第 45 卷　第 12 期　西南师范大学学报(自然科学版)　2020 年 12 月
Vol. 45　No. 12　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　Dec. 2020

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2020.12.005

含双记忆和时滞项的非线性粘弹性对数波动方程解的爆破[①]

高云龙，　林荣瑞，　佘连兵

六盘水师范学院 数学与计算机科学学院，贵州 六盘水 553004

摘要：考虑一类含双记忆和时滞项的非线性粘弹性对数波动方程解的爆破性．在一定假设条件下，利用凸性方法证明了当初始能量函数 $E(0)<0$ 时，方程的能量解在有限时刻爆破．

关　键　词：双记忆项；时滞项；非线性对数项；爆破

中图分类号：**O175.29**　　**文献标志码**：**A**　　**文章编号**：1000－5471(2020)12－0020－08

近年来，非线性波动方程受到许多学者的关注，其主要研究为局部或全局解的存在性、唯一性、能量衰退以及解的爆破性质等[1-10]．当波动方程没有非线性项，且 $\alpha=0$，$g_1=0$，$\gamma=0$ 时，文献[1]通过建立 Lyapunov 函数证明了其能量解满足指数衰退．当 $p=2$ 且不考虑线性延迟弱阻尼项时，文献[2]在一定假设条件下，证明了方程的能量解满足指数型衰减．当非线性波动方程含有强延迟阻尼和非线性项时，在 $\int_0^t g(s)\mathrm{d}s<\dfrac{p^2}{p^2+1}$，$E(0)<0$ 的假设条件下，文献[3]证明了解在有限时间点爆破．在没有记忆项，且非线性项不是对数形式时，文献[9]也证明了解在有限时间点爆破．文献[4]在方程不含强阻尼和双记忆项，且非线性项是对数形式的条件下，证明了其存在局部解

$$(u,\ v,\ z)\in C([0,\ T];\ H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)\times L^2(\Omega\times(0,\ 1))$$

并进一步利用凸性方法得到能量解在有限时间点爆破．关于爆破性质的研究可参考文献[5-14]．

受到以上工作的启发，将研究以下含双记忆和时滞项的非线性粘弹性对数波动方程解的爆破性：

$$\begin{cases} |u_t|^l u_{tt}+\alpha\Delta^2 u-M(\|\nabla u\|^2)\Delta u-g_1*\Delta^2 u+g_2*\Delta u-\beta\Delta u_{tt}-\gamma\Delta u_t+\mu_1 u_t(x,\ t)+ \\ \mu_2 u_t(x,\ t-\tau)=u|u|^{p-2}\ln|u|^k \qquad (x,\ t)\in\Omega\times(0,\ +\infty) \\ u(x,\ t)=\dfrac{\partial u(x,\ t)}{\partial v}=0 \qquad (x,\ t)\in\partial\Omega\times(0,\ +\infty) \\ u_t(x,\ t-\tau)=f_0(x,\ t-\tau) \qquad t\in(0,\ \tau) \\ u(x,\ 0)=u_0(x),\ u_t(x,\ 0)=u_1(x) \qquad x\in\Omega \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\Omega\in\mathbb{R}^n(n=1,2,3)$，函数 $M(\|\nabla u\|^2)=\xi_0+\xi_1\|\nabla u\|^{2q}$，系数 $l,\alpha,\beta,\gamma,q,k$ 是非负实数，记忆项 g_1，g_2 满足的条件将在后文给出，方程(1)中的卷积定义为

$$(g*v)(t)=\int_0^t g(t-s)v(s)\mathrm{d}s$$

---

① 收稿日期：2019－10－08

基金项目：贵州省教育厅自然科学基金项目(KY[2019]139，KY[2019]143)；贵州省科学技术基金项目([2020]1Y007)；六盘水师范学院校级项目(LPSSYKJTD201907)．

作者简介：高云龙(1991－)，男，助教，主要从事非线性偏微分方程的研究．

通信作者：佘连兵，副教授．

通过构造凸函数，利用凸性方法证明了当初始能量小于0时，方程(1)的解在有限时间点的爆破性. 证明过程中将双记忆项和非线性对数项考虑在同一系统中，克服了处理非线性对数项的难度，推广了现有的研究结果.

1　假设条件与预备知识

文中所讨论的函数空间为Sobolev空间 $H^2(\Omega)$ 和一般赋范空间 $L^p(\Omega)(p\geqslant 2)$. $L^p(\Omega)$ 空间的范数和内积分别记为

$$\|\cdot\|_p=\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}\qquad (u,v)=\int_\Omega u(x)v(x)\mathrm{d}x$$

特别地，当 $p=2$ 时，记 $\|\cdot\|=\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$. 因此，方程(1)的解空间记为

$$\mathscr{H}=(H^2(\Omega)\times H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega\times(0,1)))$$

方程(1)中 g_1,g_2,p 的假设条件参考文献[5]给出：

(A1)　$g_1:\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}_+$ 和 $g_2:\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}_+$ 都是有界函数，且满足

$$\alpha-\int_0^{+\infty}g_1(s)\mathrm{d}s=l_0>0\qquad \xi_0-\int_0^{+\infty}g_2(s)\mathrm{d}s=l_1>0$$

$$g_1(t)\in C^2(\mathbb{R}_+)\cap L^1(\mathbb{R}_+)\qquad g_1(0)>0$$

$$g_2(t)\in C^2(\mathbb{R}_+)\cap L^1(\mathbb{R}_+)\qquad g_2(0)>0$$

(A2)　存在正常数 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\eta_1$ 以及 η_2，使得

$$-\alpha_1 g_1(t)\leqslant g'_1(t)\leqslant-\alpha_2 g_1(t)\qquad \forall\, t\geqslant 0$$

$$0\leqslant g''_1(t)\leqslant\alpha_3 g_1(t)\qquad \forall\, t\geqslant 0$$

$$-\eta_1 g_2(t)\leqslant g'_2(t)\leqslant-\eta_2 g_2(t)\qquad \forall\, t\geqslant 0$$

(A3)　当 $n\leqslant 4$ 时，$2<p<+\infty$；当 $n\geqslant 5$ 时，$2<p\leqslant\dfrac{2n-4}{n-4}$.

类似文献[4]的方法对方程(1)进行变换，引入新变量

$$z(x,\rho,t)=u_t(x,t-\tau\rho)\qquad (x,\rho)\in\Omega\times(0,1)\qquad t>0$$

故有

$$\tau z_t(x,\rho,t)+z_\rho(x,\rho,t)=0\qquad (x,\rho,t)\in\Omega\times(0,1)\times(0+\infty)$$

则方程(1)可化为

$$\begin{cases}|u_t|^l u_{tt}+\alpha\Delta^2u-M(\|\nabla u\|^2)\Delta u-g_1*\Delta^2u+g_2*\Delta u-\beta\Delta u_{tt}-\gamma\Delta u_t+\mu_1u_t(x,t)+\\ \mu_2 z(x,1,t)=u|u|^{p-2}\ln|u|^k\qquad (x,t)\in\Omega\times(0,+\infty)\\ \tau z_t(x,\rho,t)+z_\rho(x,\rho,t)=0\qquad (x,\rho,t)\in\Omega\times(0,1)\times(0+\infty)\\ u(x,t)=\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial v}=0\qquad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,+\infty)\\ z(x,\rho,0)=f_0(x,-\rho\tau)\qquad (x,\rho)\in\Omega\times(0,1)\\ u(x,0)=u_0(x),\ u_t(x,0)=u_1(x)\qquad x\in\Omega\end{cases}\tag{2}$$

由卷积的定义可得以下引理：

引理 1[5]　对于任意的 $g,\phi\in C^1([0,+\infty),\mathbb{R})$，有

$$\int_\Omega\varphi_t(t)(g*\varphi)(t)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}g(t)\|\varphi\|^2+\frac{1}{2}(g'\circ\varphi)(t)$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g\circ\varphi)(t)+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_0^t g(s)\mathrm{d}s\|\varphi\|^2\right)$$

其中

$$(g\circ\varphi)(t)=\int_0^t g(t-s)\|\varphi(t)-\varphi(s)\|^2\mathrm{d}s$$

类似文献[4]中定理2.2和文献[5]中定理2的证明可得下列局部解的存在性定理：

定理1 若条件(A1)-(A3)成立，则当 $\mu_1 > \frac{|\mu_2|}{2}$ 时，$\forall (u_0(x), u_1(x), f_0(x, -\rho\tau)) \in \mathscr{H}$，总存在 $T > 0$，使得方程(2)具有唯一局部解 $u(x, t)$，且满足

$$(u(x,t),\ u_t(x,t),\ z(x,\rho,t)) \in C([0,\ T];\ \mathscr{H})$$

2 解的爆破定理

为了证明以下引理和解的爆破定理，对于方程(2)的任意一个解，定义能量函数为

$$\begin{aligned}E(t) = &\frac{1}{l+2}\|u_t\|_{l+2}^{l+2} + \frac{1}{2}\left(\alpha - \int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\right)\|\Delta u\|^2 + \frac{1}{2}\left(\xi_0 - \int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\right)\|\nabla u\|^2 + \\ &\frac{\xi_1}{2(q+1)}\|\nabla u\|^{2q+1} + \frac{1}{2}(g_1 \circ \Delta u)(t) + \frac{1}{2}(g_2 \circ \nabla u)(t) + \frac{\beta}{2}\|\nabla u_t\|^2 + \\ &\frac{\zeta}{2}\int_\Omega\int_0^1 |z(x,\rho,t)|^2 \mathrm{d}\rho\mathrm{d}x + \frac{k}{p}\|u\|_p^p - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p \ln|u|^k \mathrm{d}x\end{aligned} \tag{3}$$

其中

$$\tau|\mu_2| < \zeta < \tau(2\mu_1 - |\mu_2|) \qquad \mu_1 > \frac{|\mu_2|}{2} \tag{4}$$

则初始能量函数为

$$\begin{aligned}E(0) = &\frac{1}{l+2}\|u_1\|_{l+2}^{l+2} + \frac{1}{2}\left(\alpha - \int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\right)\|\Delta u_0\|^2 + \frac{1}{2}\left(\xi_0 - \int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\right)\|\nabla u_0\|^2 + \\ &\frac{\xi_1}{2(q+1)}\|\nabla u_0\|^{2q+1} + \frac{1}{2}(g_1 \circ \Delta u_0)(t) + \frac{1}{2}(g_2 \circ \nabla u_0)(t) + \frac{\beta}{2}\|\nabla u_1\|^2 + \\ &\frac{\zeta}{2}\int_\Omega\int_0^1 |f_0(x, -\rho\tau)|^2 \mathrm{d}\rho\mathrm{d}x + \frac{k}{p}\|u\|_p^p - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p \ln|u|^k \mathrm{d}x\end{aligned} \tag{5}$$

引理2 若 $(u(x, t), z(x, \rho, t))$ 是方程(2)的解，则能量函数 $E(t)$ 是单调递减的，且存在常数 $0 < C_1 \leqslant \frac{\zeta}{2\tau} - \frac{|\mu_2|}{2}$，使能量函数(3)满足

$$E'(t) \leqslant -C_1\int_\Omega |z(x,\ 1,\ t)|^2 \mathrm{d}x \leqslant 0 \tag{6}$$

证 将方程(2)中第一个方程两端同时乘以 u_t，并在 Ω 上进行分部积分，再运用引理1，可得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\frac{1}{l+2}\|u_t\|_{l+2}^{l+2} + \frac{1}{2}\left(\alpha - \int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\right)\|\Delta u\|^2 + \frac{1}{2}\left(\xi_0 - \int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\right)\|\nabla u\|^2 + \\ &\frac{\xi_1}{2(q+1)}\|\nabla u\|^{2q+1} + \frac{1}{2}(g_1 \circ \Delta u)(t) + \frac{1}{2}(g_2 \circ \nabla u)(t) + \\ &\frac{\beta}{2}\|\nabla u_t\|^2 + \frac{k}{p}\|u\|_p^p - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p \ln|u|^k \mathrm{d}x\Big] = \\ &\frac{1}{2}(g'_1 \circ \Delta u)(t) + \frac{1}{2}(g'_2 \circ \nabla u)(t) - \frac{1}{2}g_1(t)\|\Delta u\|^2 - \frac{1}{2}g_2(t)\|\nabla u\|^2 - \\ &\gamma\|\nabla u_t\|^2 - \mu_1\|u_t\|^2 - \mu_2\int_\Omega z(x,1,t)u_t(x,t)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{7}$$

用 $\zeta z(x,\rho,t)$ 乘方程(2)中的第二个方程，并在 $\Omega \times (0,\ 1)$ 上积分，有

$$\begin{aligned}\frac{\zeta}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega\int_0^1 |z(x,\ \rho,\ t)|^2 \mathrm{d}\rho\mathrm{d}x = &-\frac{\zeta}{2\tau}\int_\Omega |z(x,\ 1,\ t)|^2 \mathrm{d}x + \frac{\zeta}{2\tau}\int_\Omega |z(x,\ 0,\ t)|^2 \mathrm{d}x = \\ &-\frac{\zeta}{2\tau}\int_\Omega |z(x,\ 1,\ t)|^2 \mathrm{d}x + \frac{\zeta}{2\tau}\|u_t\|^2\end{aligned} \tag{8}$$

对(7)式中等号右边最后一项采用Young不等式，并与(8)式相加，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\frac{1}{l+2}\|u_t\|_{l+2}^{l+2} + \frac{1}{2}\left(\alpha - \int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\right)\|\Delta u\|^2 + \frac{1}{2}\left(\xi_0 - \int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\right)\|\nabla u\|^2 +$$

$$\begin{aligned}&\frac{\xi_1}{2(q+1)}\|\nabla u\|^{2q+1}+\frac{1}{2}(g_1\circ\Delta u)(t)+\frac{1}{2}(g_2\circ\nabla u)(t)+\frac{\beta}{2}\|\nabla u_t\|^2+\\&\left.\frac{\zeta}{2}\int_\Omega\int_0^1|z(x,\rho,t)|^2\mathrm{d}\rho\mathrm{d}x+\frac{k}{p}\|u\|_p^p-\frac{1}{p}\int_\Omega|u|^p\ln|u|^k\mathrm{d}x\right]\leqslant\\&\frac{1}{2}(g'_1\circ\Delta u)(t)+\frac{1}{2}(g'_2\circ\nabla u)(t)-\frac{1}{2}g_1(t)\|\Delta u\|^2-\frac{1}{2}g_2(t)\|\nabla u\|^2-\\&\gamma\|\nabla u_t\|^2+\left(\frac{|\mu_2|}{2}-\mu_1+\frac{\zeta}{2\tau}\right)\|u_t\|^2+\left(\frac{|\mu_2|}{2}-\frac{\zeta}{2\tau}\right)\int_\Omega|z(x,1,t)|^2\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{9}$$

再由条件(A1)－(A2)和(4)式知 $E(t)$ 是单调递减的，且存在 $0<C_1\leqslant\frac{\zeta}{2\tau}-\frac{|\mu_2|}{2}$，使得(6)式成立.

定理 2　若条件(A1)－(A2),(3),(4)式以及初始能量函数

$$E(0)<0\qquad(u_0(x),u_1(x),f_0(x,-\rho\tau))\in\mathscr{H}$$

成立，且：

(i) 当 $n\leqslant 4$ 时，

$$p>\max\left\{2(q+1),l+2,1+\sqrt{\frac{\alpha}{l_0}},1+\sqrt{\frac{\xi_0}{l_1}}\right\}\qquad q>1$$

(ii) 当 $n\geqslant 5$ 时，

$$\frac{2n-4}{n-4}\geqslant p>\max\left\{2(q+1),l+2,1+\sqrt{\frac{\alpha}{l_0}},1+\sqrt{\frac{\xi_0}{l_1}},\frac{2(q+1)+2\sqrt{1-q^2}}{q}\right\}\qquad 1\geqslant q>0$$

则方程(2)的解在有限时间点处爆破.

证　首先定义函数

$$H(t)=-E(t)\qquad\forall t\geqslant 0\tag{10}$$

由(6)式知

$$E(t)\leqslant E(0)<0$$

所以

$$H'(t)=-E'(t)\geqslant C_1\int_\Omega|z(x,1,t)|^2\mathrm{d}x\geqslant 0$$

根据条件(A1)－(A2)，进一步得

$$0<H(0)\leqslant H(t)\leqslant\frac{1}{p}\int_\Omega|u|^p\ln|u|^k\mathrm{d}x\tag{11}$$

设

$$L(t)=H^{1-\theta}(t)+\varepsilon G(t)$$

其中

$$\frac{p-2}{p^2}<\theta<\min\left\{\frac{p-(l+2)}{p(l+2)},\frac{q}{2(q+1)}\right\}\tag{12}$$

$$G(t)=\frac{1}{l+1}\int_\Omega|u_t|^l u_t u\mathrm{d}x+\beta\int_\Omega\nabla u_t\cdot\nabla u\mathrm{d}x+\frac{\gamma}{2}\|\nabla u\|^2+\frac{\mu_1}{2}\|u\|^2$$

对 $G(t)$ 求导，可得

$$\begin{aligned}G'(t)=&\int_\Omega|u_t|^l u_{tt}u\mathrm{d}x+\frac{1}{l+1}\|u\|_{l+2}^{l+2}+\beta\|\nabla u_t\|^2-\beta\int_\Omega\Delta u_{tt}u\mathrm{d}x-\\&\gamma\int_\Omega\Delta u_t u\mathrm{d}x+\mu_1\int_\Omega uu_t\mathrm{d}x=\\&\frac{1}{l+1}\|u\|_{l+2}^{l+2}-\alpha\|\Delta u\|^2-\xi_0\|\nabla u\|^2-\xi_1\|\nabla u\|^{2(q+1)}+\\&\int_0^t g_1(t-s)(\Delta u(t),\Delta u(s))\mathrm{d}s+\int_0^t g_2(t-s)(\nabla u(t),\nabla u(s))\mathrm{d}s+\end{aligned}$$

$$\beta\|\nabla u_t\|^2-\mu_2\int_\Omega z(x,1,t)u\mathrm{d}x+\int_\Omega|u|^p\ln|u|^k\mathrm{d}x \tag{13}$$

分别对(13)式中第二个等号右边的第五、六、八项用 Young 不等式，可得

$$\begin{aligned}&\int_0^t g_1(t-s)(\Delta u(t),\Delta u(s))\mathrm{d}s=\\&\int_0^t g_1(t-s)\|\Delta u(t)\|^2\mathrm{d}s+\int_0^t g_1(t-s)(\Delta u(t),\Delta u(s)-\Delta u(t))\mathrm{d}s\geqslant\\&-\delta_0(g_1\circ\Delta u)+\left(1-\frac{1}{4\delta_0}\right)\int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\|\Delta u\|^2\qquad\forall\delta_0>0\end{aligned} \tag{14}$$

$$\int_0^t g_2(t-s)(\nabla u(t),\nabla u(s))\mathrm{d}s\geqslant-\delta_0(g_2\circ\Delta u)+\left(1-\frac{1}{4\delta_0}\right)\int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\|\nabla u\|^2 \tag{15}$$

$$-\mu_2\int_\Omega z(x,1,t)u\mathrm{d}x\geqslant-|\mu_2|\delta_1\|u\|^2-\frac{|\mu_2|}{4\delta_1}\int_\Omega|z(x,1,t)|^2\mathrm{d}x\qquad\forall\delta_1>0 \tag{16}$$

将(14),(15),(16)式代入(13)式中，得

$$\begin{aligned}G'(t)\geqslant&\frac{1}{l+1}\|u_t\|_{l+2}^{l+2}+\beta\|\nabla u_t\|^2-\left[\alpha-\left(1-\frac{1}{4\delta_0}\right)\int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\right]\|\Delta u\|^2-\\&\left[\xi_0-\left(1-\frac{1}{4\delta_0}\right)\int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\right]\|\nabla u\|^2-\xi_1\|\nabla u\|^{2(q+1)}-\delta_0(g_1\circ\Delta u)-\\&\delta_0(g_2\circ\nabla u)-|\mu_2|\delta_1\|u\|^2-\frac{|\mu_2|}{4\delta_1}\int_\Omega|z(x,1,t)|^2\mathrm{d}x+\int_\Omega|u|^p\ln|u|^k\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{17}$$

任取满足如下条件的正实数 a：

$$0<a<\min\left\{\frac{p-2}{p},\frac{p-2(q+1)}{p},1-\frac{1}{p}\left(1+\sqrt{\frac{\alpha}{l_0}}\right),1-\frac{1}{p}\left(1+\sqrt{\frac{\xi_0}{l_1}}\right)\right\} \tag{18}$$

在(17)式不等号右边加上 $p(1-a)(H(t)+E(t))$，再由(6)式和(10)式，可得

$$\begin{aligned}G'(t)\geqslant&\left[\frac{1}{l+1}+\frac{p(1-a)}{l+2}\right]\|u_t\|_{l+2}^{l+2}+\left[\beta+\frac{p\beta(1-a)}{2}\right]\|\nabla u_t\|^2+p(1-a)H(t)+\\&\left[\left(\frac{p(1-a)}{2}-1\right)\left(\alpha-\int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\right)-\frac{1}{4\delta_0}\int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\right]\|\Delta u\|^2+\\&\left[\left(\frac{p(1-a)}{2}-1\right)\left(\xi_0-\int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\right)-\frac{1}{4\delta_0}\int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\right]\|\nabla u\|^2+\\&\left[\frac{p\xi_1(1-a)}{2(q+1)}-\xi_1\right]\|\nabla u\|^{2(q+1)}+\left[\frac{p(1-a)}{2}-\delta_0\right][(g_1\circ\Delta u)+(g_2\circ\nabla u)]+\\&\frac{p\zeta(1-a)}{2}\int_\Omega\int_0^1|z(x,\rho,t)|^2\mathrm{d}\rho\mathrm{d}x+k(1-a)\|u\|_p^p-|\mu_2|\delta_1\|u\|^2-\\&\frac{|\mu_2|}{4\delta_1C_1}H'(t)+a\int_\Omega|u|^p\ln|u|^k\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{19}$$

选择合适的 δ_0,δ_1 以及充分大的 $N>0$，使得

$$\delta_0=\frac{p(1-a)}{2}\qquad\frac{|\mu_2|}{4\delta_1C_1}=NH^{-\theta}(t)$$

因此，(19)式化简为

$$\begin{aligned}G'(t)\geqslant&\left[\frac{1}{l+1}+\frac{p(1-a)}{l+2}\right]\|u_t\|_{l+2}^{l+2}+\left[\beta+\frac{p\beta(1-a)}{2}\right]\|\nabla u_t\|^2+p(1-a)H(t)+\\&\left[\left(\frac{p(1-a)}{2}-1\right)\left(\alpha-\int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\right)-\frac{1}{2p(1-a)}\int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\right]\|\Delta u\|^2+\\&\left[\left(\frac{p(1-a)}{2}-1\right)\left(\xi_0-\int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\right)-\frac{1}{2p(1-a)}\int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\right]\|\nabla u\|^2+\\&\left[\frac{p\xi_1(1-a)}{2(q+1)}-\xi_1\right]\|\nabla u\|^{2(q+1)}+\frac{p\zeta(1-a)}{2}\int_\Omega\int_0^1|z(x,\rho,t)|^2\mathrm{d}\rho\mathrm{d}x+\end{aligned}$$

$$k(1-a)\|u\|_p^p-\frac{\mu_2^2}{4C_1N}H^\theta(t)\|u\|^2-NH^{-\theta}(t)H'(t)+a\int_\Omega |u|^p\ln|u|^k\mathrm{d}x \tag{20}$$

再由(11),(12)式，运用文献[4]的推理 3.1、引理 3.2，可得

$$H^\theta(t)\|u\|^2\leqslant C\Big(\int_\Omega |u|^p\ln|u|^k\mathrm{d}x+\|\nabla u\|^2\Big) \tag{21}$$

因此

$$\begin{aligned}G'(t)\geqslant&\Big[\frac{1}{l+1}+\frac{p(1-a)}{l+2}\Big]\|u_t\|_{l+2}^{l+2}+\Big[\beta+\frac{p\beta(1-a)}{2}\Big]\|\nabla u_t\|^2+p(1-a)H(t)+\\&\Big[\Big(\frac{p(1-a)}{2}-1\Big)\Big(\alpha-\int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\Big)-\frac{1}{2p(1-a)}\int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\Big]\|\Delta u\|^2+\\&\Big[\Big(\frac{p(1-a)}{2}-1\Big)\Big(\xi_0-\int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\Big)-\frac{1}{2p(1-a)}\int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s-\frac{\mu_2^2C}{4C_1N}\Big]\|\nabla u\|^2+\\&\Big[\frac{p\xi_1(1-a)}{2(q+1)}-\xi_1\Big]\|\nabla u\|^{2(q+1)}+\frac{p\zeta(1-a)}{2}\int_\Omega\int_0^1|z(x,\rho,t)|^2\mathrm{d}\rho\mathrm{d}x+\\&k(1-a)\|u\|_p^p-NH^{-\theta}(t)H'(t)+\Big(a-\frac{\mu_2^2C}{4C_1N}\Big)\int_\Omega|u|^p\ln|u|^k\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{22}$$

对 $L(t)$ 求导，并将(3),(22)式代入，得

$$\begin{aligned}L'(t)=&(1-\theta)H^{-\theta}(t)H'(t)+\varepsilon G'(t)\geqslant\\&(1-\theta-\varepsilon N)H^{-\theta}(t)H'(t)+\varepsilon\Big[\frac{1}{l+1}+\frac{p(1-a)}{l+2}\Big]\|u_t\|_{l+2}^{l+2}+\varepsilon\beta\Big[1+\frac{p(1-a)}{2}\Big]\|\nabla u_t\|^2+\\&2\varepsilon p(1-a)H(t)+\varepsilon\Big[\Big(\frac{p(1-a)}{2}-1\Big)\Big(\alpha-\int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\Big)-\frac{1}{2p(1-a)}\int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\Big]\|\Delta u\|^2+\\&\varepsilon\Big[\Big(\frac{p(1-a)}{2}-1\Big)\Big(\xi_0-\int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\Big)-\frac{1}{2p(1-a)}\int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s-\frac{\mu_2^2C}{4C_1N}\Big]\|\nabla u\|^2+\\&\varepsilon\xi_1\Big[\frac{p(1-a)}{2(q+1)}-1\Big]\|\nabla u\|^{2(q+1)}+\frac{\varepsilon p\zeta(1-a)}{2}\int_\Omega\int_0^1|z(x,\rho,t)|^2\mathrm{d}\rho\mathrm{d}x+\\&\varepsilon k(1-a)\|u\|_p^p+\varepsilon\Big(a-\frac{\mu_2^2C}{4C_1N}\Big)\int_\Omega|u|^p\ln|u|^k\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{23}$$

取充分大的 N，及足够小的 ε，使得

$$1-\theta-\varepsilon N>0\qquad \frac{p(1-a)}{2(q+1)}-1>0\qquad a-\frac{\mu_2^2C}{4C_1N}>0$$

$$\Big(\frac{p(1-a)}{2}-1\Big)\Big(\alpha-\int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s\Big)-\frac{1}{2p(1-a)}\int_0^t g_1(s)\mathrm{d}s>0$$

$$\Big(\frac{p(1-a)}{2}-1\Big)\Big(\xi_0-\int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s\Big)-\frac{1}{2p(1-a)}\int_0^t g_2(s)\mathrm{d}s-\frac{\mu_2^2C}{4C_1N}>0$$

$$L(0)=H^{1-\theta}(0)+\varepsilon\int_\Omega uu_t\mathrm{d}x+\frac{\mu_1\varepsilon}{2}\|u_0\|^2+\frac{\beta\varepsilon}{2}\|\nabla u_0\|^2>0$$

根据 θ,a 的取值范围和条件(A3)，存在 $C>0$，可将(23)式化为

$$\begin{aligned}L'(t)\geqslant C\Big(&\|u_t\|_{l+2}^{l+2}+\|\Delta u\|^2+\|\nabla u\|^2+\|\nabla u\|^{2(q+1)}+\|u\|_p^p+\|\nabla u_t\|^2+\\&\int_\Omega\int_0^1|z(x,\rho,t)|^2\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}x+\int_\Omega|u|^p\ln|u|^k\mathrm{d}x+H(t)\Big)\end{aligned} \tag{24}$$

且

$$L(t)\geqslant L(0)>0\qquad t\geqslant 0 \tag{25}$$

根据不等式 $(a+b)^p\leqslant 2^{p-1}(a^p+b^p)$(其中 $a>0$，$b>0$，$p\geqslant 1$)，有

$$L^{\frac{1}{1-\theta}}(t)\leqslant C\Big[H(t)+\Big(\Big|\int_\Omega|u_t|^l u_t u\mathrm{d}x\Big|\Big)^{\frac{1}{1-\theta}}+\|u\|^{\frac{2}{1-\theta}}+\|\nabla u\|^{\frac{2}{1-\theta}}+\Big(\Big|\int_\Omega\nabla u\nabla u_t\mathrm{d}x\Big|\Big)^{\frac{1}{1-\theta}}\Big] \tag{26}$$

利用 Hölder 不等式、Young 不等式、嵌入 $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^{l+2}(\Omega)$ 以及 $\theta < \frac{p-(l+2)}{p(l+2)}$，有

$$\begin{aligned}\left(\left|\int_\Omega |u_t|^l u_t u \mathrm{d}x\right|\right)^{\frac{1}{1-\theta}} \leqslant & \left[\left(\int_\Omega |u|^{l+2}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{l+2}}\left(\int_\Omega |u_t|^{(l+1)\frac{l+2}{l+1}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{l+1}{l+2}}\right]^{\frac{1}{1-\theta}} = \\ & \|u\|_{l+2}^{\frac{1}{1-\theta}}\|u_t\|_{l+2}^{\frac{l+1}{1-\theta}} \leqslant \\ & C\frac{1-(l+2)\theta}{(l+2)(1-\theta)}\|u\|_p^{\frac{l+2}{1-(l+2)\theta}} + \frac{l+1}{(l+2)(1-\theta)}\|u_t\|_{l+2}^{l+2} \leqslant \\ & C(H(t) + \|u\|_p^p + \|u_t\|_{l+2}^{l+2})\end{aligned} \tag{27}$$

由 Young 不等式，$0<\theta<\frac{q}{2(1+q)}<\frac{p-2}{2p}$ 以及(11)式，得

$$\begin{aligned}\|u\|^{\frac{2}{1-\theta}} \leqslant & \frac{2\|u\|^p}{p(1-\theta)} + \frac{p(1-\theta)-2}{p(1-\theta)} \leqslant \\ & \frac{2\|u\|^p}{p(1-\theta)} + \frac{p(1-\theta)-2}{p(1-\theta)H(0)}H(t) \leqslant \\ & C(H(t) + \|u\|_p^p)\end{aligned} \tag{28}$$

同理可得

$$\begin{aligned}\|\nabla u\|^{\frac{2}{1-\theta}} \leqslant & \frac{\|\nabla u\|^{2(q+1)}}{(1-\theta)(q+1)} + \frac{1-(1-\theta)(q+1)}{(1-\theta)(q+1)} \leqslant \\ & \frac{\|\nabla u\|^{2(q+1)}}{(1-\theta)(q+1)} + \frac{1-(1-\theta)(q+1)}{(1-\theta)(q+1)H(0)}H(t) \leqslant \\ & C(H(t) + \|\nabla u\|^{2(q+1)})\end{aligned} \tag{29}$$

利用 Young 不等式及(29)式，有

$$\begin{aligned}\left(\left|\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u_t \mathrm{d}x\right|\right)^{\frac{1}{1-\theta}} \leqslant & C(\|\nabla u\|^{\frac{2}{1-2\theta}} + \|\nabla u_t\|^2) \leqslant \\ & C(H(t) + \|\nabla u\|^{2(q+1)} + \|\nabla u_t\|^2)\end{aligned} \tag{30}$$

将(28)-(30)式代入(26)式，并化简，得

$$L^{\frac{1}{1-\theta}}(t) \leqslant C(\|u_t\|_{l+2}^{l+2} + \|\nabla u\|^{2(q+1)} + \|\nabla u_t\|^2 + \|u\|_p^p + H(t)) \tag{31}$$

最后由(24),(31)式可得，存在 $\Lambda>0$ 使得

$$L'(t) \geqslant \Lambda L^{\frac{1}{1-\theta}}(t) \qquad t \geqslant 0 \tag{32}$$

对(32)式在$(0, t)$上积分，有

$$L(t) \geqslant \left(L^{-\frac{\theta}{1-\theta}}(0) - \Lambda\frac{\theta}{1-\theta}t\right)^{-\frac{\theta}{1-\theta}} \tag{33}$$

从而由 $L(0)>0$ 以及(33)式知 $\lim\limits_{t\to T^*} L(t) = +\infty$，其中 $T^* \leqslant \frac{\theta}{1-\theta}\Lambda L^{-\frac{\theta}{1-\theta}}(0)$.

参考文献：

[1] TANG W S. Asymptotic Behavior for a Viscoelastic Wave Equation with a Time-Varying Delay Term [J]. Journal of Partial Differential Equations, 2016, 29(1): 22-35.

[2] PEYRAVI A. General Stability and Exponential Growth for a Class of Semi-Linear Wave Equations with Logarithmic Source and Memory Terms [J]. Applied Mathematics and Optimization, 2020, 81(2): 545-561.

[3] KAFINI M, MUSTAFA M I. A Blow-up Result in a Cauchy Viscoelastic Problem With a Delayed Strong Damping [J]. Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, 2018, 25: 357-367.

[4] KAFINI M, MESSAOUDI S. Local Existence and Blow up of Solutions to a Logarithmic Nonlinear Wave Equation with Delay [J]. Applicable Analysis, 2020, 99(3): 530-547.

[5] MELLAH M, HAKEM A. Global Existence, Uniqueness, and Asymptotic Behavior of Solution for the Euler-Bernoulli

Viscoelastic Equation [J]. Open Journal of Mathematical Analysis，2019，3(1)：42-51.
[6] DANG J，HU Q Y，ZHANG H W. Global Nonexistence for a Nonlinear Viscoelastic Equation With Nonlinear Damping and Velocity-Dependent Material Density [J]. Journal of Function Spaces，2019，2019：1-7.
[7] 江蓉华，周　军. 一类带有分数拉普拉斯算子的抛物方程的解在任意初始能量下的爆破性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2020，42(5)：121-125.
[8] 陈勇明，杨　晗. 一类非线性四阶波动方程解的爆破 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2004，29(4)：545-548.
[9] 李晓营，林春进，徐国静. 一类带有阻尼项 Burgers 方程的 Cauchy 问题 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2018，43(4)：20-23.
[10] 张宏伟，呼青英. 具时滞和记忆项的非线性粘弹性波动方程解的爆破——纪念阳名珠先生 [J]. 应用泛函分析学报，2017，19(1)：71-79.
[11] 高云柱，孟　秋，郭　微. 具变指数黏弹性波动方程能量解的爆破 [J]. 吉林大学学报(理学版)，2018，56(3)：503-507.
[12] MESSAOUDI S A. Blow-up of Positive-Intial-Energy Solutions of a Nonlinear Viscoelast [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2006，320(2)：902-915.
[13] 王艳萍，李　嘉. 一类非线性双曲型方程 Cauchy 问题解的爆破 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2007，29(10)：25-28.
[14] 董　莉. 两类非线性波动方程解的爆破时间的下确界 [J]. 山东大学学报(理学版)，2017，52(4)：56-67.

On Blow-up of Solutions for a Class Logarithmic Nonlinear Wave Equation with Double Memory and Delay Terms

GAO Yun-long，　LIN Rong-rui，　SHE Lian-bing

School of Mathematics and Computer Science，Liupanshui Normal University，Liupanshui Guizhou 553004，China

Abstract：In this paper，blow-up of solutions have been concerned for a class logarithmic nonlinear wave equation with double memory and delay terms. Under certain assumptions，the convexity method has been used to prove that when the initial energy function $E(0)<0$，the energy solution of the equation blow-up at finite time.

Key words：double memory terms；delay term；nonlinear logarithmic term；blow-up

责任编辑　廖　坤