第 45 卷　第 11 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2020 年 11 月
Vol. 45　No. 11　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Nov.　2020

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2020.11.004

随机 p-Laplace 方程的 Wong-Zakai 逼近[①]

徐冬梅[1]，　余连兵[2]，　李　嘉[3]

1. 上饶师范学院 数学与计算机科学学院，江西 上饶 334001；
2. 六盘水师范学院 数学与信息工程学院，贵州 六盘水 553004；
3. 西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 证明了随机非自治 p-Laplace 方程在 Wong-Zakai 逼近意义下拉回吸引子的存在性.

关　键　词： 随机 p-Laplace 方程；拉回吸引子；非自治动力系统；Wong-Zakai 逼近

中图分类号： O175　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1000－5471(2020)11－0027－05

目前，文献[1-3]已经研究了带有一般白噪声的随机 p-Laplace方程的拉回吸引子的存在性和上半连续性. 本文则引入一种类似于Wiener过程的差分噪音[4]，即Wong-Zakai逼近[5-6]. 本文在Wong-Zakai逼近意义下证明了随机 p-Laplace 方程在有界域上 $\mathscr{D}$- 拉回吸引子的存在性.

1　随机 p-Laplace 方程的协循环

本文中假设 (X, d) 是一个可分的完备度量空间并带有 Borel- 代数 $\mathscr{B}(X)$ 且 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 是一个概率空间，变换 θ_t：$\mathbb{R}\times\Omega\longrightarrow\Omega$ 是一个 $(\mathscr{B}(\mathbb{R})\times\mathscr{F}, \mathscr{F})$ 可测映射且满足 θ_0 是恒等映射，$\theta_t(s+t, \cdot)=\theta_t(t, \cdot)\circ\theta_t(s, \cdot)$ 是保测变换[7].

本文考虑在 Wong-Zakai 逼近下定义在有界域 $\mathscr{O}\subset\mathbb{R}^n$ 的非自治随机 p-Laplace 方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\lambda u-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)=f(t, x, u)+g(t, x)+u\mathscr{G}_\delta(\theta_t\omega) \tag{1}$$

且带有初值

$$u(\tau, x)=u_\tau(x),\ x\in\mathscr{O} \tag{2}$$

其中：$p\geqslant 2$，$\lambda>0$，$g\in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, L^2(\mathscr{O}))$. 对于非线性项，假设 f：$\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 是连续的，对所有的 $t, s\in\mathbb{R}$ 和 $x\in\mathbb{R}^n$，且

$$f(t, x, s)s\leqslant-\alpha_1|s|^q+\psi_1(t, x),\ |f(t, x, s)|\leqslant\alpha_2|s|^{q-1}+\psi_2(t, x),\ \frac{\partial f}{\partial s}(t, x, s)\leqslant\psi_3(t, x) \tag{3}$$

其中：$\alpha_1, \alpha_2>0$，$\psi_1(t, x)\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, L^1(\mathscr{O}))$，$\psi_2(t, x)\in L^{q_1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, L^{q_1}(\mathscr{O}))$，$\psi_3(t, x)\in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, L^\infty(\mathscr{O}))$，$\frac{1}{q}+\frac{1}{q_1}=1$. 定义一个 Laplacian 算子 A：$W^{1,p}\longrightarrow W^{-1,p_1}$ 且 $Au=-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$($p_1$ 是 p 的共轭指数).

---

① 收稿日期：2019－05－05
基金项目：江西省自然科学基金项目(20202BABL211006)；贵州省教育厅自然基金项目(KY[2016]103)；上饶师范学院校级课题(201905).
作者简介：徐冬梅(1989－)，女，硕士研究生，主要从事无穷维随机动力系统与随机分析的研究.
通信作者：李　嘉，博士，副教授.

当 $\delta \neq 0$ 时，定义随机变量 $\mathscr{G}_\delta$：$\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ 如下：

$$\mathscr{G}_\delta(\omega) = \frac{\omega(\delta)}{\delta},\ \forall\, \omega \in \Omega \tag{4}$$

存在一个 θ_t 不变量集 $\Omega \subseteq \tilde{\Omega}$，对于每个 $\omega \in \tilde{\Omega}$，有

$$\frac{\omega(t)}{t} \to 0,\ t \to \pm\infty \tag{5}$$

由(4)式可得：

$$\mathscr{G}_\delta(\theta_t\omega) = \frac{\omega(t+\delta)-\omega(t)}{\delta},\ \int_0^t \mathscr{G}_\delta(\theta_s\omega)\mathrm{d}s = \int_t^{t+\delta} \frac{\omega(s)}{\delta}\mathrm{d}s + \int_\delta^0 \frac{\omega(s)}{\delta}\mathrm{d}s \tag{6}$$

引理 1　对 $\forall\, \varepsilon > 0$，$\omega \in \Omega$，$\delta \neq 0$，存在 $C_\delta(\varepsilon, \omega) > 0$，使得：

$$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathscr{G}_\delta(\theta_s\omega)\mathrm{d}s = 0,\ \forall\, \delta \neq 0,\ \omega \in \Omega \tag{7}$$

$$\left|\int_0^t \mathscr{G}_\delta(\theta_s\omega)\mathrm{d}s\right| \leqslant \varepsilon\,|\,t\,| + C_\delta(\varepsilon, \omega),\ \forall\, t \in \mathbb{R} \tag{8}$$

证　由(6)式可知

$$\int_0^t \mathscr{G}_\delta(\theta_s\omega)\mathrm{d}s = \int_t^{t+\delta} \frac{\omega(s)}{\delta}\mathrm{d}s - \frac{1}{\delta}\int_0^\delta \omega(s)\mathrm{d}s \tag{9}$$

根据中值定理，存在一个 $r_t \in [t, t+\delta]$ 使得当 $t \to \pm\infty$ 时

$$\frac{1}{t\delta}\int_t^{t+\delta} \omega(s)\mathrm{d}s = \frac{\omega(r_t)}{t} = \frac{\omega(r_t)}{r_t} \cdot \frac{r_t}{t} \to 0 \tag{10}$$

因此，当 $t \to \pm\infty$ 时

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathscr{G}_\delta(\theta_s\omega)\mathrm{d}s = \frac{1}{t\delta}\int_t^{t+\delta} \omega(s)\mathrm{d}s - \frac{1}{t\delta}\int_0^\delta \omega(s)\mathrm{d}s \to 0 \tag{11}$$

此外，给定 $\varepsilon > 0$，由(7)式知，存在 $t_\delta = t_\delta(\varepsilon, \omega)$ 使得

$$\left|\int_0^t \mathscr{G}_\delta(\theta_s\omega)\mathrm{d}s\right| \leqslant \varepsilon\,|\,t\,|,\ \forall\ |\,t\,| \geqslant t_\delta$$

由 $s \to \mathscr{G}_\delta(\theta_s\omega)$ 的连续性可知

$$C_\delta := \int_{-t_\delta}^{t_\delta} |\,\mathscr{G}_\delta(\theta_s\omega)\,|\,\mathrm{d}s$$

是一个有限的常数. 因此，

$$\left|\int_0^t \mathscr{G}_\delta(\theta_s\omega)\mathrm{d}s\right| \leqslant C_\delta \leqslant \varepsilon\,|\,t\,| + C_\delta,\ \forall\ |\,t\,| \leqslant t_\delta \tag{12}$$

则(8)式对所有的 $t \in \mathbb{R}$ 成立.

由文献[8]可知，可得对 $\forall\, \tau \in \mathbb{R}$，$\omega \in \Omega$，$u_\tau \in L^2(\mathscr{O})$，方程(1)存在唯一的解

$$u(\cdot, \tau, \omega, u_\tau) \in C([\tau, \infty), L^2(\mathscr{O})) \cap L^p_{\mathrm{loc}}((\tau, \infty), W^{1,p}(\mathscr{O})) \cap L^q_{\mathrm{loc}}((\tau, \infty), L^q(\mathscr{O}))$$

因此，由文献[9]可以定义一个连续协循环

$$\Phi\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \Omega \times L^2(\mathscr{O}) \longrightarrow L^2(\mathscr{O})$$

使得对 $\forall\, t \in \mathbb{R}^+$，$\tau \in \mathbb{R}$，$\omega \in \Omega$ 和 $u_\tau \in L^2(\mathscr{O})$ 满足

$$\Phi(t, \tau, \omega, u_\tau) = u(t+\tau, \tau, \theta_{-\tau}\omega, u_\tau) \tag{13}$$

为了证明拉回吸引子的存在性，进一步假设外力项 g 满足如下缓增条件：对 $\forall\, \tau \in \mathbb{R}$，有

$$\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\lambda s}(\|\,g(s+\tau, \cdot)\,\|^2 + \|\,\psi_1(s+\tau, \cdot)\,\|_{L^1})\mathrm{d}s < \infty \tag{14}$$

此外，定义吸引域 $\mathscr{D}$ 为 $L^2(\mathscr{O})$ 上所有的缓增双参数集，即

$$\mathscr{D} = \{D = \{D(\tau, \omega)\colon \tau \in \mathbb{R},\ \omega \in \Omega\}\}$$

且满足

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-\frac{1}{2}\lambda t}\| D(\tau-t, \theta_{-t}\omega)\| = 0, \tau\in\mathbb{R}, \omega\in\Omega \tag{15}$$

其中 $\| D\| = \sup_{u\in D}\| u\|_{L^2(\mathscr{O})}$.

2　随机 p-Laplace 方程的 $\mathscr{D}$- 拉回吸引子

本节将证明方程(1) 拉回吸引子在 $L^2(\mathscr{O})$ 上的存在性.

引理 2　假设(4) 和(14) 式成立，则对 $\forall\sigma\in\mathbb{R}$，$\tau\in\mathbb{R}$，$\omega\in\Omega$，$D=\{D(\tau, \omega): \tau\in\mathbb{R}, \omega\in\Omega\}\in\mathscr{D}$，存在 $T=T(\sigma, \tau, \omega, D)>0$，使得对任意 $t\geqslant T$，$u_0\in D(\tau-t, \theta_{-t}\omega)$，方程(1) 的解满足：

$$\| u(\sigma, \tau-t, \theta_{-\tau}\omega, u_0)\|^2+\int_{\tau-t}^{\sigma} e^{\lambda s+2\int_s^0\mathscr{G}_\delta(\theta_r\omega)dr}(\| u(s, \tau-t, \theta_{-\tau}\omega, u_0)\|_q^q+\|\nabla u(s, \tau-t, \theta_{-\tau}\omega, u_0)\|_p^p)ds\leqslant$$
$$1+c\int_{-\infty}^{\sigma-\tau} e^{\lambda s+2\int_s^0\mathscr{G}_\delta(\theta_r\omega)dr}(\| g(s+\tau)\|^2+\|\psi_1(s+\tau)\|_1)ds \tag{16}$$

证　让方程(1) 两边乘 u 并在 $\mathscr{O}$ 上积分可得

$$\frac{d}{dt}\| u\|^2+2\lambda\| u\|^2+2\|\nabla u\|_p^p=2\int_{\mathscr{O}} f(t, x, u)u dx+2\int_{\mathscr{O}} g(t, x)u dx+2\mathscr{G}_\delta(\theta_t\omega)\| u\|^2 \tag{17}$$

由 Young 不等式可知

$$2\int_{\mathscr{O}} g(t, x)u dx\leqslant\lambda\| u\|^2+c\| g(t, x)\|^2$$

根据假设(4) 得

$$2\int_{\mathscr{O}} f(t, x, u)u dx\leqslant -2\alpha_1\| u\|_q^q+2\|\psi_1(t, x)\|_1$$

因此

$$\frac{d}{dt}\| u\|^2+(\lambda-2\mathscr{G}_\delta(\theta_t\omega))\| u\|^2+2\alpha_1\| u\|_q^q+2\|\nabla u\|_p^p\leqslant 2\|\psi_1(t, x)\|_1+c\| g(t, x)\|^2 \tag{18}$$

对(18) 式在$(\tau-t, \sigma)$ 上使用 Gronwall 引理，其中 $\sigma\geqslant\tau-t$ 并用$\theta_{-\tau}\omega$ 替换 ω 可得

$$\| u(\sigma, \tau-t, \theta_{-\tau}\omega, u_0)\|^2+\int_{\tau-t}^{\sigma} e^{\lambda s+2\int_s^0\mathscr{G}_\delta(\theta_r\omega)dr}(\| u(s, \tau-t, \theta_{-\tau}\omega, u_0)\|_q^q+\|\nabla u(s, \tau-t, \theta_{-\tau}\omega, u_0)\|_p^p)ds\leqslant$$
$$e^{\lambda(\tau-\sigma)}e^{-\lambda t+2\int_{-t}^{\sigma-\tau}\mathscr{G}_\delta(\theta_r\omega)dr}\| u_0\|^2+c\int_{-t}^{\sigma-\tau} e^{\lambda s+2\int_s^0\mathscr{G}_\delta(\theta_r\omega)dr}(\| g(s+\tau)\|^2+\|\psi_1(s+\tau)\|_1)ds\leqslant \tag{19}$$
$$e^{\lambda(\tau-\sigma)}e^{-\lambda t+2\int_{-t}^{\sigma-\tau}\mathscr{G}_\delta(\theta_r\omega)dr}\| u_0\|^2+c\int_{-\infty}^{\sigma-\tau} e^{\lambda s+2\int_s^0\mathscr{G}_\delta(\theta_r\omega)dr}(\| g(s+\tau)\|^2+\|\psi_1(s+\tau)\|_1)ds$$

由(8) 式和它的连续性可知，存在 $C_\delta(\omega)>0$，使得

$$2\left|\int_{-t}^{\sigma-\tau}\mathscr{G}_\delta(\theta_\sigma\omega)d\sigma\right|\leqslant\frac{1}{2}\lambda t+C_\delta(\omega), \forall t>0 \tag{20}$$

因 $u_0\in D(\tau-t, \theta_{-t}\omega)$，结合(20) 式，则存在 $T_\delta=T_\delta(\sigma, \tau, \omega, D)>0$，使得

$$e^{\lambda(\tau-\sigma)}e^{-\lambda t+2\int_{-t}^{\sigma-\tau}\mathscr{G}_\delta(\theta_r\omega)dr}\| u_0\|^2\leqslant e^{\lambda(\tau-\sigma)}e^{-\frac{1}{2}\lambda t}e^{C_\delta(\omega)}\| D(\tau-t, \theta_{-t}\omega)\|^2\leqslant 1, \forall t\geqslant T_\delta \tag{21}$$

结合(19) 与(21) 式可知(16) 式成立.

引理 3　假设(4) 式和(14) 式成立，则方程(1) 生成的连续协循环 Φ 在 $L^2(\mathscr{O})$ 上是 $\mathscr{D}$- 拉回渐近紧的.

证　只需证明对每一个 $\tau\in\mathbb{R}$，$\omega\in\Omega$，$D=\{D(\tau, \omega): \tau\in\mathbb{R}, \omega\in\Omega\}\in\mathscr{D}$，当 $t_n\to+\infty$，$u_{0,n}\in D(\tau-t_n, \theta_{-t_n}\omega)$ 时，数列 $\Phi(t_n, \tau-t_n, \theta_{-t_n}\omega, u_{0,n})$ 有一个收敛子列. 令$\{u_{0,n}\}_{n=1}^{\infty}$ 是有界集 B 中的序列，根据(19) 式，取 $T>t$ 且 $s\in[\tau, T]$，可得$\{u(\cdot, \tau, \omega, u_{0,n})\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $L^\infty((\tau, T), L^2(\mathscr{O}))\cap L^q((\tau, T), L^q(\mathscr{O}))\cap L^p((\tau, T), W_0^{1,p}(\mathscr{O}))$ 中有界.

再次由假设(4) 可知

$$\int_\tau^T\int_{\mathscr{O}}| f(s, x, u)|^{q_1}dxds\leqslant c\int_\tau^T\int_{\mathscr{O}}| u|^q dxds+c\int_\tau^T\int_{\mathscr{O}}|\psi_2(s, x)|^{q_1}dxds \tag{22}$$

所以 $\{f(s, x, u(s, \tau, \omega, u_{0,n}))\}$ 在 $L^{q_1}((\tau, T), L^{q_1}(\mathcal{O}))$ 中有界. 因此 $\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}u(\cdot, \tau, \omega, u_{0,n})\right\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $L^2((\tau, T), L^2(\mathcal{O}))+L^{q_1}((\tau, T), L^{q_1}(\mathcal{O}))+L^{p_1}((\tau, T), W^{-1,p_1}(\mathcal{O}))$ 中有界.

进一步利用Sobolev紧嵌入定理，存在 $v\in L^2((\tau, T), L^2(\mathcal{O}))$ 使得 u 的收敛子列(仍然用原数列表示)在 $L^2(\mathcal{O})$ 上对几乎所有的 $s\in(\tau, T)$，

$$u(s, \tau, \omega, u_{0,n})\rightarrow v(s) \tag{23}$$

利用解对初始数据在 $L^2(\mathcal{O})$ 中的连续性以及(23)式，有

$$u(t, \tau, \omega, u_{0,n})=u(t, s, \tau, \omega, (s, \tau, \omega, u_{0,n}))\rightarrow u(t, s, \omega, v(s))$$

另一方面，令引理2中的 $\sigma=\tau-1$，则存在

$$T=T(\tau, \omega, D)>0$$

和

$$c=c(\tau, \omega)>0$$

使得对所有的 $t\geqslant T$ 和 $u_0\in D(\tau-t, \theta_{-t}\omega)$

$$\| u(\tau-1, \tau-t, \theta_{-\tau}\omega, u_0)\| \leqslant c(\tau, \omega) \tag{24}$$

因为 $t_n\rightarrow+\infty$，$u_{0,n}\in D(\tau-t_n, \theta_{-t_n}\omega)$，根据(24)式，存在一个 $N=N(\tau, \omega, D)>0$ 使得对所有的 $n\geqslant N$

$$\| u(\tau-1, \tau-t_n, \theta_{-\tau}\omega, u_{0,n})\| \leqslant c(\tau, \omega)$$

这意味着 $\{u(\tau-1, \tau-t_n, \theta_{-\tau}\omega, u_{0,n})\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $L^2(\mathcal{O})$ 上有界. 因此数列

$$u(\tau, \tau-t_n, \theta_{-\tau}\omega, u_{0,n})=u(\tau, \tau-1, \theta_{-\tau}\omega, u(\tau-1, \tau-t_n, \theta_{-\tau}\omega, u_{0,n}))$$

在 $L^2(\mathcal{O})$ 中预紧. 又

$$\Phi(t_n, \tau-t_n, \theta_{-t_n}\omega, u_{0,n})=u(\tau, \tau-t_n, \theta_{-\tau}\omega, u_{0,n})$$

引理得证.

3 主要结论

定理1 假设(4)和(14)式成立，则方程(1)生成的连续协循环 Φ 在 $L^2(\mathcal{O})$ 上有唯一的 $\mathcal{D}$-拉回吸引子 $\mathcal{A}=\{\mathcal{A}(\tau, \omega: \tau\in\mathbb{R}, \omega\in\Omega)\}\in\mathcal{D}$.

证 取引理2中的 $\sigma=\tau$，则 Φ 有一个吸收集 $\mathcal{M}(\tau, \omega)$ 定义为

$$\mathcal{M}(\tau, \omega)=\{u\in L^2(\mathcal{O}): \| u\|^2\leqslant\rho_\delta(\tau, \omega)\} \tag{25}$$

其中

$$\rho_\delta(\tau, \omega)=1+c\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{\lambda s+2\int_s^0\mathcal{G}_\delta(\theta_r\omega)\mathrm{d}r}(\| g(s+\tau)\|^2+\| \psi_1(s+\tau)\|_1)\mathrm{d}s \tag{26}$$

首先证明 $\rho_\delta(\tau, \omega)\in\mathcal{D}$，事实上，由(8)式可知，存在 $C_\delta(\omega)>0$，使得

$$\left|\int_s^0\mathcal{G}_\delta(\theta_\sigma\omega)\mathrm{d}\sigma\right|\leqslant-\frac{1}{2}\lambda s+C_\delta(\omega).\quad\forall s\leqslant 0 \tag{27}$$

则

$$\begin{aligned}&\lim_{t\rightarrow+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda t}\rho_\delta(\tau-t, \theta_{-t}\omega)=\\&\lim_{t\rightarrow+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda t}\int_{-\infty}^{-t}\mathrm{e}^{\lambda(s+t)+2\int_s^{-t}\mathcal{G}_\delta(\theta_r\omega)\mathrm{d}r}(\| g(s+\tau)\|^2+\| \psi_1(s+\tau)\|_1)\mathrm{d}s\leqslant\\&\mathrm{e}^{2C_\delta(\omega)}\lim_{t\rightarrow+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda t}\int_{-\infty}^{-t}\mathrm{e}^{\lambda s}(\| g(s+\tau)\|^2+\| \psi_1(s+\tau)\|_1)\mathrm{d}s=0\end{aligned} \tag{28}$$

因此 $\mathcal{M}(\tau, \omega)\in\mathcal{D}$. 由文献[10]中吸引子的存在性定理可知，协循环 Φ 存在唯一的 $\mathcal{D}$-拉回吸引子 $\mathcal{A}$.

参考文献：

[1] KRAUSE A，LEWIS M，WANG B X. Dynamics of the Non-autonomous Stochastic p-Laplace Equation Driven by Multiplicative Noise [J]. Applied Mathematics and Computation，2014，246：365-376.

[2] 雍梦娟，李扬荣. 具有快速振荡项的非自治随机 p-Laplace 方程随机吸引子的上半连续性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2016，38(8)：47-53.

[3] ZHU X，LI Y R. Random Attractors of Semilinear p-Laplacian Equation with Multiplicative Noise [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2010，32(10)：103-108.

[4] WANG F L，LI J，LI Y R. Random Attractors for Ginzburg-Landau Equations Driven by Difference Noise of a Wiener-like Process [J]. Advances in Difference Equations，2019，2019(1)：1-17.

[5] WANG X H，LU K N，WANG B X. Wong-Zakai Approximations and Attractors for Stochastic Reaction-Diffusion Equations on Unbounded Domains [J]. Journal of Differential Equations，2018，264(1)：378-424.

[6] LU K N，WANG B X. Wong-Zakai Approximations and Long Term Behavior of Stochastic Partial Differential Equations [J]. Journal of Dynamics and Differential Equations，2019，31(3)：1341-1371.

[7] ARNOLD L. Random Dynamical Systems [M]. Berlin：Springer，1998.

[8] LI Y R，GU A H，LI J. Existence and Continuity of Bi-Spatial Random Attractors and Application to Stochastic Semilinear Laplacian Equations [J]. Journal of Differential Equations，2015，258(2)：504-534.

[9] WANG B X. Sufficient and Necessary Criteria for Existence of Pullback Attractors for Non-Compact Random Dynamical Systems [J]. Journal of Differential Equations，2012，253(5)：1544-1583.

[10] BATES P W，LU K N，WANG B X. Random Attractors for Stochastic Reaction-Diffusion Equations on Unbounded Domains [J]. Journal of Differential Equations，2009，246(2)：845-869.

Wong-Zakai Approximations of Stochastic p-Laplace Equation

XU Dong-mei[1]，　SHE Lian-bing[2]，　LI　Jia[3]

1. School of Mathematics and Computer Science，Shangrao Normal University，Shangrao Jiangxi 334001，China；

2. School of Mathematics Information Engineering，Liupanshui Normal University，Liupanshui Guizhou 553004，China；

3. School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：This paper proves the existence of pullback random for the stochastic non-autonomous p-Laplace equation under the Wong-Zakai approximation sense.

Key words：stochastic p-Laplace equation；pullback attractor；non-autonomous dynamic systems；Wong-Zakai approximations

责任编辑　张　枸