DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2020.12.004

分段严格单调连续自映射迭代根的不存在性①

刘晓华

乐山师范学院 数学与信息科学学院，四川 乐山 614000

摘要：区间上严格单调连续自映射的迭代根问题得到了彻底的解决. 一类只有有限个非单调点的连续自映射，称为严格逐段单调自映射，简称为PM映射. 对这类自映射，当特征区间存在时，已获得了一些关于其迭代根存在性的结果. 继续研究PM映射迭代根的不存在性.

关　键　词：PM映射；迭代根；不存在性

中图分类号：O174　　**文献标志码：A**　　**文章编号：**1000-5471(2020)12-0015-05

给定非空集 I 和正整数 n. 给定自映射 $F: I \longrightarrow I$ 的 n 次迭代根 $f: I \longrightarrow I$ 满足

$$f^n(x) = F(x) \qquad x \in I$$

其中 f^n 表示 f 的 n 次迭代，也就是 $f^n = f \circ f^{n-1}$ 和 $f^0 = \mathrm{i}d$.

映射的迭代根问题在动力系统和函数方程中都会涉及到. 文献[1-3]利用映射的迭代根研究了动力系统和函数方程问题，这一研究在文献[4-6]中有了突破性的进展，其结果都是针对区间上的单调连续自映射. 关于在区间上非单调或者不连续的自映射的迭代根问题研究甚少[7-8].

区间上非单调连续自映射的迭代根问题要难得多. 文献[9-10]研究了一类特殊的非单调连续映射，就是只有有限个非单调点的连续映射，称为严格逐段单调映射，简称为PM映射. 用 $\mathrm{PM}(I)$ 表示在区间 $I = [a, b]$ 上所有严格逐段单调连续映射组成的集合. 让 $N(F)$ 表示 $F \in \mathrm{PM}(I)$ 在 I 上的非单调点的个数. 显然，F 满足单调不减关系

$$0 = N(F^0) \leqslant N(F) \leqslant N(F^2) \leqslant \cdots \leqslant N(F^n) \leqslant \cdots$$

用 $H(F)$ 表示满足 $N(F^k) = N(F^{k+1})$ 的最小正整数 k. 由文献[9-10]知：当 $H(F) > 1$ 时，对任意整数 $n > N(F)$，F 没有连续的 n 次迭代根；当 $H(F) \leqslant 1$ 时，有包含 F 值域的区间 $[a', b'] \subseteq I$，称为特征区间，使得 F 在此区间上是严格单调的. 因此，可以通过找 F 在特征区间上的迭代根去找到 F 在区间 I 上的一些迭代根.

文献[9-10]提出了两个公开问题：

(P1) 当 $H(F) > 1$ 且 $N(F) \geqslant n$ 时，F 在什么条件下具有连续的迭代根？

(P2) 当 $H(F) \leqslant 1$ 且 $N(F) + 1 \geqslant n$ 时，若 F 在 I 上取到值 a' 或 b'，而在 $[a', b']$ 上取不到此值，F 在什么条件下具有连续的迭代根？

对问题(P1)，文献[11-12]分别讨论了区间[0，1]上 N 型和反 N 型映射的迭代根问题，也就是 $N(F) = n = 2$ 的情形. 对 $N(F) = n = 2$ 情形，文献[13-14]研究了扩张自映射的迭代根. 问题(P2)在文

① 收稿日期：2020-01-09
基金项目：四川省教育厅重点科研基金项目(18ZA0242)；乐山师范学院重点项目(LZD014).
作者简介：刘晓华(1964—)，女，教授，主要从事函数迭代与迭代根的研究.

献[15]中得到了部分解决．文献[16]研究了当 $N(F)=n\geqslant 3$ 时 F 的迭代根情况，在这种情形下，如果迭代根存在，仅有两种类型的迭代根．记这两种类型的迭代根分别为 τ_1 型和 τ_2 型，其中 $\tau_1(\tau_2)$ 型指在包含 F 的所有非单调点且以非单调点为区间端点的区间上是严格递增(递减)的．文献[16]对 τ_1 型的迭代根已经彻底解决，对 τ_2 型的迭代根的完整描述还是一个公开的问题．

关于问题(P1)，我们考虑由下面 $\Lambda(I)$ 定义的 PM 函数：

$$\Lambda(I)=\{F\in \mathrm{PM}(I)：H(F)>1，N(F)=n>1，F(a)=b，F(b)=a\} \tag{1}$$

本文完全解决了由 $\Lambda(I)$ 定义的 PM 映射的迭代根问题，使得文献[16]中的公开问题得到了部分解决．

在下文中，我们假定 f 是 F 的 n 次迭代根，也就是 $f^n=F$．并且用 $S(f^i)$ 表示 f^i 的所有非单调点组成的集合，其中 $i=1,2,\cdots,n$．显然，$S(F)=S(f^n)$．记 $S(F)=\{c_1，c_2，\cdots，c_n\}$，其中，$a<c_1<c_2<\cdots<c_n<b$.

引理 1　假定 $F\in\Lambda(I)$ 有连续的 $n>1$ 次迭代根 f．则：

(i) $N(f^i)=i$；

(ii) $\min f^i=a$，$\max f^i=b(i=1,2,\cdots,n)$.

证　(i) 假定 F 有连续的 n 次迭代根 $f：I\longrightarrow I$ 满足(1)式．由 $H(F)>1$，我们有 $N(F^2)>N(F)$，也就是 $N(f^{2n})>N(f^n)$，于是得到 $H(f)>n$ 和 $1\leqslant N(f)<N(f^2)<\cdots<N(f^n)=N(F)=n$．因此 $N(f^i)=i(i=1,2,\cdots,n)$.

(ii) 由(i)，我们有 $N(f)=1$．假定 x_1 表示 f 在 I 上的唯一的非单调点，那么 $f(x_1)$ 或者是 f 在 I 上的最小值(简记为 $\min f$)，或者是 f 在 I 上的最大值(简记为 $\max f$)．如果 $f(x_1)=\min f$，由 $a=\min f^n\geqslant\min f=f(x_1)\geqslant a$，有 $f(x_1)=\min f=a$，于是有 $a=\min f\leqslant\min f^i\leqslant\min f^n=a$，因此 $\min f^i=a(i=1,2,\cdots,n)$；如果 $f(x_1)=\max f$，由 $b=\max f^n\leqslant\max f=f(x_1)\leqslant b$，有 $f(x_1)=\max f=b$，于是 $b=\max f\geqslant\max f^i\geqslant\max f^n=b$，因此 $\max f^i=b(i=1,2,\cdots,n)$.

引理 2　假定 $F\in\Lambda(I)$ 有连续的 $n>1$ 次迭代根 f，那么或者 $S(f)=\{c_1\}$，或者 $S(f)=\{c_n\}$.

证　由引理 1，我们有 $N(f)=1$．因此，f 在 I 上仅有唯一的非单调点．由文献[16]的注 2.7，我们知道 $S(f)\subset S(F)$．因此，一定存在某个 $i\in\{1，2，\cdots，n\}$ 使得 $S(f)=\{c_i\}$．记 $S_1=S(f)$，$S_k=\{x\in(a，b)：f(x)\in S(f^{k-1})\}\backslash S(f^{k-1})$，$k=2,3,\cdots,n$．由文献[16]的引理 2.3，有 $S(f^k)=S(f)\cup\{x\in(a，b)：f(x)\in S(f^{k-1})\}$，$k=2,3,\cdots,n$．由文献[16]的推论 2.5 知：当 $S(f)\subset S(f^{k-1})$ 时，有

$$\begin{aligned}S(f^k)\backslash S(f^{k-1})=&S(f)\cup\{x\in(a，b)：f(x)\in S(f^{k-1})\}\backslash S(f^{k-1})=\\&\{x\in(a，b)：f(x)\in S(f^{k-1})\}\backslash S(f^{k-1})=S_k\end{aligned}$$

因此，S_k 仅有一个元素，且 $S(f^k)=S(f^{k-1})\cup S_k(k=1,2,\cdots,n)$．于是 $S(f^k)=S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_k$．特别地，$S(F)=S(f^n)=S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_n$，其中 $S_i\cap S_j=\varnothing$，$i\neq j$，$i,j=1,2,\cdots,n$．现在假定引理 2 的结论不成立，则存在 $i\in\{2，3，\cdots，n-1\}$ 使得 $S(f)=\{c_i\}$，那么 $S_1=\{c_i\}$，且存在两个不相等的大于 1 的整数 k_1,k_2，使得 $S_{k_1}=\{c_1\}$，$S_{k_2}=\{c_n\}$．由于 c_i 是 f 在 I 上的唯一非单调点，则 $f(c_i)=\min f$，或者 $f(c_i)=\max f$．因此，仅有下面两种可能的情形：

① $f(c_n)\leqslant f(c_1)<f(c_i)$，或者 $f(c_i)<f(c_1)\leqslant f(c_n)$；

② $f(c_1)<f(c_n)<f(c_i)$，或者 $f(c_i)<f(c_n)<f(c_1)$.

不失一般性，假定 ① 成立，那么由 f 的连续性，存在 $\xi\in(c_i，c_n]$ 使得 $f(\xi)=f(c_1)$．由于 $c_1\in S_{k_1}$，我们有 $f(c_1)\in S(f^{k_1-1})$，从而有 $f(\xi)\in S(f^{k_1-1})$．因此，$\xi\in S_{k_1}$ 或者 $\xi\in S(f^{k_1-1})$．注意到 $S_{k_1}=\{c_1\}$ 和 $\xi\neq c_1$，因此 $\xi\in S_{k_1}$ 是不可能的．所以 $\xi\in S(f^{k_1-1})=S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_{k_1-1}$．于是存在 $j\in\{1，2，\cdots，k_1-1\}$ 使得 $\xi\in S_j$．由于 $c_1\in S_{k_1}$，则 $c_1\notin S(f^{k_1-1})$，由文献[16]的推论 2.5 得到 $c_1\notin S(f^{j-1})$．另一方面，由 $\xi\in S_j$，得到 $f(c_1)=f(\xi)\in S(f^{j-1})$，于是 $c_1\in S_j$，但是当 $c_1\in S_{k_1}$ 和 $j\neq k_1$ 时，$c_1\in S_j$ 是不可能的．因此引理 2 得证．

引理 3　假定 $F\in\Lambda(I)$ 有连续的 $n>1$ 次迭代根 f. 则：

(i) 如果 f 是 τ_1 型的迭代根，那么 $f(c_1)=a$ 或者 $f(c_n)=b$；

(ii) 如果 f 是 τ_2 型的迭代根，那么 $f(c_1)=b$ 或者 $f(c_n)=a$.

证　由文献[16]，我们知 $F\in\Lambda(I)$ 仅有 τ_1 和 τ_2 型的迭代根. 由引理 1 和引理 2 很容易证明引理 3.

引理 4[16]　假定 $F\in\Lambda(I)$. 则：

(i) 假设 f 是 F 的 $n>1$ 次连续 τ_1 型的迭代根. 如果 $S(f)=\{c_1\}$，那么对每个 $i\in\{2,3,\cdots,n\}$ 都有 $f(c_i)=c_{i-1}$；如果 $S(f)=\{c_n\}$，那么对每个 $i\in\{1,2,\cdots,n-1\}$ 都有 $f(c_i)=c_{i+1}$.

(ii) 假设 f 是 F 的 $n\geqslant 3$ 次连续 τ_2 型的迭代根. 如果 $S(f)=\{c_1\}$，那么对每个 $i\in\left\{2,3,\cdots,\left[\dfrac{n+1}{2}\right]\right\}$都有 $f(c_i)=c_{n+2-i}$，且对每个 $i\in\left\{\left[\dfrac{n+1}{2}\right]+1,\cdots,n\right\}$都有 $f(c_i)=c_{n+1-i}$. 如果 $S(f)=\{c_n\}$，那么对每个 $i\in\left\{1,2,\cdots,\left[\dfrac{n-1}{2}\right]\right\}$都有 $f(c_{n-i})=c_i$，且对每个 $i\in\left\{\left[\dfrac{n-1}{2}\right]+1,\cdots,n-1\right\}$都有 $f(c_{n-i})=c_{i+1}$.

引理 5　假定 $F\in\Lambda(I)$ 有连续的 n 次迭代根 f. 则：

(i) 如果 f 是 τ_1 型的迭代根，那么在情形 $S(f)=\{c_1\}$，$f(a)\leqslant c_1$ 和 $S(f)=\{c_n\}$ 下，$f(b)\geqslant c_n$；

(ii) 如果 f 是 τ_2 型的迭代根，那么在情形 $S(f)=\{c_1\}$，$f(b)<c_1$ 和 $S(f)=\{c_n\}$ 下，$f(a)>c_n$.

证　假定 $F\in\Lambda(I)$ 有连续的 n 次迭代根 f，由文献[10]的推论 2.3 知 $f\in\mathrm{PM}(I)$.

(i) 假定 f 是 τ_1 型的迭代根且 $S(f)=\{c_1\}$，由引理 3 有 $f(c_1)=a<c_1$. 假定 $f(a)>c_1$，由 f 的连续性，存在 $c\in(a,c_1)$ 使得 $f(c)=c_1$，因此 $f(c)\in S(f)$. 由引理 3 和文献[16]的推论 2.5，得到 $c\in S(f^2)\subset S(f^n)=S(F)$，这与 c_1 是 F 的最小非单调点矛盾. 因此 $f(a)\leqslant c_1$. 类似地，也能证明：如果 f 是 τ_1 型的迭代根且 $S(f)=\{c_n\}$，则一定有 $f(b)\geqslant c_n$.

(ii) 假定 f 是 τ_2 型的迭代根且 $S(f)=\{c_1\}$，由引理 4 有 $f(c_n)=c_1$. 由于 f 在$[c_n,b]$上是递减的，则有 $f(b)<f(c_n)=c_1$. 类似地，如果 f 是 τ_2 型的迭代根且 $S(f)=\{c_n\}$，由引理 4 有 $f(c_1)=c_n$. 由于 f 在$[a,c_1]$上是递减的，则有 $f(a)>f(c_1)=c_n$.

定理 1　假定 $F\in\Lambda(I)$，则 F 没有 $n\geqslant 3$ 次连续迭代根.

证　由 $\Lambda(I)$ 的定义知 $F(a)=b$，$F(b)=a$，因此 $N(F)$ 是偶数. 因为 $n=N(F)$，所以 F 仅有偶数次迭代根. 我们知道 F 在区间$[a,c_1]$和区间$[c_n,b]$上都是递减的，由文献[16]的定理 4.1，F 没有连续的 τ_1 型的 n 次迭代根.

(I)(反证法)　假定 F 有连续的 τ_2 型 $n\geqslant 3$ 次迭代根 f 且 $S(f)=\{c_1\}$. 由引理 3 和引理 5，有 $f(c_1)=b$ 和 $f(b)<c_1$. 因此，分成下面 3 种情形进行讨论：

情形 1　$f(b)=a$，$f(a)=a$.

由于 $f(c_1)=b>c_1$，$f(b)=a<c_1$，$f(a)=a<c_1$，由 f 的连续性，存在 $c\in(a,c_1)$ 和 $d\in(c_1,b)$ 使得 $c_1=f(c)$ 和 $c_1=f(d)$，因此 $f(c)\in S(f)$ 和 $f(d)\in S(f)$. 由文献[16]的引理 2.3，得到 $c\in S(f^2)$ 和 $d\in S(f^2)$. 因此 $S(f^2)=\{c_1,c,d\}$，于是有 $N(f^2)=3>2$，这与引理 1 矛盾.

情形 2　$f(b)\in(a,e_1)$，$f(a)=a$.

用与情形 1 完全类似的讨论.

情形 3　$f(b)=a$，$f(a)\in(a,b)$.

$f(c_1)=b>c_1$，$f(b)=a<c_1$. 如果 $f(a)<c_1$，用与情形 1 完全类似的讨论，能得出矛盾. 如果 $f(a)=c_1$，当 $n=3k$，$k=1,2,\cdots$ 时，能推出 $f^n(a)=a$，也就是 $F(a)=a$，这与假设 $F(a)=b$ 矛盾. 如果 $f(a)>c_1$，由于 $f(b)=a<c_1$，由 f 的连续性，存在 $x_1\in(a,b)$ 使得 $f(x_1)=c_1$. 因此 $f(x_1)\in S(f)$. 由文献[16]的引理 2.3，得到 $x_1\in S(f^2)$. 由文献[16]的推论 2.5 知 $S(f)\subset S(f^2)$. 因此有 $x_1=c_1$ 或者

$x_1 \neq c_1$. 如果 $x_1 = c_1$, 有 $f(c_1) = c_1$, 这与 $f(c_1) = b$ 矛盾. 如果$x_1 \neq c_1$, 有 $S(f^2) = \{c_1, x_1\}$. 如果 $n > 3$, 由引理 4, 有 $f(c_2) = c_n$, $f(c_{n-1}) = c_2$ 和 $f(c_n) = c_1$. 因此 $x_1 = c_n$, 也就是 $S(f^2) = \{c_1, c_n\}$. 由于 $f(c_1) = b$, $f(b) = a$, $f(c_2) = c_n$, $f(c_{n-1}) = c_2$, $f(c_n) = c_1$ 和 $F(a) = b$, 有 $f^3(F(c_n)) = F(f^3(c_n)) = F(f^2(c_1)) = F(f(b)) = F(a) = b$, 所以 $f^2(F(c_n)) = c_1$, 从而就有 $f(F(c_n)) = c_n$. 因此, 我们有 $F(c_n) = c_2$ 和 $F(c_1) = F(f(c_n)) = f(F(c_n)) = f(c_2) = c_n$. 由于 $f(F(c_2)) = F(f(c_2)) = F(c_n) = c_2$, 因此 $F(c_2) = c_{n-1}$. 因为 $F(a) = b$, 所以 F 在区间$[c_1, c_2]$上是严格递增的. 因此 $c_n = F(c_1) < c_{n-1} = F(c_2)$, 这与 $c_n > c_{n-1}$ 矛盾.

如果 $n = 3$, 由引理 4, 我们有 $f(c_2) = c_3$, $f(c_3) = c_1$. 因此 $x_1 = c_3$, 从而有 $S(f^2) = \{c_1, c_3\}$. 因为 $f(c_1) = b$, $f(b) = a$, $f(c_2) = c_3$, $f(c_3) = c_1$ 和 $F(b) = a$, 我们有 $f^2(F(c_3)) = F(f^2(c_3)) = F(f(c_1)) = F(b) = a$, 所以 $f(F(c_3)) = b$. 从而有 $F(c_3) = c_1$, $F(c_1) = F(f(c_3)) = f(F(c_3)) = f(c_1) = b$ 和 $f^3(F(c_2)) = F(f^3(c_2)) = F(f^2(c_3)) = F(f(c_1)) = F(b) = a$. 因此 $f^2(F(c_2)) = b$, 从而有 $f(F(c_2)) = c_1$, 所以 $F(c_2) = c_3$. 因为 $F(a) = b$, 所以 F 在区间$[c_1, c_2]$上是严格递增的. 因此$b = F(c_1) < c_3 = F(c_2)$, 这与假设 $b > c_3$ 矛盾.

(II)(反证法) 假定 F 有连续的 τ_2 型 $n \geqslant 3$ 次迭代根 f 和 $S(f) = \{c_n\}$. 由引理 3 和引理 5, 我们有 $f(c_n) = a$ 和 $f(a) > c_n$. 分成下面 3 种情形进行讨论:

情形 1 $f(a) = b$, $f(b) = b$;

情形 2 $f(a) \in (c_n, b)$, $f(b) = b$;

情形 3 $f(a) = b$, $f(b) \in (a, b)$.

在情形 1 中, 因为 $f(c_n) = a < c_n$, $f(a) = b > c_n$, $f(b) = b > c_n$, 由 f 的连续性, 存在 $c \in (a, c_n)$ 和 $d \in (c_n, b)$ 使得 $c_n = f(c)$ 和 $c_n = f(d)$, 因此 $f(c) \in S(f)$ 和 $f(d) \in S(f)$. 由文献[16]的引理 2.3, 得到 $c \in S(f^2)$ 和 $d \in S(f^2)$. 因此 $S(f^2) = \{c_n, c, d\}$, 于是有 $N(f^2) = 3 > 2$, 这与引理 1 矛盾.

在情形 2 中, 用与情形 1 完全类似的讨论, 也能得出矛盾.

在情形 3 中, $f(c_n) = a < c_n$, $f(a) = b > c_n$. 如果 $f(b) > c_n$, 用与情形 1 完全类似的讨论, 能得出矛盾. 如果 $f(b) = c_n$, 当 $n = 3k$, $k = 1,2,3,\cdots$ 时, 能得到 $f^n(b) = b$, 也就是$F(b) = b$, 这与假设 $F(b) = a$ 矛盾. 如果 $f(b) < c_n$, 因为 $f(a) = b > c_n$, 由 f 的连续性, 存在 $x_1 \in (a, b)$ 使得 $f(x_1) = c_n$. 因此 $f(x_1) \in S(f)$. 由文献[16]的引理 2.3, 得到 $x_1 \in S(f^2)$. 再由文献[16]的推论 2.5 得到 $S(f) \subset S(f^2)$, 因此有 $x_1 = c_n$ 或者 $x_1 \neq c_n$. 如果 $x_1 = c_n$, 有 $f(c_n) = c_n$, 这与 $f(c_n) = a$ 矛盾. 如果 $x_1 \neq c_n$, 有 $S(f^2) = \{c_n, x_1\}$. 如果 $n \geqslant 3$, 由引理 4, 我们有 $f(c_{n-1}) = c_1$, $f(c_1) = c_n$. 因此, $x_1 = c_1$, 也就是 $S(f^2) = \{c_1, c_n\}$. 因为 $f(c_n) = a$, $f(a) = b$, $f(c_1) = c_n$, $f(c_{n-1}) = c_1$ 和 $F(a) = b$, $F(b) = a$, 所以 $f(F(c_n)) = F(f(c_n)) = F(a) = b$. 因此 $F(c_n) = a$, 从而有 $F(c_n) = F(b) = a$, 这与 F 在区间$[c_n, b]$上是严格递减的相矛盾. 证毕.

参考文献:

[1] BÖDEWADT U T. Zur Iteration Reeller Funktionen [J]. Math Z, 1943, 49(1): 497-516.

[2] ABEL N H. Oeuvres Completes [J]. Christiania, 1881(2): 36-39.

[3] KOENIGS G. Recherches Sur Lesintegrals De Certains Equations Fonctionnelles [J]. Ann Ecole Norm Sup, 1884, 1: 3-41.

[4] KUCZMA M. Functional Equations in a Single Variable [M]. Warsaw: PolishScienti cPubl, 1968.

[5] ISAACS R. Iteraties of Fractional Order [J]. Canad J Math, 1950, 2: 409-416.

[6] TARGONSKI G. Topics in Iteration Theory [M]. Göttingen: Vandenhoeck and Ruprecht, 1981.

[7] LIU X H. Iteration and Iterative Roots of Fractional Polynomial Function [J]. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2012, 2012: 1-10.

[8] 刘晓华, 侯学刚. 关于 3 类函数的迭代根 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2014, 39(6): 21-24.

[9] 张景中，杨 路. 论逐段单调连续函数的迭代根 [J]. 数学学报，1983，26(4)：398-412.

[10] ZHANG W N. PM Functions，Their Characteristic Intervals and Iterative Roots [J]. Ann Polon Math，1997，65(2)：119-128.

[11] 孙太祥，席鸿建. 区间上 N 型函数的迭代根 [J]. 数学研究，1996，29(2)：40-45.

[12] 孙太祥. 区间上反 N 型函数的迭代根 [J]. 数学研究，2000，33(3)：274-284.

[13] 张广远. 一类线段自映射的共轭与迭代根(I) [J]. 数学年刊，1992，28(1)：33-40.

[14] 张广远. 一类线段自映射的共轭与迭代根(II) [J]. 数学年刊，1992，28(4)：473-478.

[15] LI L，YANG D L，ZHANG W N. A Note on Iterative Roots of PM Functions [J]. J Math Anal Apppl，2008，341(2)：1482-1486.

[16] LIU L，JARCZYK W，LI L，et al. Iterative Roots of Piecewise Monotonic Functions of Non-Monotonicity Height Not Less Than 2 [J]. Nonlinear Anal，2012，75(1)：286-303.

Non-existence of Iterative Roots of Strictly Piecewise Monotone Continuous Self-mappings

LIU Xiao-hua

School of Mathematics and Information Science，Leshan Normal University，Leshan Sichuan 614000，China

Abstract：The problem of iterative roots of monotone continuous self-mappings on interval was solved completely. A class of nonmonotone continuous self-mappings，which are continuous self-mappings with finite nonmonotone points，is referred to as strictly piecewise monotone self-mappings，or PM mappings simply. For this class of self-mappings，some results have been obtained for iterative roots when the characteristic interval exists. In this paper we continue to study non-existence of iterative roots of PM mappings.

Key words：PM mapping；Iterative root；Non-existence

责任编辑 廖 坤