DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2020.12.001

极大类 5-群的特征标维数①

薛海波[1]，　吕　恒[2]

1. 重庆人文科技学院 理工学院，重庆 401524；2. 西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 有限群中特征标的维数对有限群的结构和性质有重要影响. 主要研究了极大类 5-群的特征标维数的性质. 利用极大类 p-群的结构和性质，通过构造具体例子给出了阶不大于 5^7 的所有极大类 5-群的特征标可能存在的维数.

关　键　词： 极大类 p-群；特征标；维数

中图分类号： O152.1　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1000-5471(2020)12-0001-04

通过有限 p- 群的数量性质来研究有限 p- 群是有限 p- 群的重点研究方向之一. 文献[1-2]分别通过子群的共轭类数和交换子群的个数研究了有限 p- 群的结构. 文献[3]研究了具有特定特征标维数的有限 p- 群的结构. 事实上，给出一个有限 p- 群的特征标维数是比较困难的. 本文将研究一些有限极大类 5- 群的特征标维数. 有限极大类 p- 群[4] 作为有限 p- 群中极为重要的一类群，其结构和性质已经有了比较成熟的理论. 目前有限极大类 p- 群在群表示方向的研究成果也主要体现在有限极大类 p- 群的特征标维数与群结构的联系. 如果群的不可约特征标是正规子群的线性特征标的诱导特征标，那么称这个特征标是正规单项特征标. 文献[5]证明了：若极大类 p- 群 G 的所有不可约特征标都是正规单项特征标，则 G 的导长至多是 $\frac{1}{2}\mid \mathrm{cd}(G)\mid+\frac{11}{2}$，其中 $\mathrm{cd}(G)$ 表示 G 的所有不可约特征标的维数集合. 显然，极大类 2-群的特征标维数集合只能是 $\{1, 2\}$，极大类 3-群的特征标维数集合是 $\{1, 3\}$ 或者 $\{1, 3, 3^2\}$. 文献[6]说明了不存在特征标维数集合是 $\mathrm{cd}(G)=\{1, p, p^{\frac{p+3}{2}}\}$ 的极大类群，并构造证明了存在特征标维数集合是 $\mathrm{cd}(G)=\{1, p, p^{\frac{p+1}{2}}\}$ 的极大类 p- 群，同时还提出了不存在特征标维数集合是 $\{1, p, p^m\}$ 的极大类 p- 群，其中 $m>\frac{p+1}{2}$.

本文主要研究极大类 5-群的特征标维数，通过构造具体例子来验证阶不大于 5^7 的极大类 5-群特征标维数存在的情况. 本文构造的极大类 5-群的极大子群 P_1 基于如下两个重要引理：

引理 1[7]　设 G 是有限极大类 p- 群且 $\mid G\mid\geqslant p^{p+2}$，则 G 存在唯一的极大子群 P_1 是绝对正则 p- 群，即 $\mid P_1 : \mho_1(P_1)\mid = p^{p-1}$.

引理 2[8]　设 G 是有限极大类 p- 群且 $\mid G\mid\geqslant p^{6p-23}$，则 G 存在极大子群 P_1，其幂零类至多是 3.

当极大类 5-群的阶不小于 5^7 的时候，则一定存在极大子群是绝对正则的，且幂零类不大于 3.

为了方便，我们还给出下面一些重要结论：

---

① 收稿日期：2020-03-23

基金项目：国家自然科学基金项目(11971391).

作者简介：薛海波(1980—)，女，讲师，主要从事群论的研究.

通信作者：吕　恒，教授.

引理 3[9] 设群 G 是有限群，χ 是 G 的任意不可约特征标，则 $\chi(1)^2 \leqslant |G:Z(\chi)|$. 等式成立的充要条件是对任意 $g \in G-Z(\chi)$ 有 $\chi(g)=0$.

引理 4[10] 对任意正整数 $n \geqslant 3$，一定存在阶是 p^n 且有交换子群是极大子群的极大类 p-群.

设 G 是有限 p-群，我们用 $\mathrm{cd}(G, p^n)$ 表示阶是 p^n 的极大类群 G 的特征标维数集合. 本文主要得到了下面的定理：

定理 1 设 G 是有限极大类 5-群. 则：

(i) $\mathrm{cd}(G, 5^3)=\{1, 5\}$;

(ii) $\mathrm{cd}(G, 5^4)=\{1, 5\}$;

(iii) $\mathrm{cd}(G, 5^5)=\{1, 5\}, \{1, 5, 5^2\}$;

(iv) $\mathrm{cd}(G, 5^6)=\{1, 5\}, \{1, 5, 5^2\}$;

(v) $\mathrm{cd}(G, 5^7)=\{1, 5\}, \{1, 5, 5^2\}, \{1, 5, 5^3\}, \{1, 5, 5^2, 5^3\}$.

证 取 G 的极大子群 P_1. 易得商群 G/P_1' 也是极大类 5-群，且 G/P_1' 是非交换群. 于是 G/P_1' 存在极大子群是交换群，故 $5 \in \mathrm{cd}(G)$.

情形 1 当 $5^3 \leqslant |G| \leqslant 5^4$ 时，G 存在极大子群是交换子群，故 $\mathrm{cd}(G, 5^3)=\{1, 5\}=\mathrm{cd}(G, 5^4)$.

情形 2 设 $|G|=5^5$. 由于 G 幂零，对任意 $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ 都有 $Z(\chi) \neq 1$. 由引理 3 可得 $\chi(1) \leqslant 5^2$. 再由引理 4，仅需要构造出满足 $\mathrm{cd}(G, 5^5)=\{1, 5, 5^2\}$ 的极大类 5-群 G. 令

$$P_1=\langle a_1, a_2, a_3, a_4 \mid [a_1, a_2]=a_4, a_i^5=1, i=1,2,3,4\rangle$$

则 $|P_1|=5^4$. 设 b 是 P_1 的外自同态，满足 $a_i^b=a_i a_{i+1}$, $a_4^b=a_4 (i=1,2,3)$，且 $\langle b\rangle \cap P_1=1$. 易得 b 是 P_1 的外自同构，且对 P_1 中任意元 x 都有 $x^{b^5}=1$. 令群 $G=\langle a_1, b\rangle$，则 $|G|=5^5$，P_1 是 G 的极大子群，且

$$K_2(G)=G'=\langle a_2, a_3, a_4\rangle \qquad K_3(G)=\langle a_3, a_4\rangle \qquad K_4(G)=\langle a_4\rangle$$

故 G 是极大类 5-群. 由于存在 $\eta \in \mathrm{Irr}(P_1)$ 满足 $\eta(1)=5$，又因 $Z(P_1)=\langle a_3\rangle \times \langle a_4\rangle$，易得 $\mathrm{Ker}\,\eta \neq Z(G)$，即 $\mathrm{Ker}\,\eta$ 不是 G 的正规子群，于是 η 不可能扩张到 G. 从而可得 $\eta^G=\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ 是维数为 5^2 的不可约特征标.

情形 3 设 $|G|=5^6$. 由引理 3 可得 $\chi(1) \leqslant 5^2$. 类似地仅需要构造出满足 $\mathrm{cd}(G, 5^6)=\{1, 5, 5^2\}$ 的极大类 5-群 G. 令

$$P_1=\langle a_1, a_2, a_3, a_4 \mid [a_1, a_4]=[a_1, a_2]=[a_3, a_2]=a_1^5, a_1^{5^2}=a_i^5=1, i=2,3,4\rangle$$

即 $P_1=\langle a_1, a_2, a_4\rangle * \langle a_2, a_3\rangle$ 是两个阶为 5^3 的非交换群的中心积，因此是阶为 5^5 的超特殊 5-群. 设 b 是 P_1 的外自同态，满足 $a_i^b=a_i a_{i+1}$, $a_4^b=a_4 a_1^{-5} (i=1,2,3)$，且 $\langle b\rangle \cap P_1=1$. 下面验证 b 是 P_1 的 5 阶自同构.

b 作用在换位子上，有

$$[a_1, a_4]^b=[a_2^b, a_3^b]=[a_1 a_2, a_4 a_5^{-5}]=[a_1, a_4]$$
$$[a_2, a_3]^b=[a_2^b, a_3^b]=[a_2 a_3, a_3 a_4]=[a_2, a_3]$$

同时还可得

$$[a_1, a_3]^b=[a_1, a_3][a_1, a_4][a_2, a_3]=[a_1, a_3]$$
$$[a_1, a_2]^b=[a_1, a_2][a_1, a_3][a_2, a_3]=[a_1, a_2]=1$$

b 作用在 a_1 上，有

$$a_1^b=a_1 a_2 \qquad a_1^{b^2}=a_1 a_2^2 a_3$$

由于 $[a_3, a_2]=a_1^5$，则 $(a_2 a_3)^k=a_2^k a_3^k a_1^{\frac{(k-1)k}{2}}$，$k \geqslant 2$，于是

$$a_1^{b^3}=a_1 a_2 (a_2 a_3)^2 a_3 a_4=a_1 a_2^3 a_3^3 a_4 a_1^5$$
$$a_1^{b^4}=a_1 a_2 (a_2 a_3)^3 (a_3 a_4)^3 (a_4 a_1^{-5}) a_1^5=a_1 a_2^4 a_3^6 a_4^4 a_4^4 a_1^{30}$$

进而可得

$$a_1^{b^5}=a_1a_2(a_2a_3)^4(a_3a_4)^6(a_4a_1^{-5})^4a_1^{30}=a_1$$

同样可得 $a_i^{b^5}=a_i(i=2,3,4)$. 显然 b 作用在 P_1 上是同态，因此 b 是 P_1 的 5 阶自同构.

令群 $G=\langle a_1, b\rangle$，则 $G=P_1\rtimes\langle b\rangle$ 是阶为 5^6 的极大类 p-群. 又因 P_1 是超特殊 5-群，易得 $\mathrm{cd}(P_1)=\{1, 5^2\}$，且 P_1 中特征标维数是 5^2 的不可约特征标只有 4 个. 取 $\eta\in\mathrm{Irr}(P_1)$ 满足 $\eta(1)=5^2$，则 η 一定可以扩张到 G. 因此存在 $\chi\in\mathrm{Irr}(G)$ 使得 $\chi_{P_1}=\eta$，由此说明 $\chi(1)=5^2$.

情形 4　设 $|G|=5^7$. 类似地仅需要分别构造出满足 $\mathrm{cd}(G, 5^7)=\{1, 5, 5^2\}$，$\mathrm{cd}(G, 5^7)=\{1, 5, 5^3\}$，$\mathrm{cd}(G, 5^7)=\{1, 5, 5^2, 5^3\}$ 的极大类 5-群 G.

情形 4.1　令

$$P_1=\langle a_1, a_2, a_3, a_4 \mid [a_1, a_2]=a_2^5, a_1^{5^2}=a_2^{5^2}=a_3^5=a_4^5=1\rangle$$

设 b 是 P_1 的自同态，且满足 $P_1\cap\langle b\rangle=1$，其中 $a_i^b=a_ia_{i+1}(i=1,2,3)$，$a_4^b=a_4a_1^{-5}a_2^{-10}$. 验证可得

$$[a_1, a_2]^b=[a_1, a_2]=a_2^5\qquad a_i^{b^5}=1$$

故 $\langle b\rangle$ 是 P_1 的阶为 5 的自同构群. 令群 $G=\langle a_1, b\rangle=P_1\rtimes\langle b\rangle$，从而可得 G 是阶为 5^7 的极大类 p-群，且 G 存在指数是 5^2 的交换正规子群 $A=\langle a_2, a_3, a_4, a_1^5\rangle$. 由于存在 $\eta\in\mathrm{Irr}(P_1)$ 满足 $\eta(1)=5$，又因 $\mathrm{Ker}\,\eta\neq\langle a_2^5\rangle=Z(G)$，即 $\mathrm{Ker}\,\eta$ 不是 G 的正规子群. 于是 η 不可能扩张到 G，从而可得 $\eta^G=\chi\in\mathrm{Irr}(G)$ 是维数为 5^2 的不可约特征标. 因此存在 $\mathrm{cd}(G, 5^7)=\{1, 5, 5^2\}$.

情形 4.2　令子群

$$P_1=\langle a_1, a_2, a_3, a_4 \mid [a_1, a_4]=[a_1, a_2]=[a_3, a_2]=a_2^5, a_1^{5^2}=a_2^{2^5}=a_3^5=a_4^5=1, i=2,3,4\rangle$$

即 $P_1/\langle a_1^5\rangle$ 是阶为 5^5 的超特殊 5-群，即 $\mathrm{cd}(P_1)=\{1, 5^2\}$. 设 b 是 P_1 的外自同态，满足 $a_i^b=a_ia_{i+1}$，$a_4^b=a_4a_1^{-5}a_2^{-10}(i=1,2,3)$，且 $\langle b\rangle\cap P_1=1$. 类似地可以验证 b 是 P_1 的 5 阶自同构，即对任意 $g_1, g_2\in P_1$，一定有 $g_1^{b^5}=g_1$，$[g_1, g_2]^b=[g_1^b, g_2^b]$. 又令 $G=\langle a_1, b\rangle=P_1\rtimes\langle b\rangle$，则可得 G 也是阶为 5^7 的极大类 5-群. 由于 P_1 的任意非线性特征标 η 都有 $\eta(1)=5^2$，又因 $Z(P_1)$ 非循环，$\mathrm{Ker}\,\eta\neq\langle a_2^5\rangle=Z(G)$，即 $\mathrm{Ker}\,\eta$ 不是 G 的正规子群. 于是 η 不可能扩张到 G，从而可得 $\eta^G=\chi\in\mathrm{Irr}(G)$ 是维数为 5^3 的不可约特征标. 因此存在 $\mathrm{cd}(G, 5^7)=\{1, 5, 5^3\}$.

情形 4.3　令子群

$$P_1=\langle a_1, a_2, a_3, a_4 \mid [a_1, a_2]=a_1^5, [a_1, a_4]=[a_3, a_2]=a_2^{-5}, a_1^{5^2}=a_2^{2^5}=a_3^5=a_4^5=1, i=2,3,4\rangle$$

即 $P_1/\langle a_1^5\rangle$ 是阶为 5^5 的超特殊 5-群. 又因 $P_1/\langle a_2^5\rangle$ 存在极大子群是交换群，即 $\mathrm{cd}(P_1)=\{1, 5, 5^2\}$. 设 b 是 P_1 的外自同态，满足 $a_i^b=a_ia_{i+1}$，$a_4^b=a_4a_1^{-5}a_2^{-10}(i=1,2,3)$，且 $\langle b\rangle\cap P_1=1$. 可以验证得到

$$a_i^{b^5}=a_i\qquad [a_i, a_j]^b=[a_i^b, a_j^b]\qquad 1\leqslant i,j\leqslant 4$$

则 b 是 P_1 的 5 阶自同构. 又令 $G=\langle a_1, b\rangle=P_1\rtimes\langle b\rangle$，则可得 G 也是阶为 5^7 的极大类 5-群.

由于 $P_1/\langle a_1^5\rangle$ 是阶为 5^5 的超特殊 5-群，则存在 P_1 的非线性特征标 η，使得 $\eta(1)=5^2$，且 $\mathrm{Ker}\,\eta=\langle a_1^5\rangle$ 不是 G 的正规子群. 于是 η 不可能扩张到 G，从而 $\eta^G=\chi\in\mathrm{Irr}(G)$ 是 G 的维数为 5^3 的不可约特征标. 又因 $P_1/\langle a_2^5\rangle$ 存在极大子群是交换群，则可以得到 P_1 的非线性特征标 θ，使得 $\theta(1)=5$ 且 $\mathrm{Ker}\,\theta$ 不是 G 的正规子群. 因此 θ^G 是 G 的维数为 5^2 的不可约特征标，故此时 $\mathrm{cd}(G, 5^7)=\{1, 5, 5^2, 5^3\}$.

注 1　本文还构造了阶是 5^8 的极大类 5-群的特征标维数的情况，即 $\mathrm{cd}(G, 5^8)=\{1, 5\}$，$\{1, 5, 5^2\}$，$\{1, 5, 5^3\}$，$\{1, 5, 5^2, 5^3\}$. 同时还构造了存在 $\mathrm{cd}(G, 5^9)=\{1, 5, 5^2, 5^3, 5^4\}$ 的极大类 5-群.

我们提出下面问题：

问题　对任意 $m\geqslant 1$ 以及集合 $A=\{1, p, p^2, p^3, \cdots, p^{m-1}, p^m\}$，是否存在阶为 p^{2m+1+e} 的极大类 p-群 G，使得 $\mathrm{cd}(G)=A$，其中 $e=0,1$？

参考文献：

[1] 杨东芳，赵 冲，吕 恒. 非循环子群的共轭类个数为7的有限 p-群[J]. 西南大学学报(自然科学版)，2017，39(4)：52-55.

[2] 郭红如，吕 恒. 可以表示成3个或4个交换子群并的群[J]. 西南大学学报(自然科学版)，2017，39(8)：97-100.

[3] 薛海波，吕 恒. 具有特殊特征标维数的有限 p-群[J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2019，44(10)：5-7.

[4] BLACKBURN N. On a Special Class of p-Groups[J]. Acta Math，1958，100(1-2)：45-92.

[5] KELLER T M. RAGAN D，TIMS G T. On the Taketa Bound for Normally Monomial p-Groups of Maximal Class[J]. J Algebra，2004，277(2)：675-688.

[6] SLATTERY M C. Maximal Class p-Groups with Large Character Degree Gaps[J]. Arch Math，2015，105(6)：501-507.

[7] BERKOVICH Y，JANKO Z. Groups of Prime Power Order，Volume 1[M]. Berlin：Walter de Gruyter，2008.

[8] LEEDHAM-GREEN C R，MCKAY S. The Structure of Groups of Prime Power Order[M]. New York：Oxford University Press，2002.

[9] ISAACS I M. Character Theory of Finite Groups[M]. New York：Academic Press，1976.

[10] 徐明曜，曲海鹏. 有限群 p-群[M]. 北京：北京大学出版社，2010.

The Degrees of Irreducible Characters of Finite 5-Groups of Maximal Class

XUE Hai-bo[1]， LÜ Heng[2]

1. Department of Science and Engineering，Chongqing College of Humanities，Science and Technology，Chongqing 401524，China；

2. School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：The degrees of characters has important influence on the structure of finite groups. In this paper，it is studied the finite 5-groups of maximal class. By constructing concrete examples，we get the degrees of irreducible character of finite 5-groups of maximal class of order less than 5^7.

Key words：p-group of maximal class；character；degree

责任编辑 廖 坤