DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2020.12.006

一类带临界指数项的 Kirchhoff-Schrödinger-Poisson 系统正解的存在性①

张 鹏[1], 彭云飞[2], 张晓飞[1]

1. 遵义师范学院 数学学院,贵州 遵义 563006;2. 贵州大学 数学与统计学院,贵阳 550025

摘要: 研究了一类带一般超线性项的临界 Kirchhoff-Schrödinger-Poisson 系统,利用山路引理,获得了该系统正解的存在性.该结果补充完善了近期相关问题的结果.

关 键 词: Kirchhoff-Schrödinger-Poisson 系统;临界指数;正解;山路引理

中图分类号: O177.91 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5471(2020)12-0028-08

研究如下一类带临界指数项的 Kirchhoff-Schrödinger-Poisson 系统:

$$\begin{cases} -\left(a+b\int_{\Omega}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u+\phi u=u^5+f(x,u) & x\in\Omega \\ -\Delta\phi=u^2 & x\in\Omega \\ u=\phi=0 & x\in\partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 是有界开区域且具有光滑边界 $\partial\Omega$,$a,b>0$,f 为满足如下条件的非线性项:

(f_1) $f\in C(\overline{\Omega}\times\mathbb{R},\mathbb{R})$,当 $s\leqslant 0$ 时,$f(x,s)=0$,存在非空开集 $\omega\subset\Omega$,对几乎处处的 $x\in\omega$ 和所有 $u\geqslant 0$,都有 $f(x,u)\geqslant 0$;

(f_2) $\lim\limits_{s\to 0^+}\dfrac{f(x,s)}{s}=0$,$\lim\limits_{s\to+\infty}\dfrac{f(x,s)}{s^5}=0$;

(f_3) 对 $\forall(x,s)\in(\Omega\times\mathbb{R}_+)$,都有 $f(x,s)s-4F(x,s)\geqslant -a\lambda_1 s^2$,其中 $F(x,s)=\int_0^s f(x,t)\mathrm{d}t$,$\lambda_1>0$ 为 $-\Delta$ 的第一个特征值;

(f_4) $\forall x\in\omega$ 都有 $\lim\limits_{s\to+\infty}\dfrac{f(x,s)}{s^3}=+\infty$,其中 ω 为(f_1)中所定义.

6 为 Sobolev 空间 $H_0^1(\Omega)$ 嵌入到空间 $L^p(\Omega)$($p\in[1,6]$)的临界指数.$\int_{\Omega}|\nabla u|^2\mathrm{d}x$ 是 Kirchhoff 型非局部项.记 $\|u\|=\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$ 和 $|u|_p=\left(\int_{\Omega}|u|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$ 分别为空间 $H_0^1(\Omega)$ 和 $L^p(\Omega)$ 中的标准范数.

当 $a=1$,$b=0$ 时,系统(1)退化为 Schrödinger-Poisson 系统.众所周知,Schrödinger-Poisson 系统在无界区域中有很多结果,但在有界区域中,有关 Schrödinger-Poisson 系统的结果相对就很少了,如文献[1-5].特别地,当 $f(x,u)=\lambda u^{q-1}$($1<q<2$)时,文献[3]研究了系统(1),即

---

① 收稿日期:2019-12-12

基金项目:国家自然科学基金项目(12061021);贵州省科技计划项目(黔科合 LH 字[2017]7079 号);贵州省教育厅创新群体重大研究项目(黔教合 KY[2016]046);遵义市科技局科技研发资金项目(遵市科合 HZ 字 281 号).

作者简介:张 鹏(1970-),男,教授,主要从事非线性泛函分析的研究.

$$\begin{cases}-\Delta u+\lambda\phi u=\lambda u^{q-1}+u^5 & x\in\Omega\\ -\Delta\phi=u^2 & x\in\Omega\\ u=\phi=0 & x\in\partial\Omega\end{cases}$$

当$\lambda>0$充分小时，利用变分方法，文献[3]获得了两个正解，并指出了其中一个解是基态解. 当$f(x,u)=\lambda|x|^\beta u^{-\gamma}(0<\gamma<1)$时，文献[4]研究了系统(1)，当$0<\beta<\dfrac{5+\gamma}{2}$以及$\lambda>0$充分小时，获得了系统(1)的一个正解；当$2+\gamma<\beta<\dfrac{5+\gamma}{2}$时，获得了系统(1)的两个正解. 文献[5]研究了系统(1)非平凡解的存在性.

文献[6-9]研究了带奇异项的 Kirchhoff-Schrödinger-Poisson 系统，并获得了一些正解的存在性结果. 其他相关结果，可查阅文献[10-12]及其参考文献. 据查阅文献显示，还没有关于临界系统(1)的研究结果. 本文利用变分方法和临界点理论，获得了系统(1)正解的存在性. 具体结论如下：

定理 1　假设$a,b>0$，f满足条件$(f_1)-(f_4)$，则系统(1)至少存在一个正解$(u_*,\phi_{u_*})\in H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$.

对$\forall u\in H_0^1(\Omega)$，根据 Lax-Milgram 定理，系统(1)中的第二个方程

$$\begin{cases}-\Delta\phi=u^2 & x\in\Omega\\ \phi=0 & x\in\partial\Omega\end{cases}\tag{2}$$

存在唯一解$\phi_u\in H_0^1(\Omega)$. 用ϕ_u替换系统(1)中的第一个方程中的ϕ，系统(1)就被转化为如下方程：

$$\begin{cases}-\left(a+b\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u+\phi_u u=u^5+f(x,u) & x\in\Omega\\ u>0 & x\in\Omega\\ u=0 & x\in\partial\Omega\end{cases}\tag{3}$$

从而，求系统(1)的解就转化为求方程(3)的解.

对任意的$u\in H_0^1(\Omega)$，方程(3)对应的能量泛函为

$$I(u)=\frac{a}{2}\|u\|^2+\frac{b}{4}\|u\|^4+\frac{1}{4}\int_\Omega\phi_u u^2\mathrm{d}x-\frac{1}{6}\int_\Omega(u^+)^6\mathrm{d}x-\int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x$$

其中$u^\pm=\max\{\pm u,0\}$. 对任意的$\varphi\in H_0^1(\Omega)$，有

$$\langle I'(u),\varphi\rangle=(a+b\|u\|^2)\int_\Omega(\nabla u,\nabla\varphi)\mathrm{d}x+\int_\Omega\phi_u u\varphi\mathrm{d}x-\int_\Omega(u^+)^5\varphi\mathrm{d}x-\int_\Omega f(x,u)\varphi\mathrm{d}x$$

若$u\in H_0^1(\Omega)$为方程(3)的解，则(u,ϕ_u)为系统(1)的解.

记

$$S=\inf_{u\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}}\frac{\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x}{\left(\int_\Omega|u|^6\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3}}}\tag{4}$$

为最佳 Sobolev 常数. 众所周知，函数

$$U(x)=\frac{3^{\frac{1}{4}}}{(1+|x|^2)^{\frac{1}{2}}}\qquad x\in\mathbb{R}^3\tag{5}$$

是极小问题(4)的极值函数. 从而，对于某个正常数$C>0$，$U(x)$是临界问题

$$-\Delta u=Cu^5\qquad\forall x\in\mathbb{R}^3$$

的解，且$\|U\|^2=|U|_6^6=S^{\frac{3}{2}}$.

首先，根据文献[6]的引理 2.1，方程(2)的解ϕ_u具有如下重要性质结论：

命题 1[6]　(1°)　$\|\phi_u\|^2=\int_\Omega\phi_u u^2\mathrm{d}x$；

(2°)　$\phi_u\geqslant 0$，且当$u>0$时，有$\phi_u>0$；

(3°)　对$\forall t\in\mathbb{R}$且$t\neq 0$，有$\phi_{tu}=t^2\phi_u$；

(4°) $\int_\Omega \phi_u u^2 \mathrm{d}x = \int_\Omega |\nabla \phi_u|^2 \mathrm{d}x \leqslant S^{-1} |u|_{\frac{12}{5}}^4 \leqslant S^{-1} |u|_4^4 |\Omega|^{\frac{2}{3}} \leqslant S^{-3} \|u\|^4 |\Omega|$;

(5°) 如果在 $H_0^1(\Omega)$ 空间中有 $u_n \rightharpoonup u$,那么在 $H_0^1(\Omega)$ 空间中有 $\phi_{u_n} \to \phi_u$,且对 $\forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$,有 $\int_\Omega \phi_{u_n} u_n \varphi \mathrm{d}x \to \int_\Omega \phi_u u \varphi \mathrm{d}x$;

(6°) 记 $\Phi(u) = \int_\Omega \phi_u u^2 \mathrm{d}x$,则 Φ:$H_0^1(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$ 是可微的,且对 $\forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$,有 $(\Phi'(u), \varphi) = 4\int_\Omega \phi_u u \varphi \mathrm{d}x$.

下面,证明能量泛函 I 在 $H_0^1(\Omega)$ 空间中具有山路几何结构.

引理 1 假设 $a, b > 0$,且条件($\mathrm{f_1}$)与($\mathrm{f_2}$)成立,则存在正常数 $\delta, \rho > 0$,使得:

(i) 对 $\forall u \in S_\rho = \{u \in H_0^1(\Omega): \|u\| = \rho\}$,都有 $I(u) \geqslant \delta$;

(ii) 存在 $e \in H_0^1(\Omega)$ 且 $\|e\| > \rho$,使得 $I(e) < 0$.

证 (i) 根据条件($\mathrm{f_1}$)与($\mathrm{f_2}$),存在常数 $C_1 > 0$,使得对 $\forall (x, s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$,都有

$$|F(x, s)| \leqslant \frac{a\lambda_1}{4} |s|^2 + C_1 |s|^6$$

则依据 Poincaré 不等式和 Sobolev 不等式,可得

$$I(u) \geqslant \frac{a}{2} \|u\|^2 - \frac{a\lambda_1}{4} |u|_2^2 - C_1 \int_\Omega |u|^6 \mathrm{d}x - \frac{1}{6} \int_\Omega |u|^6 \mathrm{d}x \geqslant$$
$$\frac{a}{2} \|u\|^2 - \frac{a}{4} \|u\|^2 - C_2 \|u\|^6 = \frac{a}{4} \|u\|^2 - C_2 \|u\|^6$$

其中 $C_2 > 0$ 为常数. 这就意味着:存在正常数 $\delta, \rho > 0$,使得对 $\forall u \in S_\rho = \{u \in H_0^1(\Omega): \|u\| = \rho\}$ 都有 $I(u) \geqslant \delta$.

(ii) 再次利用条件($\mathrm{f_1}$)与($\mathrm{f_2}$),对 $\forall \varepsilon > 0$,存在正常数 $C_\varepsilon > 0$,使得 $|F(x, s)| \leqslant \varepsilon |s|^6 + C_\varepsilon$. 从而,任取 $u \in H_0^1(\Omega)$ 且 $u^+ \neq 0$,可得

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\int_\Omega F(x, tu) \mathrm{d}x}{t^6} \leqslant \lim_{t \to +\infty} \frac{\varepsilon t^6 \int_\Omega |u|^6 \mathrm{d}x + C_\varepsilon |\Omega|}{t^6} = \varepsilon \int_\Omega |u|^6 \mathrm{d}x$$

再根据 ε 的任意性,可得

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\int_\Omega F(x, tu) \mathrm{d}x}{t^6} = 0$$

因此,结合命题 1 中的性质(3°),进一步可得

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{I(tu)}{t^6} = \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{a}{2t^4} \|u\|^2 + \frac{b}{4t^2} \|u\|^4 + \frac{\int_\Omega \phi_u u^2 \mathrm{d}x}{t^2} - \frac{\int_\Omega F(x, tu) \mathrm{d}x}{t^6} - \frac{1}{6} \int_\Omega |u|^6 \mathrm{d}x \right) =$$
$$-\frac{1}{6} \int_\Omega |u|^6 \mathrm{d}x$$

这就意味着:必定存在 $t_0 > 0$,使得 $\|t_0 u\| > \rho$ 且 $I(t_0 u) < 0$. 令 $e = t_0 u$. 引理 1 证毕.

接下来,证明泛函 I 在 $H_0^1(\Omega)$ 上满足局部 $(\mathrm{PS})_c$ 条件.

引理 2 假设 $a, b > 0$ 以及条件($\mathrm{f_1}$)-($\mathrm{f_3}$)成立,则对 $\forall c \in (0, \Lambda)$,$I$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 上满足局部 $(\mathrm{PS})_c$ 条件,其中

$$\Lambda = \frac{abS^3}{4} + \frac{b^3 S^6}{24} + \frac{(b^2 S^4 + 4aS)^{\frac{3}{2}}}{24}$$

证 假设 $\{u_n\}$ 是 I 在 $H_0^1(\Omega)$ 上的局部 $(\mathrm{PS})_c$ 序列,即当 $n \to +\infty$ 时有

$$I(u_n) \to c \qquad I'(u_n) \to 0 \tag{6}$$

我们断言:$\{u_n\}$ 是 $H_0^1(\Omega)$ 上的有界序列. 事实上,由条件($\mathrm{f_1}$)与($\mathrm{f_2}$),存在常数 $C_3 > 0$,使得对 $\forall (x, s) \in$

$\overline{\Omega}\times\mathbb{R}$，都有 $\left|\frac{1}{5}f(x,s)s-F(x,s)\right|\leqslant\frac{1}{30}|s|^6+C_3$．再结合(6)式，可得

$$\begin{aligned}1+c+o(1)\|u_n\| &\geqslant I(u_n)-\frac{1}{5}\langle I'(u_n),u_n\rangle\geqslant\\ &\frac{a}{10}\|u_n\|^2+\frac{b}{20}\|u_n\|^4+\frac{1}{20}\int_\Omega\phi_{u_n}u_n^2\mathrm{d}x+\\ &\int_\Omega\left(\frac{1}{5}f(x,u_n^+)u_n^+-F(x,u_n^+)\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{30}\int_\Omega(u_n^+)^6\mathrm{d}x\geqslant\\ &\frac{a}{10}\|u_n\|^2+\frac{b}{20}\|u_n\|^4-C_3|\Omega|\end{aligned}$$

则 $\{u_n\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 上有界．从而存在子列(仍记为 $\{u_n\}$)，以及 $u\in H_0^1(\Omega)$，使得当 $n\to\infty$ 时，在 $H_0^1(\Omega)$ 中有 $u_n\rightharpoonup u$，在 $L^s(\Omega)(1\leqslant s<6)$ 中有 $u_n\to u$，在 Ω 中有 $u_n(x)\to u(x)$ 几乎处处成立．由条件(f_2)，可得

$$\int_\Omega f(x,u_n^+)u\mathrm{d}x=\int_\Omega f(x,u^+)u\mathrm{d}x+o(1)\tag{7}$$

$$\int_\Omega f(x,u_n^+)u_n\mathrm{d}x=\int_\Omega f(x,u^+)u\mathrm{d}x+o(1)\tag{8}$$

$$\int_\Omega F(x,u_n^+)\mathrm{d}x=\int_\Omega F(x,u^+)\mathrm{d}x+o(1)\tag{9}$$

令 $w_n=u_n-u$，只需证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\|w_n\|=l=0$．假设 $l>0$．因为在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $u_n\rightharpoonup u$，根据 Brézis-Lieb 引理[13]，可得

$$\|u_n\|^2=\|w_n\|^2+\|u\|^2+o(1)\tag{10}$$

$$\|u_n\|^4=\|w_n\|^4+\|u\|^4+2\|w_n\|^2\|u\|^2+o(1)\tag{11}$$

$$\int_\Omega(u_n^+)^6\mathrm{d}x=\int_\Omega(w_n^+)^6\mathrm{d}x+\int_\Omega(u^+)^6\mathrm{d}x+o(1)\tag{12}$$

其中 $o(1)$ 是 $n\to\infty$ 时的无穷小量．由(6)式和(8)式以及命题 1 中的性质(5°)，可得

$$a\|u_n\|^2+b\|u_n\|^4+\int_\Omega\phi_u u^2\mathrm{d}x-\int_\Omega(u_n^+)^6\mathrm{d}x-\int_\Omega f(x,u)u\mathrm{d}x=o(1)$$

进一步，结合(10)－(12)式，可得

$$\begin{aligned}&a\|u\|^2+a\|w_n\|^2+b\|u\|^4+b\|w_n\|^4+2b\|w_n\|^2\|u\|^2+\int_\Omega\phi_u u^2\mathrm{d}x-\\ &\int_\Omega(w_n^+)^6\mathrm{d}x-\int_\Omega(u^+)^6\mathrm{d}x-\int_\Omega f(x,u)u\mathrm{d}x=o(1)\end{aligned}\tag{13}$$

再次利用(6)式和(7)式，可得

$$\lim_{n\to\infty}\langle I'(u_n),u\rangle=a\|u\|^2+b\|u\|^4+bl^2\|u\|^2+\int_\Omega\phi_u u^2\mathrm{d}x-\int_\Omega(u^+)^6\mathrm{d}x-\int_\Omega f(x,u)u\mathrm{d}x=0\tag{14}$$

一方面，根据(14)式和条件(f_3)，可得

$$\begin{aligned}I(u)=&\frac{a}{2}\|u\|^2+\frac{b}{4}\|u\|^4+\frac{1}{4}\int_\Omega\phi_u u^2\mathrm{d}x-\frac{1}{6}\int_\Omega(u^+)^6\mathrm{d}x-\int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x=\\ &\frac{a}{4}\|u\|^2-\frac{bl^2}{4}\|u\|^2+\frac{1}{12}\int_\Omega(u^+)^6\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int_\Omega(f(x,u)u-F(x,u))\mathrm{d}x\geqslant\\ &\frac{a}{4}\|u\|^2+\frac{1}{12}\int_\Omega(u^+)^6\mathrm{d}x-\frac{a\lambda_1}{4}\int_\Omega u^2\mathrm{d}x-\frac{bl^2}{4}\|u\|^2\geqslant\\ &-\frac{bl^2}{4}\|u\|^2\end{aligned}\tag{15}$$

另一方面，根据(9)式以及(13)－(14)式，可得

$$a\|w_n\|^2+b\|w_n\|^4+b\|w_n\|^2\|u\|^2-\int_\Omega(w_n{}^+)^6\mathrm{d}x=o(1)\tag{16}$$

$$I(u_n)=I(u)+\frac{a}{2}\|w_n\|^2+\frac{b}{4}\|w_n\|^4+\frac{b}{2}\|w_n\|^2\|u\|^2-\frac{1}{6}\int_\Omega(w_n^+)^6\mathrm{d}x+o(1)\tag{17}$$

由(4)式,可得$\int_\Omega (w_n^+)^6 \mathrm{d}x \leqslant \int_\Omega |w_n|^6 \mathrm{d}x \leqslant \frac{\| w_n \|^6}{S^3}$,从而根据(16)式,可得$al^2 + bl^4 + bl^2 \| u \|^2 \leqslant \frac{l^6}{S^3}$,则

$$l^2 \geqslant \frac{bS^3 + \sqrt{b^2 S^6 + 4S^3(a + b\| u \|^2)}}{2} \tag{18}$$

因此,由(16)-(18)式,可得

$$I(u) = \lim_{n\to\infty}\left(I(u_n) - \frac{a}{2}\| w_n \|^2 - \frac{b}{4}\| w_n \|^4 - \frac{b}{2}\| w_n \|^2 \| u \|^2 + \frac{1}{6}\int_\Omega (w_n^+)^6 \mathrm{d}x\right) =$$
$$c - \left(\frac{a}{3}l^2 + \frac{b}{12}l^4 + \frac{b}{3}l^2 \| u \|^2\right) \leqslant$$
$$c - \left[\frac{a}{6}\left(bS^3 + \sqrt{b^2 S^6 + 4S^3(a + b\| u \|^2)}\right) + \frac{b}{48}\left(bS^3 + \sqrt{b^2 S^6 + 4S^3(a + b\| u \|^2)}\right)^2 + \right.$$
$$\left.\frac{b\| u \|^2}{24}\left(bS^3 + \sqrt{b^2 S^6 + 4S^3(a + b\| u \|^2)}\right)\right] - \frac{bl^2}{3}\| u \|^2 \leqslant$$
$$c - \left(\frac{abS^3}{4} + \frac{b^3 S^6}{24} + \frac{(b^2 S^4 + 4aS)^{\frac{3}{2}}}{24}\right) - \frac{bl^2}{3}\| u \|^2 <$$
$$-\frac{bl^2}{3}\| u \|^2 < -\frac{bl^2}{4}\| u \|^2$$

这与(15)式矛盾.因此$l \equiv 0$,即当$n \to \infty$时,在$H_0^1(\Omega)$中有$u_n \to u$.则对$\forall c \in (0, \Lambda)$,$I$在$H_0^1(\Omega)$上满足局部$(\mathrm{PS})_c$条件.

接着,估计山路水平值,获得如下结论:

引理3 假设$a, b > 0$以及条件(f_1),(f_2),(f_4)成立,则存在$u_0 \in H_0^1(\Omega)$,使得$\sup\limits_{t\geqslant 0} I(tu_0) < \Lambda$,其中$\Lambda$为引理2所定义.

证 不妨设$0 \in \omega$,定义截断函数$\eta \in C_0^\infty(\Omega)$且$|\nabla \eta| < C_4$,固定一个$\delta(0 < \delta < 1)$,使得$B_{2\delta}(0) \subset \omega$,且当$|x| \leqslant \delta$时,$\eta(x) = 1$;当$|x| \geqslant 2\delta$时,$\eta(x) = 0$;当$x \in B_{2\delta}(0)$时,$0 \leqslant \eta(x) \leqslant 1$.定义

$$u_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-\frac{1}{2}}\eta(x)U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \frac{(3)^{\frac{1}{4}}\varepsilon^{\frac{1}{2}}\eta(x)}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{\frac{1}{2}}}$$

由文献[13],可得

$$\| u_\varepsilon \|^2 = \| U_\varepsilon \|^2 + O(\varepsilon) = S^{\frac{3}{2}} + O(\varepsilon) \tag{19}$$

$$| u_\varepsilon |_6^6 = | U_\varepsilon |_6^6 + O(\varepsilon^3) = S^{\frac{3}{2}} + O(\varepsilon^3) \tag{20}$$

进一步,可得

$$\begin{cases} \| u_\varepsilon \|^4 = S^3 + O(\varepsilon) \\ \| u_\varepsilon \|^6 = S^{\frac{9}{2}} + O(\varepsilon) \\ \| u_\varepsilon \|^8 = S^6 + O(\varepsilon) \\ \| u_\varepsilon \|^{12} = S^9 + O(\varepsilon) \end{cases} \tag{21}$$

对$\forall t \geqslant 0$,定义$I(tu_\varepsilon)$为

$$I(tu_\varepsilon) = \frac{at^2}{2}\| u_\varepsilon \|^2 + \frac{bt^4}{4}\| u_\varepsilon \|^4 + \frac{t^4}{4}\int_\Omega \phi_{u_\varepsilon} u_\varepsilon^2 \mathrm{d}x - \frac{t^6}{6}\int_\Omega u_\varepsilon^6 \mathrm{d}x - \int_\Omega F(x, tu_\varepsilon)\mathrm{d}x$$

根据条件(f_1)和(f_2),可得

$$\lim_{t\to +0} I(tu_\varepsilon) = 0 \qquad \lim_{t\to +\infty} I(tu_\varepsilon) = -\infty$$

关于$0 < \varepsilon < \varepsilon_0$一致成立,其中$\varepsilon_0 > 0$为充分小的正常数.因此,存在$t_\varepsilon > 0$,使得$\sup_{t\geqslant 0} I(tu_\varepsilon) = I(t_\varepsilon u_\varepsilon)$.容易证得:存在两个与$\varepsilon$无关的正常数$t_0$和$T_0$,使得$t_0 < t_\varepsilon < T_0$.令

$$I_{1\varepsilon}(t) = \frac{a}{2}t^2\| u_\varepsilon \|^2 + \frac{b}{4}t^4\| u_\varepsilon \|^4 - \frac{t^6}{6}\int_\Omega u_\varepsilon^6 \mathrm{d}x$$

则有

$$I'_{\varepsilon}(t)=at\|u_{\varepsilon}\|^{2}+bt^{3}\|u_{\varepsilon}\|^{4}-t^{5}\int_{\Omega}u_{\varepsilon}^{6}\mathrm{d}x$$

令 $I'_{\varepsilon}(t)=0$，则

$$a\|u_{\varepsilon}\|^{2}+bt^{2}\|u_{\varepsilon}\|^{4}-t^{4}\int_{\Omega}{u_{\varepsilon}}^{6}\mathrm{d}x=0 \tag{22}$$

可得

$$T_{\varepsilon}^{2}=\frac{b\|u_{\varepsilon}\|^{4}+\sqrt{b^{2}\|u_{\varepsilon}\|^{8}+4a\|u_{\varepsilon}\|^{2}\int_{\Omega}u_{\varepsilon}^{6}\mathrm{d}x}}{2\int_{\Omega}u_{\varepsilon}^{6}\mathrm{d}x}$$

因此，对 $\forall\, 0<t<T_{\varepsilon}$，有 $I'_{1\varepsilon}(t)>0$. 而当 $t>T_{\varepsilon}$ 时有 $I'_{1\varepsilon}(t)<0$，且 $I_{\varepsilon}(t)$ 在 T_{ε} 处达到最大值. 从而，根据(19)—(22)式，可得

$$\begin{aligned}
&I_{1\varepsilon}(t)\leqslant I_{1\varepsilon}(T_{\varepsilon})=\\
&\quad T_{\varepsilon}^{2}\left(\frac{a}{2}\|u_{\varepsilon}\|^{2}+\frac{b}{4}T_{\varepsilon}^{2}\|u_{\varepsilon}\|^{4}-\frac{T_{\varepsilon}^{4}}{6}\int_{\Omega}u_{\varepsilon}^{6}\mathrm{d}x\right)=\\
&\quad T_{\varepsilon}^{2}\left(\frac{a}{3}\|u_{\varepsilon}\|^{2}+\frac{b}{12}T_{\varepsilon}^{2}\|u_{\varepsilon}\|^{4}\right)=\\
&\quad \frac{ab\|u_{\varepsilon}\|^{6}+a\|u_{\varepsilon}\|^{2}\sqrt{b^{2}\|u_{\varepsilon}\|^{8}+4a\|u_{\varepsilon}\|^{2}\int_{\Omega}{u_{\varepsilon}}^{6}\mathrm{d}x}}{6\int_{\Omega}u_{\varepsilon}^{6}\mathrm{d}x}+\\
&\quad \frac{b^{3}\|u_{\varepsilon}\|^{12}+2ab\|u_{\varepsilon}\|^{6}\int_{\Omega}u_{\varepsilon}^{6}\mathrm{d}x}{24\left(\int_{\Omega}u_{\varepsilon}^{6}\mathrm{d}x\right)^{2}}+\frac{b^{2}\|u_{\varepsilon}\|^{4}\sqrt{b^{2}\|u_{\varepsilon}\|^{8}+4a\|u_{\varepsilon}\|^{2}\int_{\Omega}u_{\varepsilon}^{6}\mathrm{d}x}}{24\left(\int_{\Omega}u_{\varepsilon}^{6}\mathrm{d}x\right)^{2}}=\\
&\quad \frac{ab\|u_{\varepsilon}\|^{6}}{4\int_{\Omega}u_{\varepsilon}^{6}\mathrm{d}x}+\frac{b^{3}\|u_{\varepsilon}\|^{12}}{24\left(\int_{\Omega}u_{\varepsilon}^{6}\mathrm{d}x\right)^{2}}+\frac{a\|u_{\varepsilon}\|^{2}\sqrt{b^{2}\|u_{\varepsilon}\|^{8}+4a\|u_{\varepsilon}\|^{2}\int_{\Omega}u_{\varepsilon}^{6}\mathrm{d}x}}{6\int_{\Omega}u_{\varepsilon}^{6}\mathrm{d}x}+\\
&\quad \frac{b^{2}\|u_{\varepsilon}\|^{4}\sqrt{b^{2}\|u_{\varepsilon}\|^{8}+4a\|u_{\varepsilon}\|^{2}\int_{\Omega}u_{\varepsilon}^{6}\mathrm{d}x}}{24\left(\int_{\Omega}u_{\varepsilon}^{6}\mathrm{d}x\right)^{2}}=\\
&\quad \frac{ab(S^{\frac{9}{2}}+O(\varepsilon))}{4(S^{\frac{3}{2}}+o(\varepsilon))}+\frac{b^{3}(S^{9}+O(\varepsilon))}{24(S^{\frac{3}{2}}+o(\varepsilon))^{2}}+\frac{a(S^{\frac{3}{2}}+O(\varepsilon))\sqrt{b^{2}S^{6}+4aS^{3}+O(\varepsilon)}}{6(S^{\frac{3}{2}}+o(\varepsilon))}+\\
&\quad \frac{b^{2}(S^{6}+O(\varepsilon))\sqrt{b^{2}S^{6}+4aS^{3}+O(\varepsilon)}}{24(S^{\frac{3}{2}}+o(\varepsilon))^{2}}=\\
&\quad \frac{abS^{3}}{4}+\frac{b^{3}S^{6}}{24}+\frac{aS\sqrt{b^{2}S^{4}+4aS}}{6}+\frac{b^{2}S^{4}\sqrt{b^{2}S^{4}+4aS}}{24}+O(\varepsilon)=\\
&\quad \Lambda+O(\varepsilon)
\end{aligned} \tag{23}$$

令 $I_{2\varepsilon}(t)=\dfrac{t^{4}}{4}\int_{\Omega}\phi_{u_{\varepsilon}}u_{\varepsilon}^{2}\mathrm{d}x$，则根据文献[3]中的引理 2.6 可得

$$I_{2\varepsilon}(t)\leqslant O(\varepsilon^{2}) \tag{24}$$

令 $I_{3\varepsilon}(t)=\int_{\Omega}F(x,tu_{\varepsilon})\mathrm{d}x$，我们断言：

$$\lim_{\varepsilon\to 0^{+}}\frac{\int_{\Omega}F(x,t_{\varepsilon}u_{\varepsilon})\mathrm{d}x}{\varepsilon}=+\infty \tag{25}$$

定义 $m(t)=\inf\limits_{x\in\omega}f(x,t)$，根据条件($f_1$)和($f_4$)，对 $\forall\, x\in\omega$ 和 $t>0$，可得

$$f(x,t) \geqslant m(t) \geqslant 0 \qquad \lim_{t\to+\infty}\frac{m(t)}{t^3} = +\infty$$

故对 $\forall \mu > 0$，存在 $A > 0$，使得对 $\forall t \geqslant A$ 都有 $M(t) \geqslant \mu t^4$，其中 $M(t) = \int_0^t m(s)\mathrm{d}s$. 从而，可得

$$\begin{aligned}
\frac{\int_\Omega F(x, t_\varepsilon u_\varepsilon)\mathrm{d}x}{\varepsilon} \geqslant & \varepsilon^{-1}\int_{|x|<\delta} F(x, t_\varepsilon u_\varepsilon)\mathrm{d}x \geqslant \\
& \varepsilon^{-1}\int_{|x|<\delta} M(t_\varepsilon u_\varepsilon)\mathrm{d}x = \\
& \varepsilon^{-1}\int_0^\delta M\left(\frac{t_\varepsilon 3^{\frac{1}{4}}\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{(\varepsilon^2+r^2)^{\frac{1}{2}}}\right)r^2\mathrm{d}r = \\
& \varepsilon^2\int_0^{\delta\varepsilon^{-1}} M\left(\frac{t_\varepsilon 3^{\frac{1}{4}}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}{(1+r^2)^{\frac{1}{2}}}\right)r^2\mathrm{d}r = \\
& \varepsilon^2\int_0^{\varepsilon^{-1}} M\left(\frac{t_\varepsilon 3^{\frac{1}{4}}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}{(1+r^2)^{\frac{1}{2}}}\right)r^2\mathrm{d}r - \varepsilon^2\int_{\delta\varepsilon^{-1}}^{\varepsilon^{-1}} M\left(\frac{t_\varepsilon 3^{\frac{1}{4}}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}{(1+r^2)^{\frac{1}{2}}}\right)r^2\mathrm{d}r
\end{aligned} \tag{26}$$

由于对 $\forall t > 0$ 有 $m(t) > 0$，容易得到 $M(t)$ 在 $t > 0$ 时为单调递增函数. 结合条件(f_2)，可得 $M(t) \leqslant Ct^2$ 对任意充分大的 $t > 0$ 都成立. 因此，对 $\varepsilon > 0$ 充分小时，有

$$\left|\varepsilon^2\int_{\delta\varepsilon^{-1}}^{\varepsilon^{-1}} M\left(\frac{t_\varepsilon 3^{\frac{1}{4}}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}{(1+r^2)^{\frac{1}{2}}}\right)r^2\mathrm{d}r\right| \leqslant C\varepsilon^{-1}M(t_\varepsilon 3^{\frac{1}{4}}\varepsilon^{\frac{1}{2}}) \leqslant C\varepsilon^{-1}M(T_0 3^{\frac{1}{4}}\varepsilon^{\frac{1}{2}}) \leqslant C \tag{27}$$

固定 A，则存在 $B > 0$，使得对 $\forall 1 < r < B\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$ 都有 $\dfrac{t_\varepsilon 3^{\frac{1}{4}}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}{(1+r^2)^{\frac{1}{2}}} \geqslant A$. 进一步，可得

$$\begin{aligned}
\liminf_{\varepsilon\to0^+}\varepsilon^2\int_0^{\varepsilon^{-1}} M\left(\frac{t_\varepsilon 3^{\frac{1}{4}}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}{(1+r^2)^{\frac{1}{2}}}\right)r^2\mathrm{d}r \geqslant & \liminf_{\varepsilon\to0^+}\varepsilon^2\int_1^{B\varepsilon^{-\frac{1}{2}}} M\left(\frac{t_\varepsilon 3^{\frac{1}{4}}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}{(1+r^2)^{\frac{1}{2}}}\right)r^2\mathrm{d}r \geqslant \\
& \liminf_{\varepsilon\to0^+} C\mu\varepsilon^2\int_1^{B\varepsilon^{-\frac{1}{2}}} \frac{\varepsilon^{-2}r^2}{(1+r^2)^2}\mathrm{d}r = \\
& \int_1^{+\infty}\frac{\varepsilon^{-2}r^2}{(1+r^2)^2}\mathrm{d}r = +\infty
\end{aligned}$$

故根据(26)－(28)式，可知断言成立，即(25)式成立. 因此，根据(23)式、(24)式、(25)式，有

$$I(tu_\varepsilon) = I_{1\varepsilon}(t) + I_{2\varepsilon}(t) - I_{3\varepsilon}(t) \leqslant I_{1\varepsilon}(t_\varepsilon) - I_{2\varepsilon}(t_\varepsilon) - I_{3\varepsilon}(t_\varepsilon) < \Lambda + O(\varepsilon) + O(\varepsilon^2) - o(\varepsilon) \leqslant \Lambda$$

从而，取 $u_0 = u_\varepsilon$，引理 3 得证.

定理 1 的证明 定义

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], H_0^1(\Omega)) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}$$

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t))$$

根据引理 1－3，存在序列$\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$，使得 $I(u_n) \to c > 0$ 且 $I'(u_n) \to 0$，则序列$\{u_n\}$在 $H_0^1(\Omega)$ 中存在收敛子列(仍记为$\{u_n\}$). 不妨假设在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $u_n \to u_*$. 从而根据山路引理，可得$\lim\limits_{n\to\infty} I(u_n) = I(u_*) = c > 0$ 且 $I'(u_*) = 0$. 因此，u_* 是方程(3)的非零解. 进一步，由$\langle I'(u_*), u_*^-\rangle = 0$，可得 $u_*^- = 0$，即$u_* \geqslant 0$ 在 Ω 中几乎处处成立. 所以 u_* 是非零非负解. 根据强极大值原理可得，u_* 是方程(3)的正解. 因此，(u_*, ϕ_{u_*}) 是系统(1)的正解.

参考文献:

[1] AZZOLLINI A, D'AVENIA P, LUISI V. Generalized Schrödinger-Poisson Type Systems [J]. Commun Pure Appl Anal, 2013, 12(2): 867-879.

[2] AZZOLLINI A, D'AVENIA P. On a System Involving a Critically Growing Nonlinearity [J]. J Math Anal Appl, 2012, 387(1): 433-438.

[3] LEI C Y, SUO H M. Positive Solutions for a Schrödinger-Poisson System Involving Concave-Convex Nonlinearities [J].

Comput Math Appl, 2017, 74(6): 1516-1524.
[4] LEI C Y, LIAO J F. Multiple Positive Solutions for Schrödinger-Poisson System Involving Singularity and Critical Exponent [J]. Math Methods Appl Sci, 2019, 42(7): 2417-2430.
[5] ALMUAALEMI B, CHEN H B, KHOUTIR S. Existence of Nontrivial Solutions for Schrödinger-Poisson Systems with Critical Exponent on Bounded Domains [J]. Bull Malays Math Sci Soc, 2019, 42(4): 1675-1686.
[6] ZHANG Q. Existence, Uniqueness and Multiplicity of Positive Solutions for Schrödinger-Poisson System with Singularity [J]. J Math Anal Appl, 2016, 437(1): 160-180.
[7] LI F Y, SONG Z X, ZHANG Q. Existence and Uniqueness Results for Kirchhoff-Schrödinger-Poisson System with General Singularity [J]. Appl Anal, 2017, 96(16): 2906-2916.
[8] ZHANG Q. Multiple Positive Solutions for Kirchhoff-Schrödinger-Poisson System with General Singularity [J]. Bound Value Probl, 2017, 127: 1-17.
[9] ZHANG Q. Existence of Positive Solution to Kirchhoff-Schrödinger-Poisson System with Strong Singular Term [J]. J Math Phys, 2019, 60(4): 1-10.
[10] 李勇勇，唐春雷. 一类带双临界指数的 Schrödinger-Poisson 系统正基态解的存在性 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2018, 40(6): 84-91.
[11] 李贵东，唐春雷. 带有临界指数的 Schrödinger 方程正基态解的存在性 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2018, 40(6): 92-96.
[12] 叶景兰，邓圣兵. 带有一般非线性项的分数阶 Kirchhoff-Schrödinger-Poisson 系统的变号解 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2019, 44(4): 16-21.
[13] WILLEM M. Minimax Theorems [M]. Boston, MA: Birkhäuser Boston, 1996.

Positive Solutions for a Class of Kirchhoff-Schrödinger-Poisson System with Critical Exponent

ZHANG Peng[1], PENG Yun-fei[2], ZHANG Xiao-fei[1]

1. *Department of Mathematics, Zunyi Normal College, Zunyi Guizhou 563006, China;*
2. *School of Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang 550025, China*

Abstract: A class of Kirchhoff-Schrödinger-Poisson system with critical exponent and general superlinear term has been considered. By means of the Mountain-Pass Lemma, the existence of positive solutions has been obtained, which completes and improves the recent corresponding results.

Key words: Kirchhoff-Schrödinger-Poisson system; critical exponent; positive solutions; Mountain-Pass Lemma

责任编辑　廖　坤