DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2020.11.003

一类变系数二阶离散 Neumann 边值问题正解的存在性①

杨晓梅，　路艳琼

西北师范大学 数学与统计学院，兰州 730070

摘要：应用锥上的不动点指数理论获得了二阶变系数离散 Neumann 边值问题

$$\begin{cases}\Delta^2 u(t-1)+q(t)u(t)=f(t,\ u(t)),\ t\in[1,\ T]_{\mathbb{Z}}\\ \Delta u(0)=0,\ \Delta u(T)=0\end{cases}$$

正解存在的条件，其中 $0\leqslant q(t)<2\left(1-\cos\frac{\pi}{2T}\right)$ 且 $q(t)\not\equiv 0$，f：$[1,\ T]_{\mathbb{Z}}\times\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}^+$ 连续，$[1,\ T]_{\mathbb{Z}}:=\{1,\ 2,\ \cdots,\ T\}$，$\mathbb{R}^+:=[0,\ \infty)$.

关　键　词：Neumann 边值问题；格林函数；正解；不动点定理

中图分类号：O175.8　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000-5471(2020)11-0018-09

Neumann 边值问题描述的是一类非常重要的物理现象，对此类问题的正解已经取得了很多结果[1-4]. 文献[5]运用锥上的不动点指数理论获得了二阶连续 Neumann 边值问题

$$\begin{cases}x''(t)+m^2(t)x(t)=f(t,\ x(t)),\ t\in(0,\ 1)\\ x'(0)=0,\ x'(1)=0\end{cases}$$

正解的存在性，其中 $m\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ 是一个常数. 文献[6]运用锥上的不动点指数理论获得了二阶变系数 Neumann 边值问题

$$\begin{cases}-u''(t)+a(t)u(t)=f(t,\ u(t)),\ t\in I\\ u'(0)=u'(1)=0\end{cases}$$

正解的存在性，其中 $I=[0,\ 1]$，$a(t)$，$f(t,\ u(t))$ 满足条件：

(A1) $a(t)$：$I\longrightarrow(0,\ +\infty)$ 连续并且 $0<\alpha\leqslant\beta<+\infty$，其中 $\alpha=\min\limits_{t\in I}a(t)$，$\beta=\max\limits_{t\in I}a(t)$；

(A2) $f(t,\ u)$：$I\times(0,\ +\infty)\longrightarrow(0,\ +\infty)$ 连续.

文献[7]运用不动点指数理论研究了二阶离散 Neumann 边值问题

$$\begin{cases}\Delta^2 u(t-1)+\rho u(t)+f(t,\ u(t))=0,\ t\in[1,\ T]_{\mathbb{Z}}\\ \Delta u(0)=\Delta u(T)=0\end{cases}$$

正解的存在性，其中 $0<\rho<2\left(1-\cos\frac{\pi}{2T}\right)$ 是常数，f：$[1,\ T]_{\mathbb{Z}}\times\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}^+$ 连续，$[1,\ T]_{\mathbb{Z}}:=\{1,\ 2,\ \cdots,\ T\}$，$T\geqslant 2$，$\mathbb{R}^+:=[0,\ \infty)$.

当 ρ 为正常数时，可以用常数变易法得到此类相应线性问题的格林函数为

① 收稿日期：2019-06-29

基金项目：国家自然科学基金青年项目(11801453，11901464)；西北师范大学青年教师科研能力提升计划(NWNU-LKQN2020-20).

作者简介：杨晓梅(1996-)，女，硕士研究生，主要从事差分方程及其应用的研究.

$$G(t,s)=\begin{cases}\dfrac{[\sin\theta t-\sin\theta(t-1)][\sin\theta(T+1-s)-\sin\theta(T-s)]}{\sin^2\theta}, & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T\\ \dfrac{[\sin\theta s-\sin\theta(s-1)][\sin\theta(T+1-t)-\sin\theta(T-t)]}{\sin^2\theta}, & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant T\end{cases}$$

其中 θ 满足 $\rho=2(1-\cos\theta)$ 且 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2T}$. 文献[8]运用不动点指数理论研究了二阶变系数离散 Neumann 边值问题

$$\begin{cases}-\Delta[p(t-1)\Delta y(t-1)]+q(t)y(t)=f(t,y(t)),\ t\in[1,T]_{\mathbb{Z}}\\ \Delta y(0)=\Delta y(T)=0\end{cases}$$

正解的存在性，其中 $p(t)>0$，$q(t)>0$，$q(t)\not\equiv 0$ 且 $T\geqslant 2$ 是一个整数.

受文献[5-8]的启发，我们考察二阶变系数 Neumann 边值问题

$$\begin{cases}\Delta^2 u(t-1)+q(t)u(t)=f(t,u(t)),\ t\in[1,T]_{\mathbb{Z}}\\ \Delta u(0)=0,\ \Delta u(T)=0\end{cases}\tag{1}$$

是否存在定号的格林函数，其中 $q(t)$，f 满足如下条件：

(H1) 设 $q(t)>0$，$t\in[1,T]_{\mathbb{Z}}$ 且 $0<q(t)\leqslant\max\limits_{t\in[1,T]_{\mathbb{Z}}}q(t)=\bar{q}<2\left(1-\cos\dfrac{\pi}{2T}\right)$；

(H2) $f:[1,T]_{\mathbb{Z}}\times[0,+\infty)\longrightarrow[0,+\infty)$ 连续.

在假设条件(H1)下，利用二阶差分方程非共轭理论以及比较定理可以证明问题(1)的格林函数定号，基于此，获得了问题(1)正解存在的条件.

1　预备知识

令 $u(t)$ 是定义在 $[a,b]_{\mathbb{Z}}$ 上的函数，则 $\Delta u(t)=u(t+1)-u(t)$ 称为 $u(t)$ 在 t 上的差分，Δ 为前向差分算子，其中 $[a,b]_{\mathbb{Z}}=\{a,a+1,\cdots,b\}$，当 $b<a$ 时，规定 $\sum\limits_{s=a}^{b}u(s)=0$.

不难计算线性初值问题

$$\begin{cases}\Delta^2 v(t-1)+\bar{q}v(t)=0,\ t\in[1,T]_{\mathbb{Z}}\\ \Delta v(0)=0,\ v(0)=1\end{cases}\tag{2}$$

有唯一解

$$v(t)=\frac{\sin\theta\,t-\sin\theta(t-1)}{\sin\theta},\ t\in[0,T+1]_{\mathbb{Z}}$$

易证当 $0<\bar{q}<2\left(1-\cos\dfrac{\pi}{2T}\right)$，$0<\theta=\arccos\left(1-\dfrac{\bar{q}}{2}\right)<\dfrac{\pi}{2T}$ 时，$v(t)>0$.

线性初值问题

$$\begin{cases}\Delta^2\omega(t-1)+\bar{q}\omega(t)=0,\ t\in[1,T]_{\mathbb{Z}}\\ \Delta\omega(T)=0,\ \omega(T)=1\end{cases}\tag{3}$$

有唯一解

$$\omega(t)=\frac{\sin\theta(T+1-t)-\sin\theta(T-t)}{\sin\theta},\ t\in[0,T+1]_{\mathbb{Z}}$$

易证当 $0<\theta=\arccos\left(1-\dfrac{\bar{q}}{2}\right)<\dfrac{\pi}{2T}$ 时，$\omega(t)>0$.

下面讨论线性变系数问题(1)的格林函数的表达式及性质，首先定义线性算子

$$Ly(t):=\Delta(p(t-1)\Delta y(t-1))+q(t)y(t)$$

其中 $p(t):[1,T]_{\mathbb{Z}}\longrightarrow(0,\infty)$，$q(t):[1,T]_{\mathbb{Z}}\longrightarrow\mathbb{R}$.

定义 1[9]　设 y 是

$$\Delta(p(t-1)\Delta y(t-1))+q(t)y(t)=0,\ t\in[1,T]_{\mathbb{Z}}$$

的一个定义在 $[0,\infty)_{\mathbb{Z}}$ 上的解，若下列之一成立：

(i) 当 $t_0 = 0$ 满足 $y(t_0) = 0$；

(ii) 当 $t_0 > 0$ 满足 $y(t_0) = 0$ 或 $y(t_0 - 1)y(t_0) < 0$，

则称 t_0 为 y 的一个广义零点.

定义 2[9]　若

$$Ly(t) = 0$$

在 $[a, b+2]_{\mathbb{Z}}$ 上至多有一个广义零点，则称差分方程

$$\Delta(p(t-1)\Delta y(t-1)) + q(t)y(t) = 0$$

在 $[a, b+2]_{\mathbb{Z}}$ 上非共轭.

引理 1[9]　若

$$Ly(t) + q_1(t)y(t) = 0$$

在 $[a, b+2]_{\mathbb{Z}}$ 上非共轭且 $q_2(t) \leqslant q_1(t)$，$t \in [a+1, b+1]_{\mathbb{Z}}$，则

$$Ly(t) + q_2(t)y(t) = 0$$

在 $[a, b+2]_{\mathbb{Z}}$ 上非共轭.

引理 2[9]　令 $Ly(t) = 0$，$t \in [a, b+2]_{\mathbb{Z}}$ 且 $u(t)$，$v(t)$ 满足

$$\begin{cases} Lu(t) \geqslant Lv(t), \ t \in [a+1, b+1]_{\mathbb{Z}} \\ u(a) = v(a) \\ u(a+1) = v(a+1) \end{cases} \tag{4}$$

则 $u(t) \geqslant v(t)$，$t \in [a, b+2]_{\mathbb{Z}}$.

引理 3　设(H1)成立. 若 φ 和 ψ 分别是线性初值问题

$$\begin{cases} \Delta^2 \varphi(t-1) + q(t)\varphi(t) = 0, \ t \in [1, T]_{\mathbb{Z}} \\ \Delta\varphi(0) = 0, \ \varphi(0) = 1 \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} \Delta^2 \psi(t-1) + q(t)\psi(t) = 0, \ t \in [1, T]_{\mathbb{Z}} \\ \Delta\psi(T) = 0, \ \psi(T) = 1 \end{cases}$$

的唯一解，则

(i) $\varphi(t) > 0$，$t \in [0, T+1]_{\mathbb{Z}}$ 且 $\Delta\varphi(t) < 0$，$t \in [1, T]_{\mathbb{Z}}$；

(ii) $\psi(t) > 0$，$t \in [0, T+1]_{\mathbb{Z}}$ 且 $\Delta\psi(t) > 0$，$t \in [1, T]_{\mathbb{Z}}$.

证　(i) 由问题(2)和(H1)可知

$$\frac{\sin\theta t - \sin\theta(t-1)}{\sin\theta} > 0, \ t \in [0, T+1]_{\mathbb{Z}} \tag{5}$$

由 $v(t) > 0$ 和定义 2 可知，方程

$$\Delta^2 y(t-1) + \bar{q}y(t) = 0$$

在 $[0, T+1]_{\mathbb{Z}}$ 上非共轭且 $q(t) < \bar{q}$，结合引理 1 得方程

$$\Delta^2 y(t-1) + q(t)y(t) = 0$$

在 $[0, T+1]_{\mathbb{Z}}$ 上非共轭.

令 $p(t) = 1$，则 $Ly(t) = \Delta^2 y(t-1) + q(t)y(t)$，下证 $L\varphi(t) \geqslant Lv(t)$. 事实上，

$$Lv(t) = \Delta^2 v(t-1) + q(t)v(t) = -\bar{q}v(t) + q(t)v(t) = (q(t) - \bar{q})v(t) \leqslant 0 = L\varphi(t)$$

故由引理 2 得

$$\varphi(t) \geqslant v(t) > 0 \tag{6}$$

另一方面 $\Delta^2\varphi(t-1) = -q(t)\varphi(t) < 0$，$t \in [1, T]_{\mathbb{Z}}$，得 $\Delta\varphi(t) < \Delta\varphi(t-1)$，$t \in [1, T]_{\mathbb{Z}}$，结合 $\Delta\varphi(0) = 0$，可知

$$\Delta\varphi(t) < \Delta\varphi(0) = 0, \ t \in [1, T]_{\mathbb{Z}} \tag{7}$$

(ii) 结合问题(3)解的正性以及(i)的证明方法可得结论，此处略去证明.

引理 4　设 $h: [1, T]_{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{R}$，则线性边值问题

$$\begin{cases}\Delta^2 u(t-1)+q(t)u(t)=h(t),\ t\in[1,T]_{\mathbb{Z}}\\ \Delta u(0)=0,\ \Delta u(T)=0\end{cases}\tag{8}$$

存在唯一解

$$u(t)=\sum_{s=1}^{T}G(t,s)h(s),\ t\in[0,T+1]_{\mathbb{Z}}\tag{9}$$

其中

$$G(t,s)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(t)\psi(s)}{\psi(1)-\psi(0)},\ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T\\[2ex] \dfrac{\varphi(s)\psi(t)}{\psi(1)-\psi(0)},\ 0\leqslant t\leqslant s\leqslant T\end{cases}\tag{10}$$

为相应齐次边值问题的格林函数且 $\psi(1)-\psi(0)>0$.

证　首先，证明问题(8)的唯一解可用式(9)表示. 由引理 3 知方程

$$\Delta^2 u(t-1)+q(t)u(t)=0$$

有两个线性无关解 φ,ψ. 因为

$$\psi(t-1)\varphi(t)-\varphi(t-1)\psi(t)\neq 0$$

故应用常数变易法不难计算问题(8)的唯一解为

$$u(t)=\sum_{s=1}^{T}G(t,s)h(s),\ t\in[0,T+1]_{\mathbb{Z}}$$

其中 $G(t,s)$ 如式(10)所示.

其次，验证式(9)定义的函数是问题(8)的一个解. 由式(9)知

$$u(t)=\sum_{s=1}^{t-1}\frac{\varphi(t)\psi(s)h(s)}{\psi(1)-\psi(0)}+\sum_{s=t}^{T}\frac{\varphi(s)\psi(t)h(s)}{\psi(1)-\psi(0)}$$

$$u(t+1)=\sum_{s=1}^{t}\frac{\varphi(t+1)\psi(s)h(s)}{\psi(1)-\psi(0)}+\sum_{s=t+1}^{T}\frac{\varphi(s)\psi(t+1)h(s)}{\psi(1)-\psi(0)}$$

$$u(t-1)=\sum_{s=1}^{t-2}\frac{\varphi(t-1)\psi(s)h(s)}{\psi(1)-\psi(0)}+\sum_{s=t-1}^{T}\frac{\varphi(s)\psi(t-1)h(s)}{\psi(1)-\psi(0)}$$

从而

$$\begin{aligned}&\Delta^2 u(t-1)+q(t)u(t)-h(t)=u(t+1)+(q(t)-2)u(t)+u(t-1)-h(t)=\\&\Big[\frac{(\Delta^2\varphi(t-1)+q(t)\varphi(t))}{\psi(1)-\psi(0)}\sum_{s=1}^{t-2}\psi(s)h(s)+\frac{(\Delta^2\psi(t-1)+q(t)\psi(t))}{\psi(1)-\psi(0)}\sum_{s=t+1}^{T}\varphi(s)h(s)+\\&\frac{(\Delta^2\psi(t-1)+q(t)\psi(t))}{\psi(1)-\psi(0)}\varphi(t-1)h(t-1)+\frac{(\Delta^2\psi(t-1)+q(t)\psi(t))}{\psi(1)-\psi(0)}\varphi(t)h(t)+\\&\frac{\psi(t)\varphi(t-1)h(t)-\psi(t-1)\varphi(t)h(t)}{\psi(1)-\psi(0)}\Big]-h(t)=\\&h(t)-h(t)=0\end{aligned}$$

引理 5　格林函数 $G(t,s)$ 具有以下性质：

(i) $G(t,s)>0,\ (t,s)\in[1,T]_{\mathbb{Z}}\times[1,T]_{\mathbb{Z}}$；

(ii) $G(t,s)\geqslant\dfrac{\sigma^2}{\psi(1)-\psi(0)},\ (t,s)\in[1,T]_{\mathbb{Z}}\times[1,T]_{\mathbb{Z}}$，其中 $\sigma=\dfrac{\sin\theta T-\sin\theta(T-1)}{\sin\theta}$；

(iii) $G(t,s)\leqslant\dfrac{1}{\psi(1)-\psi(0)},\ (t,s)\in[1,T]_{\mathbb{Z}}\times[1,T]_{\mathbb{Z}}$；

(iv) $\sigma G(s,s)\leqslant G(t,s)\leqslant G(s,s),\ (t,s)\in[1,T]_{\mathbb{Z}}\times[1,T]_{\mathbb{Z}}$，其中 σ 定义见(ii).

证　(i) 由引理 3 知 $\varphi(t)>0,\ \psi(t)>0,\ t\in[0,T+1]_{\mathbb{Z}}$ 且 $\Delta\psi(t)>0$，即 $\psi(1)-\psi(0)>0$，从而可得 $G(t,s)>0,\ (t,s)\in[1,T]_{\mathbb{Z}}\times[1,T]_{\mathbb{Z}}$.

(ii) 由引理 3 和式(6)以及 $\Delta\varphi(t)<0,\ t\in[1,T]_{\mathbb{Z}},\ \varphi(0)=1$ 知

$$\sigma := \frac{\sin\theta T - \sin\theta(T-1)}{\sin\theta} = v(T) \leqslant v(t) \leqslant \varphi(t) \leqslant 1,\ t \in [1,\ T]_{\mathbb{Z}} \tag{11}$$

其中 $0 < \theta = \arccos\left(1 - \frac{\bar{q}}{2}\right) < \frac{\pi}{2T}$.

同理可得

$$\sigma := \frac{\sin\theta T - \sin\theta(T-1)}{\sin\theta} = \omega(1) \leqslant \omega(t) \leqslant \psi(t) \leqslant 1,\ t \in [1,\ T]_{\mathbb{Z}} \tag{12}$$

显然 $0 < \sigma < 1$.

从而对 $\forall(t,\ s) \in [1,\ T]_{\mathbb{Z}} \times [1,\ T]_{\mathbb{Z}}$ 得

$$G(t,\ s) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(t)\psi(s)}{\psi(1)-\psi(0)}, & 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T \\ \dfrac{\varphi(s)\psi(t)}{\psi(1)-\psi(0)}, & 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant T \end{cases} \geqslant \frac{\sigma^2}{\psi(1)-\psi(0)}$$

(iii) 由式(11) 和式(12) 可得

$$G(t,\ s) \leqslant \frac{1}{\psi(1)-\psi(0)},\ (t,\ s) \in [1,\ T]_{\mathbb{Z}} \times [1,\ T]_{\mathbb{Z}}$$

(iv) 由式(11) 和式(12) 以及格林函数 G 的表达式(10) 易得

$$\sigma \leqslant \frac{G(t,\ s)}{G(s,\ s)} = \begin{cases} \dfrac{\varphi(t)}{\varphi(s)}, & 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T \\ \dfrac{\psi(t)}{\psi(s)}, & 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant T \end{cases} \leqslant 1,\ (t,\ s) \in [1,\ T]_{\mathbb{Z}} \times [1,\ T]_{\mathbb{Z}}$$

故不等式

$$\sigma G(s,\ s) \leqslant G(t,\ s) \leqslant G(s,\ s),\ (t,\ s) \in [1,\ T]_{\mathbb{Z}} \times [1,\ T]_{\mathbb{Z}}$$

成立，其中 $0 < \sigma < 1$.

定义函数空间

$$E = \{u \mid u: [0,\ T+1]_{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{R},\ \Delta u(0) = \Delta u(T) = 0\}$$

则 E 按范数 $\|u\| = \max\limits_{t \in [0,\ T+1]_{\mathbb{Z}}} |u(t)|$ 构成 Banach 空间.

定义锥

$$P = \{u \in E \mid u(t) \geqslant 0,\ u(t) \geqslant \sigma\|u\|,\ t \in [0,\ T+1]_{\mathbb{Z}}\}$$

其中 $0 < \sigma = \dfrac{\sin\theta T - \sin\theta(T-1)}{\sin\theta} < 1$，则 P 是 E 中的一个非负锥. 选取 $m > 0$，记 $B_m = \{u \in E \mid \|u\| < m\}$.

定义算子

$$Fu(t) = \sum_{s=1}^{T} G(t,\ s)u(s),\ t \in [0,\ T+1]_{\mathbb{Z}}$$

$$Au(t) = \sum_{s=1}^{T} G(t,\ s)f(s,\ u(s)),\ t \in [0,\ T+1]_{\mathbb{Z}}$$

显然 $A, F: E \longrightarrow E$ 是全连续的. 易证 $u = u(t)$ 是问题(1) 的解当且仅当 u 是算子 A 的不动点.

引理 6 假定(H1),(H2) 成立. 则 $A(P) \subset P$，$F(P) \subset P$ 且 $A, F: P \longrightarrow P$ 全连续.

证 对 $\forall t \in [0,\ T+1]_{\mathbb{Z}}$，由引理 5 的(iv) 知

$$(Au(t)) = \sum_{s=1}^{T} G(t,\ s)f(s,\ u(s)) \geqslant \sigma \sum_{s=1}^{T} G(s,\ s)f(s,\ u(s)) \geqslant \sigma \max_{t \in [0,\ T+1]_{\mathbb{Z}}} \sum_{s=1}^{T} G(t,\ s)f(s,\ u(s)) = \sigma\|Au\|$$

故 $A(P)\subset P$. 同理可证 $F(P)\subset P$. 又因为 E 为有限维空间，所以易证 $A,F: P\longrightarrow P$ 全连续.

引理 7[10]　设 E 为实 Banach 空间，P 为 E 中的一个锥，$\Omega(P)$ 是 P 上的有界开子集，算子 $A:\overline{\Omega(P)}\longrightarrow P$ 全连续. 若存在 $u_0\in P\backslash\{\theta\}$，使得

$$u-Au\neq\mu u_0,\ \forall\, u\in\partial\Omega(P),\ \mu\geqslant 0$$

则 $i(A,\Omega(P),P)=0$.

引理 8[10]　设 E 为实 Banach 空间，P 为 E 中的一个锥，$\Omega(P)$ 是 P 上的有界开子集，算子 $A:\overline{\Omega(P)}\longrightarrow P$ 全连续. 若

$$\mu Au\neq u,\ \forall\, u\in\partial\Omega(P),\ 0<\mu\leqslant 1$$

则 $i(A,\Omega(P),P)=1$.

2　主要结果及其证明

为了叙述方便，引入如下的记号：

$$f_0=\liminf_{u\longrightarrow 0^+}\min_{t\in[0,\,T+1]_{\mathbb{Z}}}\frac{f(t,u)}{u},\ f^0=\limsup_{u\longrightarrow 0^+}\max_{t\in[0,\,T+1]_{\mathbb{Z}}}\frac{f(t,u)}{u}$$

$$f_\infty=\liminf_{u\longrightarrow +\infty}\min_{t\in[0,\,T+1]_{\mathbb{Z}}}\frac{f(t,u)}{u},\ f^\infty=\limsup_{u\longrightarrow +\infty}\max_{t\in[0,\,T+1]_{\mathbb{Z}}}\frac{f(t,u)}{u}$$

记 λ_1 为线性特征值问题

$$\begin{cases}\Delta^2 u(t-1)+q(t)u(t)=\lambda u(t),\ t\in[1,T]_{\mathbb{Z}}\\ \Delta u(0)=\Delta u(T)=0\end{cases}\tag{13}$$

的主特征值.

引理 9　假定(H1) 成立，则算子 F 的谱半径 $r(F)>0$ 且 F 有一个相应于主特征值 $\lambda_1=(r(F))^{-1}$ 的正特征函数.

证　因为 $G(t,s)>0$，$(t,s)\in[0,T+1]_{\mathbb{Z}}\times[0,T+1]_{\mathbb{Z}}$. 故可取 $\chi\in E$，$\chi(t)\geqslant 0$，对 $\forall\, t\in[0,T+1]_{\mathbb{Z}}$，使得对某给定的 $t_0\in[0,T+1]_{\mathbb{Z}}$，有 $\chi(t_0)\geqslant 0$，从而

$$(F\chi)(t)=\sum_{s=1}^{T}G(t,s)\chi(s)>0,\ t\in[0,T+1]_{\mathbb{Z}}$$

故存在常数 $c>0$，使得

$$cF\chi(t)\geqslant\chi(t),\ t\in[0,T+1]_{\mathbb{Z}}$$

因此，由 Krein-Rutumn 定理[10] 可知，$r(F)>0$ 且算子 F 有一个相应于主特征值 $\lambda_1=(r(F))^{-1}$ 的正特征函数.

定理 1　假定(H1),(H2) 成立. 若

$$\frac{\lambda_1}{f_0}<1<\frac{\lambda_1}{f^\infty}$$

则问题(1) 至少存在一个正解.

证　由 $f_0>\lambda_1$ 知，存在 $\varepsilon>0$，$M_1>0$，使得

$$f(t,u)\geqslant(1+\varepsilon)\lambda_1 u,\ \forall\, 0\leqslant u\leqslant M_1,\ t\in[1,T]_{\mathbb{Z}}$$

记 φ_1 为算子 F 的相应于主特征值 λ_1 的正特征函数，即 $\varphi_1=\lambda_1 F\varphi_1$. 对任意的 $u\in\partial B_{M_1}\cap P$，得

$$(Au)(t)=\sum_{s=1}^{T}G(t,s)f(s,u(s))\geqslant$$

$$(1+\varepsilon)\lambda_1\sum_{s=1}^{T}G(t,s)u(s)=$$

$$(1+\varepsilon)\lambda_1(Fu)(t),\ t\in[1,T]_{\mathbb{Z}}$$

不妨设 A 在 $\partial B_{M_1}\cap P$ 上无不动点，否则，定理得证. 下证

$$u-Au\neq\mu\varphi_1,\ \forall\, u\in\partial B_{M_1}\cap P,\ \mu\geqslant 0\tag{14}$$

反设存在 $u_0\in\partial B_{M_1}\cap P$，$\mu_0\geqslant 0$，使得 $u_0-Au_0=\mu_0\varphi_1$，则

$$u_0 = Au_0 + \mu_0\varphi_1 \geqslant \mu_0\varphi_1,\ \mu_0 > 0$$

令

$$\bar{\mu} = \sup\{\mu \mid u_0 \geqslant \mu\varphi_1\}$$

显然，$\bar{\mu} \geqslant \mu_0 > 0$ 且 $u_0 \geqslant \bar{\mu}\varphi_1$. 由 $F(P) \subset P$ 知，

$$\lambda_1 Fu_0 \geqslant \bar{\mu}\lambda_1 F\varphi_1 = \bar{\mu}\varphi_1$$

因此

$$u_0 = Au_0 + \mu_0\varphi_1 \geqslant Au_0 \geqslant (1+\varepsilon)\lambda_1 Fu_0 \geqslant (1+\varepsilon)\bar{\mu}\varphi_1$$

这与 $\bar{\mu}$ 的定义矛盾，故式(14)成立. 由引理7知，

$$i(A,\ B_{M_1} \cap P,\ P) = 0 \tag{15}$$

由 $f^{\infty} < \lambda_1$ 知，存在 $r_2 > M_1$，$0 < \varepsilon < 1$，使得

$$f(t,\ u) \leqslant (1-\varepsilon)\lambda_1 u,\ \forall\, u \geqslant m_2,\ t \in [1,\ T]_{\mathbb{Z}} \tag{16}$$

取 $M_2 = \max\left\{2M_1,\ \dfrac{m_2}{\sigma}\right\}$，则对任意的 $u \in \partial B_{M_2} \cap P$，有 $u(t) \geqslant \sigma\|u\| = \sigma M_2 \geqslant m_2$.

不妨设 A 在 $\partial B_{M_2} \cap P$ 上无不动点，否则，定理得证. 下证

$$u \neq \mu Au,\ \forall\, u \in \partial B_{M_2} \cap P,\ 0 < \mu \leqslant 1 \tag{17}$$

反设存在 $u_1 \in \partial B_{M_2} \cap P$，$\mu_1 \in (0,\ 1]$，使得 $u_1 = \mu_1 Au_1$，则

$$u_1(t) = \mu_1 Au_1(t) = \mu_1 \sum_{s=1}^{T} G(t,\ s) f(s,\ u_1(s)) \leqslant$$

$$(1-\varepsilon)\lambda_1 \sum_{s=1}^{T} G(t,\ s) u_1(s) =$$

$$(1-\varepsilon)\lambda_1 Fu_1(t),\ t \in [1,\ T]_{\mathbb{Z}}$$

令 $\underline{\mu} = \inf\{u_1 \leqslant \mu\varphi_1\}$，则 $\underline{\mu} > 0$ 且 $u_1 \leqslant \underline{\mu}\varphi_1$. 由 $F(P) \subset P$ 知，

$$\lambda_1 Fu_1 \leqslant \underline{\mu}\lambda_1 F\varphi_1 = \underline{\mu}\varphi_1$$

因此

$$u_1 = \mu_1 Au_1 \leqslant (1-\varepsilon)\lambda_1 Fu_1 \leqslant (1-\varepsilon)\underline{\mu}\varphi_1$$

这与 $\underline{\mu}$ 的定义矛盾，故式(17)成立. 由引理8知，

$$i(A,\ B_{M_2} \cap P,\ P) = 1 \tag{18}$$

结合式(15)和式(18)根据不动点指数的区域可加性得

$$i(A,\ (B_{M_2} \cap P)\backslash(\overline{B}_{M_1} \cap P),\ P) = i(A,\ B_{M_2} \cap P,\ P) - i(A,\ B_{M_1} \cap P,\ P) = 1$$

因此，算子 A 在 $(B_{M_2} \cap P)\backslash(\overline{B}_{M_1} \cap P)$ 上至少存在一个不动点，即问题(1)至少存在一个正解.

定理2 假定(H1),(H2)成立. 若

$$\frac{\lambda_1}{f_{\infty}} < 1 < \frac{\lambda_1}{f^0}$$

则问题(1)至少存在一个正解.

证 由 $f^0 < \lambda_1$ 知，存在 $M_1 > 0$，$0 < \varepsilon < 1$，使得

$$f(t,\ u) \leqslant (1-\varepsilon)\lambda_1 u,\ \forall\, u \in [0,\ M_1],\ t \in [1,\ T]_{\mathbb{Z}}$$

记 φ_1 为算子 F 的相应于主特征值 λ_1 的正特征函数，即 $\varphi_1 = \lambda_1 F\varphi_1$. 对任意的 $u \in \partial B_{M_1} \cap P$ 有

$$(Au)(t) = \sum_{s=1}^{T} G(t,\ s) f(s,\ u(s)) \leqslant$$

$$(1-\varepsilon)\lambda_1 \sum_{s=1}^{T} G(t,\ s) u(s) =$$

$$(1-\varepsilon)\lambda_1 (Fu)(t),\ t \in [1,\ T]_{\mathbb{Z}}$$

不妨设 A 在 $\partial B_{M_1} \cap P$ 上无不动点，否则，定理得证. 类似式(17)的证明过程可证

$$u \neq \mu Au,\ \forall\, u \in \partial B_{M_1} \cap P,\ 0 < \mu < 1 \tag{19}$$

由引理 8 知，

$$i(A, B_{M_1} \cap P, P) = 1 \tag{20}$$

由 $f_\infty > \lambda_1$ 知，存在 $m_2 > M_1$，$\varepsilon > 0$，使得

$$f(t, u) \geqslant (1+\varepsilon)\lambda_1 u,\ \forall u \geqslant m_2,\ t \in [1, T]_{\mathbb{Z}}$$

取 $M_2 = \max\left\{2M_1, \dfrac{m_2}{\sigma}\right\}$，则对任意的 $u \in \partial B_{M_2} \cap P$，有 $u(t) \geqslant \sigma\|u\| = \sigma M_2 \geqslant m_2$，从而

$$\begin{aligned}(Au)(t) = \sum_{s=1}^{T} G(t, s) f(s, u(s)) \geqslant \\ (1+\varepsilon)\lambda_1 \sum_{s=1}^{T} G(t, s) u(s) = \\ (1+\varepsilon)\lambda_1 (Fu)(t),\ t \in [1, T]_{\mathbb{Z}}\end{aligned}$$

不妨设 A 在 $\partial B_{M_2} \cap P$ 上无不动点，否则，定理得证. 类似式(14) 的证明过程可证

$$u - Au \neq \mu\varphi_1,\ \forall u \in \partial B_{M_1} \cap P,\ \mu \geqslant 0$$

由引理 7 知，

$$i(A, B_{M_2} \cap P, P) = 0 \tag{21}$$

结合式(20) 和式(21)，根据不动点指数的区域可加性得

$$i(A, (B_{M_2} \cap P)\backslash(\overline{B}_{M_1} \cap P), P) = i(A, B_{M_2} \cap P, P) - i(A, B_{M_1} \cap P, P) = -1$$

因此，算子 A 在 $(B_{M_2} \cap P)\backslash(\overline{B}_{M_1} \cap P)$ 上至少存在一个不动点，即问题(1) 至少存在一个正解.

注　上述结果给出 f 在线性增长条件下的正解存在条件. 例如考察二阶 Neumann 边值问题

$$\begin{cases}\Delta^2 u(t-1) + \dfrac{1}{30}u(t) = f(u(t)),\ t \in [1, 8]_{\mathbb{Z}} \\ \Delta u(0) = 0,\ \Delta u(T) = 0\end{cases} \tag{22}$$

其中 $q(t) = \dfrac{1}{30} < 2\cos\left(1 - \dfrac{\pi}{16}\right)$，

$$f(u(t)) = \begin{cases}\dfrac{1}{30}u + u^2 & u \in (0, 1) \\ \left(u - \dfrac{31}{2}\right)^2 - \dfrac{12553}{60} & u \in [1, 30] \\ \dfrac{1}{30}u + \dfrac{1}{u} & u \in (30, +\infty)\end{cases}$$

易证 $f_0 = f_\infty = \dfrac{1}{30}$. 当$\dfrac{\lambda_1}{f_0} = \dfrac{\lambda_1}{f_\infty} = 1$ 时问题(22) 存在非平凡解 u，其中 λ_1 是问题(13) 的主特征值，且 λ_1 对应的正特征函数为 φ_1.

若 $u \in (0, 1)$ 时，

$$\Delta^2 u(t-1) + \frac{1}{30}u(t) = \frac{1}{30}u(t) + u^2(t) \tag{23}$$

对式(23) 两边同时乘以 φ_1 且两边从 1 到 T 求和可得

$$\sum_{s=1}^{T}\Delta^2 u(s-1)\varphi_1(s) + \frac{1}{30}\sum_{s=1}^{T}u(s)\varphi_1(s) = \frac{1}{30}\sum_{s=1}^{T}u(s)\varphi_1(s) + \sum_{s=1}^{T}u^2(s)\varphi_1(s)$$

$$(\Delta u(T) - \Delta u(0))\varphi_1(s) = \sum_{s=1}^{T}u^2(s)\varphi_1(s)$$

由此可得 $\sum\limits_{s=1}^{T}u^2(s)\varphi_1(s) = 0$，又因为 $u(t) > 0$，$\varphi_1(t) > 0$ 且 $\sum\limits_{s=1}^{T}u^2(t)\varphi_1(t) = 0$，得到矛盾.

同理可证，当 $u \in [1, 30]$ 和 $u \in (30, \infty)$ 时，得到矛盾！故问题(22) 无正解.

进一步由定理 1 和定理 2 易得如下推论：

推论　假定(H1),(H2) 成立. 若满足下列条件之一：

(i) $f_0=\infty$，$f_\infty=0$；

(ii) $f_0=0$，$f_\infty=\infty$，

则边值问题(1)至少存在一个正解.

参考文献:

[1] MA R Y, LU Y Q, CHEN T L. Existence of One-Signed Solutions of Discrete Second-Order Periodic Boundary Value Problems [J]. Abstract and Applied Analysis, 2012(12): 1-13.

[2] 姚庆六. 非线性变系数二阶 Neumann 边值问题的正解 [J]. 山东大学学报(理学版), 2007, 42(12): 10-14, 18.

[3] MA R Y. Nonlinear Periodic Boundary Value Problems with Sign-Changing Green's Function [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2011, 74(5): 1714-1720.

[4] 闫东明. 变系数二阶 Neumann 边值问题正解的存在性 [J]. 高校应用数学学报 A 辑, 2013, 28(04): 477-487.

[5] JIANG D Q, LIU H Z. Existence of Positive Solutions to Second Order Neumann Boundary Value Problem [J]. Journal of Mathematical Research And Exposition, 2000, 20(3): 360-364.

[6] 梁盛泉, 杨　和. 二阶变系数常微分方程 Neumann 边值问题的正解 [J]. 甘肃农业大学学报, 2010, 45(2): 152-155.

[7] 路艳琼. 一类二阶离散 Neumann 边值问题正解的存在性 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2010, 26(6): 1012-1020.

[8] 路艳琼, 高承华. 二阶变系数离散 Neumann 边值问题正解的存在性 [J]. 华东师范大学学报(自然科学版), 2011(5): 66-72, 102.

[9] KELLEY W G, PETERSON A C. Difference Equation an Introduction with Applications [M]. San Diego: Academic Press, 2001.

[10] GUO D J, LAKSHMIKANTHAM V. Nonlinear Problems in Abstract Cones [M]. Amsterdam: Elsevier, 1988.

Existence of Positive Solutions for a Kind of Second-Order Discrete Neumann Boundary Value Problem with Variable Coefficient

YANG Xiao-mei, LU Yan-qiong

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China

Abstract: By using the fixed point index theory in cones, the condition has been obtained for the existence of positive solution for second-order discrete Neumann boundary value problem with variable coefficients

$$\begin{cases}\Delta^2 u(t-1)+q(t)u(t)=f(t,u(t)),\ t\in[1,T]_{\mathbb{Z}}\\ \Delta u(0)=0,\ \Delta u(T)=0\end{cases}$$

where $0\leqslant q(t)<2\left(1-\cos\frac{\pi}{2T}\right)$ and $q(t)\not\equiv 0$, $f:[1,T]_{\mathbb{Z}}\times\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}^+$ is continuous, $[1,\mathrm{T}]_{\mathbb{Z}}:=\{1,2,\cdots,T\}$, $\mathbb{R}^+:=[0,\infty)$.

Key words: Neuamnn boundary problem; Green function; positive solution; fixed point index theory

责任编辑　张　枸