - \frac{c\theta_r^*}{1 + \beta\theta_r^*} \right) I$ 的主特征值, 从而有 $\lambda_0 \leq 0$, 所以假设不成立. 因此 0 是 $L(\tilde{a}; 0, \theta_r^*)$ 实部最大的特征值, 其它特征值均在左半复平面上.

由引理 5、引理 6 和文献[18-19] 知, 存在分别定义在 $\tilde{a}$ 和 0 邻域内的 C^1 函数 $a \longrightarrow (\gamma(a), S(a))$, $s \longrightarrow (\zeta(s), W(s))$, 使得 $(\gamma(\tilde{a}), S(\tilde{a})) = (0, (\phi_1, \phi_1)) = (\zeta(0), W(0))$, 并且

$$L(a; 0, \theta_r^*)S(a) = \gamma(a)S(a), \quad |a - \tilde{a}| \ll 1$$

$$L(a(s); u(s), v(s))W(s) = \zeta(s)W(s), \quad 0 < s \ll 1$$

其中 $S(a) = (u_1(a), u_2(a))$, $W(s) = (v_1(s), v_2(s))$. 由于 $\gamma'(\tilde{a}) \neq 0$, 又若 $\zeta(s) \neq 0$, 则

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{sa'(s)\gamma'(\tilde{a})}{\zeta(s)} = -1$$

这里 $a'(s)$ 是 $a(s)$ 关于 s 的导数, $\gamma'(\tilde{a})$ 是 $\gamma(a)$ 关于 a 在 $a = \tilde{a}$ 处的导数.

分歧解 $(u(s), v(s))$ 的稳定性完全由 $\zeta(s)$ 的符号决定. 若 $\zeta(s) < 0$, 则它们是稳定的; 若 $\zeta(s) > 0$, 则它们是不稳定的. 另一方面, $\zeta(s)$ 与 $sa'(s)\gamma'(\tilde{a})$ 的符号相反, 因此根据 $sa'(s)\gamma'(\tilde{a})$ 的符号可以得出分歧解 $(u(s), v(s))$ 的稳定性.

引理 7 $\gamma'(\tilde{a}) > 0$.

证 由 $L(a; 0, \theta_r^*)S(a) = \gamma(a)S(a)$ 知

$$\begin{cases} \Delta u_1 + \left(a - \frac{m}{b} - \frac{c\theta_r^*}{1 + \beta_r^*}\right)u_1 = \gamma(a)u_1, & x \in \Omega \\ \Delta u_2 + \left(r - 2\theta_r^* - \frac{2e\theta_r^*}{k}\right)u_2 + \frac{e(\theta_r^*)^2}{k^2}u_1 = \gamma(a)u_2, & x \in \Omega \\ u_1 = u_2 = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

由于 $|a - \tilde{a}| \ll 1$, 所以当 a 充分接近 $\tilde{a}$ 时, $|\gamma(a)| \ll 1$. 若 $u_1 \equiv 0$, 则 $u_2 \equiv 0$, 矛盾, 故 $u_1 \not\equiv 0$. 因此, $\gamma(a)$ 是算子 $\Delta + \left(a - \frac{m}{b} - \frac{c\theta_r^*}{1 + \beta_r^*}\right)I$ 的特征值. 因为 $\phi_1 > 0$, 所以只要 $|a - \tilde{a}| \ll 1$, 则 $u_1(a) > 0$, 由此可得 $\gamma(a)$ 是 $\Delta + \left(a - \frac{m}{b} - \frac{c\theta_r^*}{1 + \beta_r^*}\right)I$ 的主特征值, 且当 $|a - \tilde{a}| \ll 1$ 时, $\gamma(a)$ 关于 a 单调递增. 又 $\gamma'(\tilde{a}) \neq 0$, 所以 $\gamma'(\tilde{a}) > 0$.

定理 6 令

$$Q = \int_{\Omega} \left(1 - \frac{m}{b^2} - \frac{c\alpha\theta_r^*}{1 + \beta_r^*}\right)\phi_1^3 dx + \int_{\Omega} \frac{c\psi_1}{(1 + \beta_r^*)^2}\phi_1^2 dx$$

设 $r > \lambda_1$, $0 < s \ll 1$. 若 $Q > 0$, 则由定理 1 给出的分歧解 $(u(s), v(s))$ 是线性稳定的; 若 $Q < 0$, 则分歧解 $(u(s), v(s))$ 是不稳定的.

证 根据引理 7 及其上面的讨论知, 要证明分歧解的稳定性, 只需证明 $a'(0)$ 与 Q 同号. 把分歧解 $(a(s); u(s), v(s)) = (a(s); s(\phi_1 + \phi(s)), \theta_r^* + s(\psi_1 + \psi(s)))$ 代入系统 (3) 第一个方程, 再关于 s 在 $s = 0$ 处求导得

$$-\Delta\phi'(0) = \left(\tilde{a} - \frac{m}{b} - \frac{c\theta_r^*}{1 + \beta_r^*}\right)\phi'(0) + \left\{a'(0) - \left(1 - \frac{m}{b^2}\right)\phi_1 - \frac{c[\phi_1 - \alpha\theta_r^*\phi_1(1 + \beta_r^*)]}{(1 + \beta_r^*)^2}\right\}\phi_1 \quad (17)$$

在方程 (17) 两端同乘 ϕ_1 , 再在 Ω 上积分, 并利用 Green 公式得

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} \Delta\phi'(0)\phi_1 dx &= \int_{\Omega} \phi'(0) \left(\tilde{a} - \frac{m}{b} - \frac{c\theta_r^*}{1 + \beta_r^*}\right)\phi_1 dx + \\ &\quad \int_{\Omega} \left\{a'(0) - \left(1 - \frac{m}{b^2}\right)\phi_1 - \frac{c[\phi_1 - \alpha\theta_r^*\phi_1(1 + \beta_r^*)]}{(1 + \beta_r^*)^2}\right\}\phi_1^2 dx \end{aligned}$$

故

$$a'(0) \int_{\Omega} \phi_1^2 dx = \int_{\Omega} \left(1 - \frac{m}{b^2} - \frac{c\alpha\theta_r^*}{1 + \beta_r^*}\right)\phi_1^3 dx + \int_{\Omega} \frac{c\psi_1}{(1 + \beta_r^*)^2}\phi_1^2 dx$$

因此, $a'(0)$ 与 Q 同号. 于是, 若 $Q > 0$, 则 $a'(0) > 0$, 从而 $\zeta(s) < 0$ ($0 < s \ll 1$), 故结论成立.

注 3 显然在 Ω 上, $\phi_1, \psi_1 > 0$. 因为 $m < ab$, 所以若 $\frac{a}{b} + \frac{c\alpha}{\beta} < 1$, 则

$$\int_{\Omega} \left(1 - \frac{m}{b^2} - \frac{c\alpha\theta_r^*}{1 + \beta_r^*}\right)\phi_1^3 dx > \int_{\Omega} \left(1 - \frac{a}{b} - \frac{c\alpha}{\beta}\right)\phi_1^3 dx > 0$$

因此 $Q > 0$, 于是由定理 1 给出的分歧解是稳定的.

类似地, 由定理 2 给出的分歧解的稳定性由 J 的符号决定, 其中

$$J = \int_{\Omega} \left(1 + \frac{e}{k + \theta_a^*}\right)\varphi_1^3 dx$$

显然, $J > 0$. 因此可得下面的定理成立.

定理 7 设 $m < \min\{b^2, ab\}$ 且 $a > \lambda_1 + \frac{m}{b}$, 则当 $0 < s \ll 1$ 时, 由定理 2 给出的分歧解是无条件稳定的.

5 数值模拟

本节主要在一维情形下, 利用 Matlab 工具模拟系统 (3) 解的情况. 在一维空间 $\Omega = (0, 2\pi)$ 下, 系统 (3) 对应的抛物系统为

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = u(a - u) - \frac{mu}{u+b} - \frac{cuv}{(1+\alpha u)(1+\beta v)}, & x \in (0, 2\pi), t > 0 \\ v_t - v_{xx} = v\left(r - v - \frac{ev}{k+u}\right), & x \in (0, 2\pi), t > 0 \\ u(0, t) = u(2\pi, t) = 0, v(0, t) = v(2\pi, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = 2 |\sin(x)|, v(x, 0) = |\sin \frac{x}{2}|, & x \in (0, 2\pi) \end{cases} \quad (18)$$

通过计算可得 $\lambda_1 = 0.25$. 这里用 Crank-Nicolson 方法对(18)式的解 $(u(x, t), v(x, t))$ 进行数值模拟(图1), 其中参数 $a = 1.6, m = 0.23, b = 0.5, c = 1, \alpha = 0.5, \beta = 1, r = 0.8, e = 0.5, k = 1$ 均满足系统(3)正解存在的条件. 图1(a),(b)表明, 当 t 趋于100时, 食饵和捕食者的密度不再与时间有关, 系统达到了平衡的状态. 图1(c)表明, 在一定条件下, 食饵和捕食者可以共存.

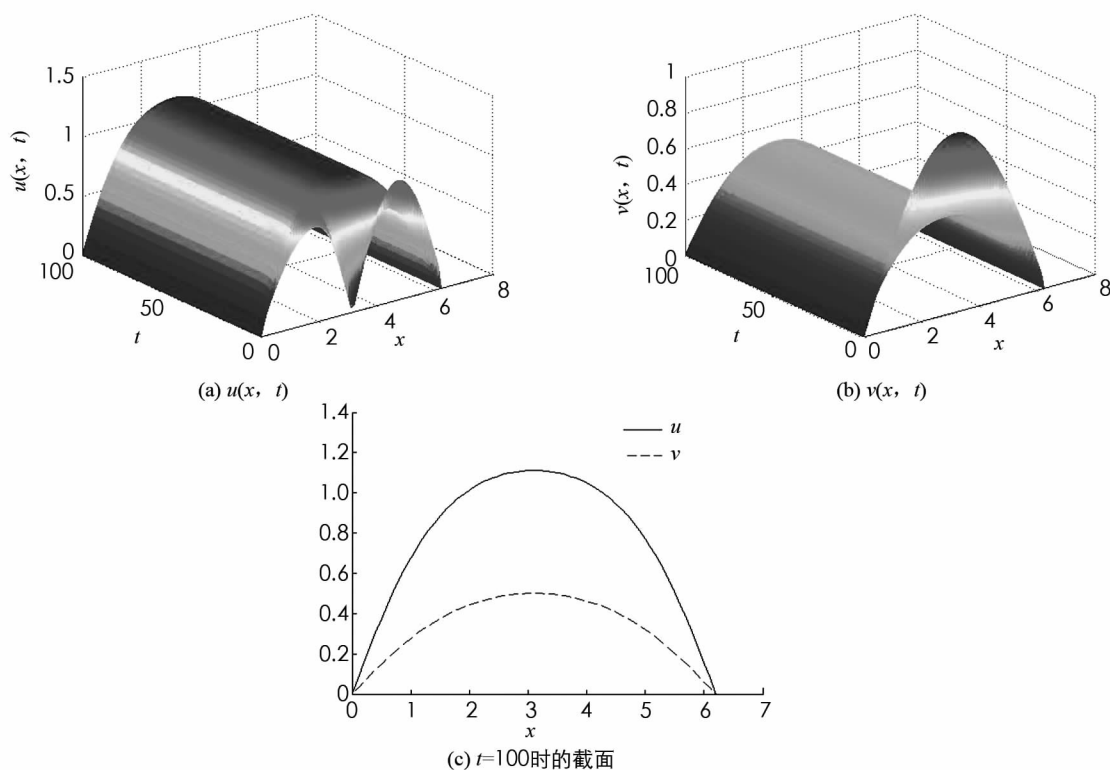


图 1 数值模拟图

参考文献:

- [1] ALLEE W C. Animal Aggregations: A Study in General Sociology [M]. Chicago: The University of Chicago Press, 1931.
- [2] WANG J F, SHI J P, WEI J J. Dynamics and Pattern Formation in a Diffusive Predator-Prey System with Strong Allee Effect in Prey [J]. Journal of Differential Equations, 2011, 251(4-5): 1276-1304.
- [3] CAI Y L, LIU W B, WANG Y B, et al. Complex Dynamics of a Diffusive Epidemic Model with Strong Allee Effect [J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2013, 14(4): 1907-1920.
- [4] CUI R H, SHI J P, WU B Y. Strong Allee Effect in a Diffusive Predator-Prey System with a Protection Zone [J]. Journal of Differential Equations, 2014, 256(1): 108-129.
- [5] DENNIS B. Allee Effects: Population Growth, Critical Density, and the Chance of Extinction [J]. Natural Resource Modeling, 1989, 3(4): 481-538.
- [6] YANG L, ZHONG S M. Dynamics of a Diffusive Predator-Prey Model with Modified Leslie-Gower Schemes and Additive Allee Effect [J]. Computational & Applied Mathematics, 2015, 34(2): 671-690.
- [7] ZHOU J, SHI J P. The Existence, Bifurcation and Stability of Positive Stationary Solutions of a Diffusive Leslie-Gower Predator-Prey Model with Holling-Type II Functional Responses [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2013, 405(2): 618-630.

[8] CHEN B, WANG M X. Qualitative Analysis for a Diffusive Predator-Prey Model [J]. Computers & Mathematics with Applications, 2008, 55(3): 339-355.

[9] LI H X. Asymptotic Behavior and Multiplicity for a Diffusive Leslie-Gower Predator-Prey System with Crowley-Martin Functional Response [J]. Computers & Mathematics with Applications, 2014, 68(7): 693-705.

[10] WU J H. Global Bifurcation of Coexistence State for the Competition Model in the Chemostat [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2000, 39(7): 817-835.

[11] 郝爱景, 周军. 具有非线性扩散项的捕食-食饵模型的多重性 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2017, 39(3): 88-94.

[12] 罗丽容, 周军. 一类带有分数型交错扩散的捕食-食饵模型的多解性研究 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2017, 39(3): 108-114.

[13] ZHOU J, MU C L. Positive Solutions for a Three-Trophic Food Chain Model with Diffusion and Beddington-Deangelis Functional Response [J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2011, 12(2): 902-917.

[14] CRANDALL M G, RABINOWITZ P H. Bifurcation from Simple Eigenvalues [J]. Journal of Functional Analysis, 1971, 8(2): 321-340.

[15] RABINOWITZ P H. Some Global Results for Nonlinear Eigenvalue Problems [J]. Journal of Functional Analysis, 1971, 7(3): 487-513.

[16] LÓPEZ-GÓMEZ J. Spectral Theory and Nonlinear Functional Analysis [M]. Boca Raton: Chapman & Hall, 2001.

[17] DANCER E N. Bifurcation from Simple Eigenvalues and Eigenvalues of Geometric Multiplicity One [J]. Bulletin of the London Mathematical Society, 2002, 34(5): 533-538.

[18] SMOLLER J. Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations [M]. New York: Springer, 1983.

[19] CRANDALL M G, RABINOWITZ P H. Bifurcation, Perturbation of Simple Eigenvalues, and Linearized Stability [J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1973, 52(2): 161-180.

Existence and Stability of Coexistence Solutions for a Predator-Prey Model with Additive Allee Effect

DAI Jing-yu^{1,2}, LI Yan-ling¹

1. School of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710119, China;
2. Linyi No. 1 Middle School, Linyi Shandong 276000, China

Abstract: In this paper, the existence and stability of coexistence solutions for a predator-prey diffusive model with additive Allee effect on prey have been investigated. Firstly, applying local bifurcation theory, local bifurcation solutions have been obtained which emanate from the semi-trivial solutions by regarding the birth rate of prey and predator as bifurcation parameters, respectively. Secondly, the local bifurcation has been extended by global bifurcation theory, and its trend been derived. Moreover, the sufficient conditions for the existence of positive solutions have been got. Thirdly, the stability of local bifurcation solutions has been discussed. Finally, some theoretical results have been verified and supplemented by the numerical simulation technique. The results indicate that the two species will coexist and the coexistence solutions are stable when the parameters satisfy certain conditions.

Key words: predator-prey model; additive Allee effect; bifurcation; stability; numerical simulation

责任编辑 张 杓