第 45 卷 第 12 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2020 年 12 月
Vol. 45 No. 12 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Dec. 2020

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2020.12.002

关于不定方程 $7x(x+1)(x+2)(x+3)=10y(y+1)(y+2)(y+3)$①

赵 蕾

西南大学 数学与统计学院,重庆 400715

摘要:运用 Pell 方程、递归序列、同余式、(非)平方剩余及雅可比符号等一些初等的证明方法,对不定方程 $7x(x+1)(x+2)(x+3)=10y(y+1)(y+2)(y+3)$ 的解进行了研究,证明出该不定方程仅有正整数解 $(x, y)=(22, 20)$. 在证明该结论的过程中,将不定方程变形为了 Pell 方程的形式,同时得到了该不定方程的所有整数解,它们分别是 $(0, 0)$, $(-1, 0)$, $(-2, 0)$, $(-3, 0)$, $(-3, -3)$, $(-2, -3)$, $(-1, -3)$, $(0, -3)$, $(22, -23)$, $(-25, -23)$, $(-25, 20)$.

关 键 词:不定方程;正整数解;递归序列;平方剩余;雅可比符号

中图分类号:O156.2 **文献标志码**:A **文章编号**:1000-5471(2020)12-0005-05

设 $(m, n)=1$,形如

$$mx(x+1)(x+2)(x+3)=ny(y+1)(y+2)(y+3)$$

的四次不定方程是数论研究中非常重要的一个课题. 国内外很多学者先后对其进行了大量的研究[1-13]. 文献[1]证明了:当 $(m, n)=(3, 5)$ 时,方程仅有正整数解 $(x, y)=(7, 6)$;文献[2]证明了:当 $(m, n)=(1, 34)$ 时,方程仅有正整数解 $(x, y)=(14, 5)$;文献[4]证明了:当 $(m, n)=(1, 7)$ 时,方程仅有正整数解 $(x, y)=(4, 2)$;文献[10]证明了:当 $(m, n)=(6, 7)$ 时,方程有正整数解 $(x, y)=(25, 24)$.

本文将证明以下结论:

定理 1 当 $(m, n)=(7, 10)$ 时,不定方程

$$7x(x+1)(x+2)(x+3)=10y(y+1)(y+2)(y+3) \tag{1}$$

有且仅有一组正整数解 $(x, y)=(22, 20)$.

在整个证明过程中,需要先将方程(1)化为

$$[7(x^2+3x+1)]^2-70(y^2+3y+1)^2=-21 \tag{2}$$

容易知道 $x^2-70y^2=-21$ 的全部正整数解由以下的两个非结合类给出:

$$x_n+y_n\sqrt{70}=\pm(7+\sqrt{70})(u_n+v_n\sqrt{70})=\pm(7+\sqrt{70})(251+30\sqrt{70})^n \qquad n\in\mathbb{N}_+$$

$$\overline{x_n}+\overline{y_n}\sqrt{70}=\pm(-7+\sqrt{70})(u_n+v_n\sqrt{70})=\pm(-7+\sqrt{70})(251+30\sqrt{70})^n \qquad n\in\mathbb{N}_+$$

其中,$7+\sqrt{70}$ 是 $x^2-70y^2=-21$ 的最小正整数解,$251+30\sqrt{70}$ 是 Pell 方程 $u^2-70v^2=1$ 的基本解. 由于上述两个非结合类的解是共轭的,所以容易知道 $\overline{y_n}=y_{-n}$,于是方程(2)的解应该满足以下形式:

---

① 收稿日期:2019-12-20

基金项目:国家自然科学基金项目(11471265).

作者简介:赵 蕾(1996-),女,硕士研究生,主要从事计算数论的研究.

$$(2y+3)^2=4y_n+5 \tag{3}$$

$$(2y+3)^2=-4y_n+5 \tag{4}$$

由(3),(4)式不难推出下列关系式:

$$y_{n+1}=502y_n-y_{n-1} \qquad y_0=1,\ y_1=461 \tag{5}$$

$$u_{n+1}=502u_n-u_{n-1} \qquad u_0=1,\ u_1=251 \tag{6}$$

$$v_{n+1}=502v_n-v_{n-1} \qquad v_0=1,\ v_1=30 \tag{7}$$

$$u_{2n}=x_n^2+77v_n^2=2u_n^2-1 \qquad v_{2n}=2u_nv_n \tag{8}$$

$$y_n=u_n+7v_n \tag{9}$$

$$u_{n+2kh}\equiv(-1)^k u_n(\bmod u_h) \tag{10}$$

$$v_{n+2kh}\equiv(-1)^k v_n(\bmod u_h) \tag{11}$$

$$y_{n+2kh}\equiv(-1)^k y_n(\bmod u_h) \tag{12}$$

在下面的叙述中将证明(3)式仅当$n\equiv 0,1,-1$时成立,且(4)式仅当$n\equiv 0$时成立,从而给出方程(2)的全部整数解,进一步求出方程(1)的全部整数解.

下面考察(3)式的解,即n取何值时$4y_n+5$为完全平方数.

引理 1 设$2\mid n$,$n>0$,则$\left(\frac{\pm 28v_{2n}+5}{u_{2n}}\right)=\left(\frac{\pm 28v_n+5u_n}{181}\right)$.

证 因为$2\mid n$,由(8),(9)式可知$u_n\equiv 1(\bmod 2)$,$u_n\equiv 1(\bmod 4)$,$u_n\equiv 1(\bmod 8)$,且

$$4y_{2n}+5\equiv 4\times 7v_{2n}+4u_{2n}+5\equiv 28v_{2n}+5(\bmod u_{2n})$$

由(9)式可知

$$\left(\frac{\pm 28v_{2n}+5}{u_{2n}}\right)=\left(\frac{\pm 56u_nv_n+10u_n^2}{u_{2n}}\right)=\left(\frac{2}{u_{2n}}\right)\left(\frac{u_n}{u_{2n}}\right)\left(\frac{\pm 28v_n+5u_n}{u_{2n}}\right)=$$

$$\left(\frac{u_n}{u_{2n}}\right)\left(\frac{\pm 28v_n+5u_n}{u_{2n}}\right)=\left(\frac{\pm 28v_n+5u_n}{u_n^2+70v_n^2}\right)=$$

$$\left(\frac{28^2v_n^2+25\times 70v_n^2}{\pm 28v_n+5u_n}\right)=\left(\frac{2}{\pm 28v_n+5u_n}\right)\left(\frac{7}{\pm 28v_n+5u_n}\right)\left(\frac{181}{\pm 28v_n+5u_n}\right)=$$

$$\left(\frac{\pm 28v_n+5u_n}{181}\right)$$

引理 2 若(3)式成立,则$n\equiv 0,1,-1(\bmod 2\,100)$.

证 用对序列$\{4y_n+5\}$取模的方法证明.

第一步 证$n\equiv 0,1,29(\bmod 30)$.

取 mod 4 591,排除$n\equiv 3(\bmod 5)$,此时$4y_n+5\equiv 4\,282(\bmod 4\,591)$,剩余$n\equiv 0,1,2,4(\bmod 5)$.

取 mod 11,排除$n\equiv 2(\bmod 5)$,因此排除了$n\equiv 17(\bmod 30)$;取 mod 25 150,排除$n\equiv 6(\bmod 10)$,因此排除了$n\equiv 26(\bmod 30)$;取 mod 61,排除$n\equiv 7,11,13,14,19,20,21,22,23,25,27,28(\bmod 30)$;取 mod 29,排除$n\equiv 5,8,16,19,24(\bmod 30)$;取 mod 89,排除$n\equiv 6,10,12,22(\bmod 30)$;取 mod 404 161,排除$n\equiv 2,3,4,9,18(\bmod 30)$. 综合起来剩余$n\equiv 0,1,15,29(\bmod 30)$,所以剩余$n\equiv 0,1,15,29,30,31,45,59(\bmod 60)$.

取 mod 252 001,排除$n\equiv 7(\bmod 12)$,因此排除了$n\equiv 31(\bmod 60)$;取 mod 59,排除$n\equiv 15,29,45(\bmod 60)$. 综合起来剩余$n\equiv 0,1,30,59(\bmod 60)$.

下面用计算的方法来排除$n\equiv 30(\bmod 60)$. 令$n=60t+30$. 若$2\mid t$,则$n\equiv 6(\bmod 8)$;若$2\nmid t$,则$n\equiv 2(\bmod 8)$. 其中,取 mod 126 001,排除$n\equiv 2,6(\bmod 8)$,综合起来剩余$n\equiv 0,1,59(\bmod 60)$.

第二步 证$n\equiv 0,1,419(\bmod 420)$.

根据第一步,有$n\equiv 0,1,59,119,179,239,299,359,419(\bmod 420)$. 取 mod 24 809,排除$n\equiv 3(\bmod 14)$,因此排除了$n\equiv 59(\bmod 420)$;取 mod 727,排除$n\equiv 9(\bmod 14)$,因此排除了$n\equiv 359(\bmod 420)$;取

mod 41，排除 $n\equiv 11,35,29 \pmod{42}$，因此排除了 $n\equiv 179,119,239 \pmod{420}$；取 mod 281，排除 $n\equiv 19 \pmod{140}$，因此排除了 $n\equiv 299 \pmod{420}$. 所以综合来说，剩余 $n\equiv 0,1,419 \pmod{420}$.

第三步　证 $n\equiv 0,1,-1 \pmod{2\,100}$

根据第二步，有 $n\equiv 0,1,419,839,1\,259,1\,679,2\,099 \pmod{2\,100}$. 取 mod 149，排除 $n\equiv 9 \pmod{50}$，因此排除了 $n\equiv 1\,259 \pmod{2\,100}$；取 mod 1 249，排除 $n\equiv 19 \pmod{50}$，因此排除了 $n\equiv 419 \pmod{2\,100}$；取 mod 1 301，排除 $n\equiv 14,4 \pmod{25}$，因此排除了 $n\equiv 839,1\,679 \pmod{2\,100}$. 所以综合来说，剩余 $n\equiv 0,1,2\,099 \pmod{2\,100}$，即 $n\equiv 0,1,-1 \pmod{2\,100}$.

综上所述，得 $n\equiv 0,1,-1 \pmod{2\,100}$.

引理 3　若 $n\equiv 0 \pmod{2\,100}$，则必有 $n=0$.

证　令 $n=2\cdot k\cdot 3\cdot 5^2\cdot 7\cdot 2^t(t\geqslant 1,\ k\equiv 1 \pmod 2)$，对序列 $\{5u_n+28v_n\}$ 取 mod 181 可以得到两个剩余序列的周期为 90，而对 2^t 取 mod 90，所得序列周期为 12.

当 $k\equiv 1 \pmod 4$ 时，令

$$m=\begin{cases}2^t & t\equiv 0,4,7,8,10 \pmod{12}\\ 7\cdot 2^t & t\equiv 1,2,5,6 \pmod{12}\\ 5^2\cdot 2^t & t\equiv 3,9,11 \pmod{12}\end{cases}$$

则当 $t(\geqslant 1)\equiv 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11 \pmod{12}$ 时，$m\equiv 46,14,28,20,16,44,88,38,76,20,34,80 \pmod{90}$，对应有 $5u_m+28v_m\equiv 77,30,123,47,173,128,175,174,112,47,83,179 \pmod{181}$，这些数均为 mod 181 的平方非剩余.

当 $k\equiv -1 \pmod 4$ 时，令

$$m=\begin{cases}2^t & t\equiv 0,1,2,3,4,8,9 \pmod{12}\\ 5\cdot 2^t & t\equiv 7,10,11 \pmod{12}\\ 5^2\cdot 2^t & t\equiv 6 \pmod{12}\\ 3\cdot 2^t & t\equiv 5 \pmod{12}\end{cases}$$

则当 $t(\geqslant 1)\equiv 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11 \pmod{12}$ 时，$m\equiv 46,2,4,8,16,6,70,10,76,62,80,70 \pmod{90}$，对应有 $5u_m-28v_m\equiv 128,175,57,115,23,141,47,179,30,123,74,47 \pmod{181}$. 这些数均为 mod 181 的平方非剩余.

当 $n=0$ 时，$4y_n+5=3^2$.

引理 4　设 $n\equiv 1 \pmod{2\,100}$，当 $n>1$ 时，$4y_n+5$ 为非平方数.

证　设 $n=1+2\cdot k\cdot 3\cdot 5^2\cdot 7\cdot 2^t(t\geqslant 1,\ 2\nmid k)$.

由(12)式可知

$$4y_n+5\equiv 4y_{1+2\cdot k\cdot 3\cdot 5^2\cdot 7\cdot 2^t}+5\equiv -4y_1+5\equiv -1\,839 \pmod{u_m}$$

此时 m 为 $2^t,5^2\cdot 2^t,3\cdot 2^t,7\cdot 2^t$ 中的任意一个.

当 $2\mid m$ 时，$u_m\equiv 1 \pmod 4$，得

$$\left(\frac{4y_n+5}{u_m}\right)=\left(\frac{-1\,839}{u_m}\right)=\left(\frac{-1}{u_m}\right)\left(\frac{1\,839}{u_m}\right)=\left(\frac{u_m}{1\,839}\right)$$

对 u_m 取 mod 1 839，所得剩余序列周期为 204. 对 2^t 取 mod 204，除 $t=1$ 外，剩余序列周期为 8.

令

$$m=\begin{cases}2^t & t\equiv 0,2 \pmod 8\\ 3\cdot 2^t & t\equiv 1,3,5,7 \pmod 8\\ 5\cdot 2^t & t\equiv 6 \pmod 8\\ 5\cdot 7\cdot 2^t & t\equiv 4 \pmod 8\end{cases}$$

则当 $t(>1)\equiv 0,1,2,3,4,5,6,7 \pmod 8$ 时，$m\equiv 52,108,4,24,152,96,116,180 \pmod{204}$，对应有$u_m\equiv$

1 633,1 609,820,1 786,1 633,1 609,520,1 786(mod 1 839). 这些数均为 mod 1 839 的平方非剩余.

当 $t=1$ 时，$m=6$，$u_m=1\ 456 \pmod{1\ 839}$. 对所有的 m，均有 $\left(\frac{u_m}{1\ 839}\right)=-1$，从而 $4y_n+5$ 为非平方数. 当 $n=1$ 时，$4y_n+5=43^2$ 为平方数.

引理 5 设 $n\equiv -1 \pmod{2\ 100}$，当 $n>-1$ 时，$4y_n+5$ 为非平方数.

证 设 $n=-1+2\cdot k\cdot 3\cdot 5^2\cdot 7\cdot 2^t(t\geqslant 1,\ 2\nmid k)$.

由(12)式可知

$$4y_n+5\equiv 4y_{-1+2\cdot k\cdot 3\cdot 5^2\cdot 7\cdot 2^t}+5\equiv -4y_{-1}+5\equiv -159 \pmod{u_m}$$

此时 m 为 2^t，$5^2\cdot 2^t$，$3\cdot 2^t$，$7\cdot 2^t$ 中的任意一个.

当 $2\mid m$ 时，$u_m\equiv 1 \pmod 4$，得

$$\left(\frac{4y_n+5}{u_m}\right)=\left(\frac{-159}{u_m}\right)=\left(\frac{-1}{u_m}\right)\left(\frac{159}{u_m}\right)=\left(\frac{u_m}{159}\right)$$

对 u_m 取 mod 159，所得剩余序列周期为 52. 对 2^t 取 mod 52，除 $t=1$ 外，剩余序列周期为 12.

令

$$m=\begin{cases}2^t & t\equiv 0,1,7,9,11 \pmod{12}\\ 3\cdot 2^t & t\equiv 2,8 \pmod{12}\\ 7\cdot 2^t & t\equiv 4,10 \pmod{12}\\ 5^2\cdot 2^t & t\equiv 3,5,6 \pmod{12}\end{cases}$$

则当 $t(>1)\equiv 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11 \pmod{12}$ 时，$m\equiv 40,28,12,44,8,20,40,24,40,44,44,20 \pmod{52}$，对应有 $u_m\equiv 85,139,85,31,31,19,85,139,85,31,31,19 \pmod{159}$. 这些数均为 mod 159 的平方非剩余.

当 $t=1$ 时，$m=2$，$u_m=73 \pmod{159}$. 对所有的 m，均有 $\left(\frac{u_m}{159}\right)=-1$，从而 $4y_n+5$ 为非平方数. 当 $n=1$ 时，$4y_n+5=13^2$ 为平方数.

引理 6 若(4)式成立，则 $n=0$，即 $(2y+3)^2=-4y_n+5$ 成立，此时 $n=0$.

证 由于 $(2y+3)^2=-4y_n+5>0$，而由 $y_{n+1}=502y_n-y_{n-1}$ 可知 $y_n>1$，矛盾. 但当 $n=0$ 时，$-4y_n+5=1^2$. 结论成立.

定理 1 的证明 由引理 2－引理 5 可知，若 $(2y+3)^2=4y_n+5$ 成立，则 $n=0,1,-1$，即 $y=0,-3,-23,20,5,-8$.

由引理 6 可知，若 $(2y+3)^2=-4y_n+5$ 成立，则 $n=0$，即 $y=0,-3$.

因此可知方程(1)共有 12 组整数解. 其中 8 组解为平凡整数解，使得方程两端都为 0，即(0, 0),(−1, 0),(−2, 0),(−3, 0),(−3, −3),(−2, −3),(−1, −3),(0, −3)；4 组非平凡解(22, 20),(22, −23),(−25, −23),(−25, 20). 因此，不定方程 $7x(x+1)(x+2)(x+3)=10y(y+1)(y+2)(y+3)$ 仅有正整数解 $(x,y)=(22,20)$，证毕.

参考文献：

[1] 罗 明，朱德辉，马芙蓉. 关于不定方程 $3x(x+1)(x+2)(x+3)=5y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2009，34(5)：16-21.

[2] 林昌娜，罗 明. 关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=34y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2016，41(4)：10-14.

[3] 宣体佐. 关于不定方程 $Y(Y+1)(Y+2)(Y+3)=5X(X+1)(X+2)(X+3)$ [J]. 北京师范大学学报(自然科学版)，1982，18(3)：27-34.

[4] 罗 明. 关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=7y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 重庆师范学院学报(自然科学版)，1991，

8(1)：1-8.

[5] 郭凤明，罗　明. 关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=13y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 重庆师范大学学报(自然科学版)，2013，30(5)：101-105.

[6] 张　洪，罗　明. 关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=Dy(y+1)(y+2)(y+3)(D=21, 23)$ [J]. 重庆工商大学学报(自然科学版)，2015，32(7)：56-61.

[7] 王　聪. 关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=30y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 重庆工商大学学报(自然科学版)，2016，33(1)：29-32.

[8] 李益孟，罗　明. 关于不定方程 $5x(x+1)(x+2)(x+3)=6y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2017，39(8)：83-88.

[9] 孙久浩. 关于不定方程 $3x(x+1)(x+2)(x+3)=14y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2017，42(4)：1-6.

[10] 胡邦群，罗　明. 关于不定方程 $6x(x+1)(x+2)(x+3)=7y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2017，42(10)：17-21.

[11] 陈　琼. 关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=33y(y+1)(y+2)(y+3)$的整数解的研究 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2018，40(4)：35-40.

[12] 柯　召，孙　琦. 谈谈不定方程 [M]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2011：15-29.

[13] 曹珍富. 丢番图方程引论 [M]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2012：10-16，38-45.

On Diophantine Equation $7x(x+1)(x+2)(x+3)=10y(y+1)(y+2)(y+3)$

ZHAO　Lei

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：In the elementary method of Pell's equation，recurrence sequences，congruent forms，(non-quadratic) quadratic remainders and Jacobian symbols，it shows that the only positive solution of the Diophantine equation $7x(x+1)(x+2)(x+3)=10y(y+1)(y+2)(y+3)$ is $(x, y)=(22, 20)$. In the process of proving this conclusion，we change the Diophantine equation to a form of Pell-equation. We also get all integer solution of the equation：(0,0)，(−1,0)，(−2,0)，(−3,0)，(−3,−3)，(−2,−3)，(−1,−3)，(0,−3)，(22,−23)，(−25,−23)，(−25,20).

Key words：diophantine equation；positive integer solution；recursive sequence；square residue；Jacobian symbol

责任编辑　廖　坤