

利用 Matlab 判定单摆运动特性的理论研究^①

杨文锦, 王鸿丽, 刘彩云, 段晓丽, 张健

太原工业学院 理学系, 太原 030008

摘要: 提供一种依据找出单摆小角度、大角度的分界点, 进而分别研究自由振动的单摆在小角度、大角度时的摆动. 采用 Runge-Kutta 方法并结合 Matlab 编程, 画出摆角 θ 、角速度 ω 、动能 E_k 和时间 t 之间的关系图. 利用图像的优点在于可以直观地看出单摆小角度、大角度相关变量的图像差异, 为物理教学中判断某一振动是否属于简谐振动提供了一种更加便捷有效的方式.

关键词: 分界点; 自由振动; Matlab 软件; Runge-Kutta 方法

中图分类号: G642

文献标志码: A

文章编号: 1000-5471(2020)11-0167-04

单摆自由振动是最简单的往复运动, 通常认为在初始角度 $\theta < 5^\circ$ 的范围内, 单摆做周期恒定、角位移随时间正弦变化的简谐运动, 而超过此范围的单摆自由运动为非简谐振动^[1]. 本研究将重新讨论在误差小于 10^{-3} 范围内, 单摆做简谐振动的角度分界点, 并应用 Matlab 软件将运动中的各物理量进行作图分析, 从图像可以直观地看出简谐振动与非简谐振动的区别, 为物理教学中学生理解什么是简谐振动提供重要的参考.

本研究的模型是由理想化的摆球和轻杆组成的. 轻杆由质量不计的刚性杆提供, 摆球密度较大, 而且球的半径比细杆的长度小得多, 这样才可以将摆球看做质点(图 1), 这样的模型称为复摆. 复摆可以看成等效摆长为 $l = I/md$ 的单摆. 其中 I 为复摆的转动惯量, m 为摆球的质量, d 为轻杆长度. 本文所研究的摆动角度范围为 $\theta \in (-\pi, \pi)$. 为了简化问题, 在有关叙述与绘图时统一称为单摆, 取值 $l = 1 \text{ m}$, $m = 1 \text{ kg}$, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

由牛顿力学, 单摆运动可作如下描述.

假设摆球的初始速度为 v_0 , 任意时刻的摆角为 θ , 摆球速度为 v , 根据机械能守恒定律:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = \frac{1}{2}mv^2 + mgl(1 - \cos\theta) \quad (1)$$

引入 $v = \omega l$, 其中 ω 是摆球的角速度. 则(1)式变为

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = \frac{1}{2}m(\omega l)^2 + mgl(1 - \cos\theta) \quad (2)$$

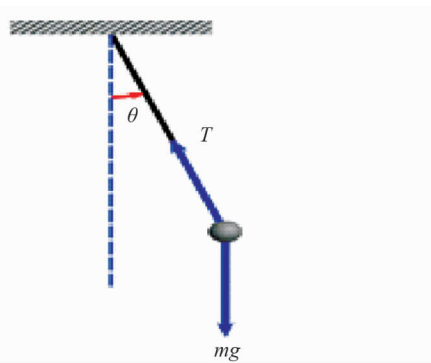


图 1 单摆受力图

① 收稿日期: 2019-03-20

基金项目: 山西省教学改革创新(2017120); 太原工业学院 2018 年大学生创新创业训练项目(20181010).

作者简介: 杨文锦(1985—), 女, 副教授, 主要从事大学物理教学工作.

对(2)式两边求导,可得

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

(3)

这与文献^[2]中单摆在任意角度下自由振动的动力学方程一致.

1 单摆做简谐振动的角度分界点

(3)式显然是一个非线性微分方程. 不过,在 θ 较小时,近似地有 $\sin \theta \approx \theta$,方程可写为线性微分方程:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

(4)

满足方程(4)的运动称为简谐振动^[1]. 这也就是常说的单摆小角度摆动是简谐振动,而随着摆角的增加逐渐变为非简谐振动.

本研究将找出误差小于 10^{-3} 时, θ 在多少弧度范围内 $\sin \theta \approx \theta$ 成立,并以此作为单摆是否做简谐振动的分界点.

函数 $y = \sin x$ 的泰勒展开法^[3]为

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + (-1)^m \frac{\cos \theta x}{(2m+1)!} x^{2m+1}$$

(5)

其中 $0 < \theta < 1, x \in (-\infty, +\infty)$.

又当 $m = 1$ 时, $\sin \theta \approx \theta$,使其绝对误差满足

$$|R_2(x)| = \left| \frac{\cos \theta x}{3!} x^3 \right| \leq \frac{|x|^3}{6} < 10^{-3}$$

(6)

只需 $|x| < 0.1816$ 即单摆初始角度 $\theta \in (-0.1816, 0.1816)$ 时,可得 $\sin \theta \approx \theta$.

由以上论述可得,0.1816 rad(约等于 10°)是单摆做简谐振动的角度分界点,与文献^[5,9]得到的结论一致. 本文将认为 $\theta \in (-0.1816, 0.1816)$ 时,单摆动力学方程是线性的,可利用常微分方程理论^[6]的相关知识解决问题,而当 $\theta > 0.1816$ 时,单摆动力学方程是非线性的,此时需采用Runge-Kutta算法^[7]解决问题;同样,对于负角度 $\theta < -0.1816$ 的情况也可直接利用此方法,本研究只对前者进行论述.

2 不同初始角度单摆自由振动图像差异

① 单摆自由振动 $\theta-t$ 曲线

由图2可以看出,3条单摆自由振动 $\theta-t$ 曲线的峰值保持在同一水平线上,说明单摆的自由振动是一个振幅不变的周期性振动;不同初始角度振幅不同,初始角度越大,振幅越大,周期越长,频率越小;从此图像可以看出小角度单摆的 $\theta-t$ 曲线是标准的正弦曲线,而初始角度 $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ 和 $\theta_0 = \frac{15\pi}{18}$ 的 $\theta-t$ 曲线不满足正弦规律,但是这种区别不是特别明显.

② 单摆自由振动 $\omega-t$ 曲线

由图3可以看出,角速度随时间呈现周期性变化,初始角度越大,曲线幅度越大,周期也越大;从图3还可以明显地看出小角度单摆的 $\omega-t$ 曲线在其平衡位置附近按正弦规律作往复运动,是标准的简谐波,而初始角度 $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ 和 $\theta_0 = \frac{15\pi}{18}$ 的 $\omega-t$ 曲线明显不满足正弦规律,其中初始角度 $\theta_0 = \frac{15\pi}{18}$ 的曲线变形

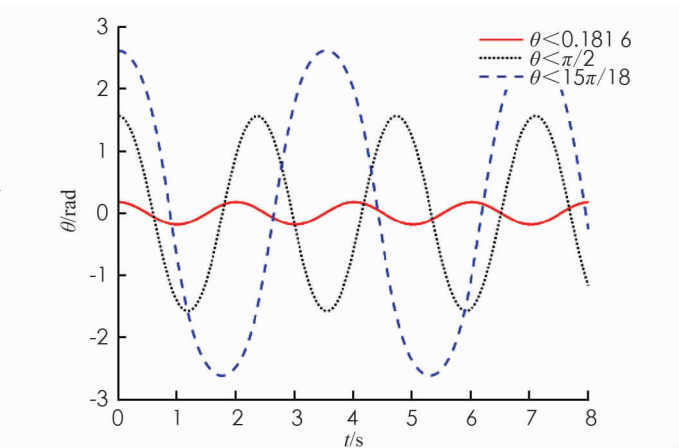


图2 不同初始角度的 $\theta-t$ 关系

非常明显.

③ 单摆自由振动 $\omega - \omega_0 \cdot \theta$ 曲线

由图 4(其中, $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ 是固有频率)可以看出, 3 条曲线都是封闭的, 这说明单摆的自由振动是振幅不变的周期性振动. 而且曲线的曲率半径随初始角度的增大而增大, 说明初始角度越大, 角速度变化幅度越大, 周期也越大; 此图像还可以明显地看出小角度关系曲线是圆, 而随初始角度的增加曲线逐渐变为椭圆, 最后变为卵形, 这一变化非常明显. 这与文献[8]得到的结论类似.

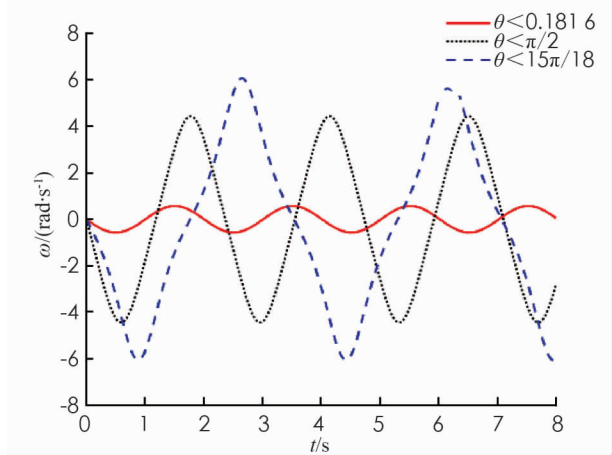


图 3 不同初始角度的 $\omega - t$ 关系

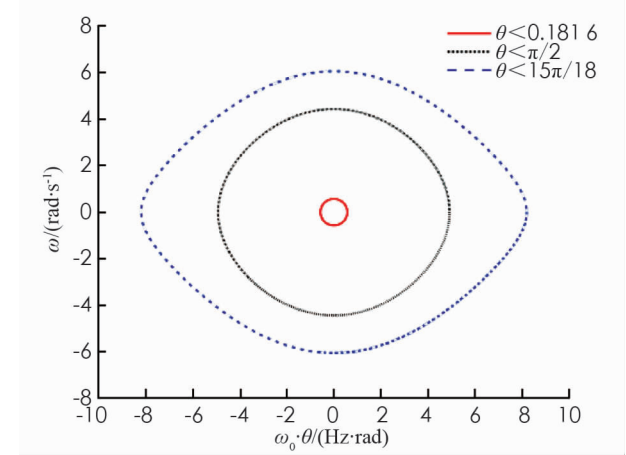


图 4 不同初始角度 $\omega - \omega_0 \cdot \theta$ 关系

④ 单摆自由振动 $E_k - t$ 曲线

由图 5 可以看出, 3 条 $E_k - t$ 曲线的最大值保持不变, 说明单摆的自由振动是一个振幅不变的周期性振动, 振动过程中没有能量的损失, 而且不同初始角度的单摆能量不同, 初始角度越大, 动能越大; 另一方面, 从此图像可以明显地看出小角度单摆的 $E_k - t$ 曲线的波峰和波谷是上下对称的形状, 而初始角度 $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ 曲线的波峰和波谷部分曲线明显不对称, 波峰较窄波谷较宽, 初始角度 $\theta_0 = \frac{15\pi}{18}$ 曲线的波峰和波谷部分宽窄区别更加明显.

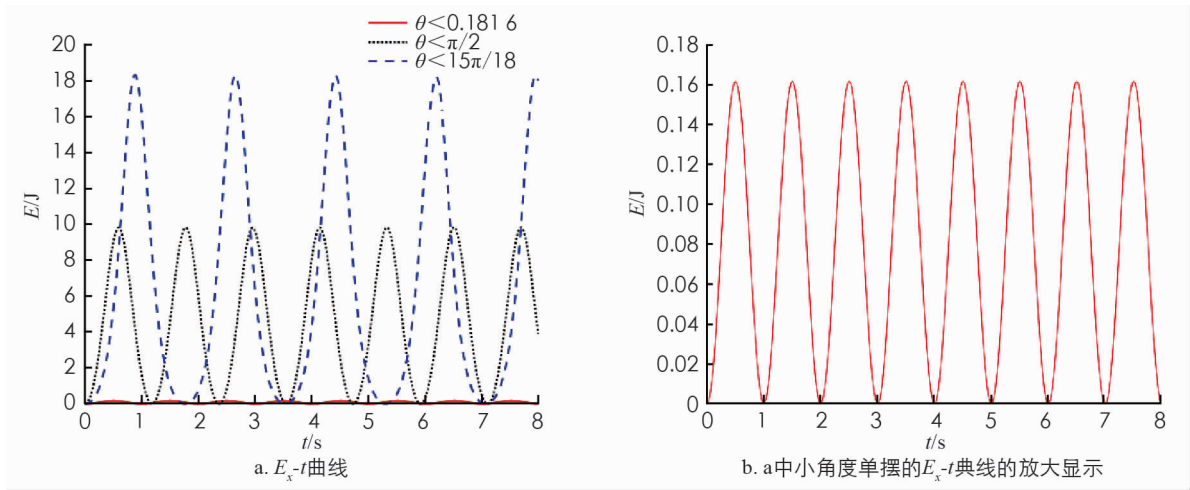


图 5 不同初始角度 $E_k - t$ 关系

由不同角度下的单摆自由振动 $\theta - t, \omega - t, \omega - \omega_0 \cdot \theta$ 和 $E_k - t$ 图像来看, 小角度单摆自由振动是简谐振动, 而大角度振动就成为了非简谐振动. 4 个图像中, 反应效果明显程度的排序是 $E_k - t, \omega - \omega_0 \cdot \theta, \omega - t, \theta - t$; 其中 $E_k - t$ 关系图是因为将角速度平方后的效果, 所以区别最显著; $\omega - \omega_0 \cdot \theta$ 图像可称为相图, 图线的形状更有利于直观的判断; $\omega - t$ 关系图中只有超大角度曲线有明显的变形.

3 结 论

利用 Runge-Kutta 方法并结合 Matlab 软件分析单摆系统的方法, 精度高, 误差小. 单摆自由振动时, 小角度振动与大角度振动的分界点是 $0.181\ 6\ \text{rad}$. 也就是说, 当单摆初始角度 $\theta_0 < 0.181\ 6$ 时, 可以认为单摆在简谐振动, 而当单摆初始角度 $\theta_0 > 0.181\ 6$ 时, 单摆的运动变为非简谐振动(负角度也如此). 另外, 分析图像差异可以看出, $E_k - t, \omega - t$ 和 $\omega - \omega_0 \cdot \theta$ 图中各曲线之间的差异较 $\theta - t$ 中更明显, 因此在教学中可以用图像比较的方法来证明小角度单摆自由振动为简谐振动而大角度振动为非简谐振动.

参考文献:

- [1] 张三慧. 大学基础物理学-下 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2007: 160-200.
- [2] 王成会, 莫润阳, 边小兵. 单摆的超大振幅振动 [J]. 大学物理, 2016, 35(1): 11-14.
- [3] 华东师范大学数学系. 数学分析-下册 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2010: 142-144.
- [4] 李 硕, 赵彤帆, 李根全, 等. Matlab 软件在单摆自由振动中的应用 [J]. 实验室研究与探索, 2013, 32(11): 65-68.
- [5] 高 闯, 魏 薇, 肖发新. 单摆角度问题分析 [J]. 高等函授学报(自然科学版), 2004, 17(1): 35-36.
- [6] 王高雄, 周之铭, 朱思铭, 等. 常微分方程 [M]. 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2006: 156-164.
- [7] 宋叶志. MATLAB 数值分析与应用 [M]. 2 版. 北京: 机械工业出版社, 2014: 396-403.
- [8] 金亚平. 单摆周期的相图求法 [J]. 大学物理, 2000, 19(10): 6-7, 11.
- [9] 陈 泽, 支启军. 二级近似下精密测量重力加速度的理论研究 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2015, 40(1): 148-152.

Theoretical Study on Motion Characteristics of Simple Pendulum Based on Matlab

YANG Wen-jin, WANG Hong-li,
LIU Cai-yun, DUAN Xiao-li, ZHANG Jian

Department of Science, Taiyuan Institute of Technology, Taiyuan Shanxi 030008, China

Abstract: In this paper, one kinds of basis has been provided to find out the boundary point of single pendulum with small angle and large angle, and then the single pendulum with different initial angles been studied. In Runge-Kutta method and Matlab programming, researches have been done to draw the relationship diagrams between angle, angular velocity, kinetic energy and time. The advantage of the diagrams are that they can directly show the differences of the single pendulum with different initial angles, which provides a more convenient way to judge whether a vibration belongs to a simple harmonic vibration in physics teaching.

Key words: boundary point; free vibration; Matlab software; Runge-Kutta method

责任编辑 潘春燕