DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2020.12.007

一个联系超几何函数的齐次核 Hilbert 型积分不等式①

刘英迪[1], 刘 琼[2]

1. 邵阳学院 经济管理学院,湖南 邵阳 422000;2. 邵阳学院 理学院,湖南 邵阳 422000

摘要: 利用基于 Hardy 插值难题的权函数方法、一些实分析技巧和特殊函数的有关理论,引入了 Γ-函数和超几何函数联合刻画不等式的常数因子,给出了一个具最佳常数因子的复合齐次核 Hilbert 型积分不等式,并考虑了其等价形式. 作为应用,通过取一些满足结论条件的特殊参数值,不仅得到了参考文献中的有关结果,而且还能发现一些新的、形式简单的 Hilbert 型积分不等式.

关 键 词: Hilbert 型积分不等式;权函数;最佳常数因子;超几何函数

中图分类号:O178 **文献标志码:A** **文章编号:** 1000-5471(2020)12-0036-07

为方便起见,设 $\theta(x)(>0)$ 为可测函数,$\rho \geqslant 1$,定义空间

$$L^{\rho}(0,\infty)=\left\{h:\ \| h\|_{\rho}=\left(\int_{0}^{\infty}|h(x)|^{\rho}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{\rho}}<\infty\right\}$$

和

$$L_{\theta}^{\rho}(0,\infty)=\left\{h:\ \| h\|_{\rho,\theta}=\left(\int_{0}^{\infty}\theta(x)|h(x)|^{\rho}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{\rho}}<\infty\right\}$$

设 $f,g\geqslant 0$,$f,g\in L^{2}(0,\infty)$,$\| f\|_{2},\| g\|_{2}>0$,由文献[1],有

$$\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\frac{f(x)g(y)}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\pi\| f\|_{2}\| g\|_{2} \tag{1}$$

此处常数因子 π 是最佳值. (1) 式称为 Hilbert 积分不等式. 1925 年,Hardy-Riesz 引进一共轭指数对(p,q) $\left(p>1,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$,对(1) 式进行了如下推广:

设 $f,g\geqslant 0$,$f\in L^{p}(0,\infty)$,$g\in L^{q}(0,\infty)$,$\| f\|_{p},\| g\|_{q}>0$,则由文献[1],有

$$\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\frac{f(x)g(y)}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}\| f\|_{p}\| g\|_{q} \tag{2}$$

其中常数因子$\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}$是最佳值. (2) 式称为 Hardy-Hilbert 积分不等式,它在分析学及偏微分方程理论方面有重要的应用[2]. 文献[3-4] 引入了独立参数 $\lambda(>0)$ 及 Beta 函数,对 Hilbert 积分不等式进行了单参量

---

① 收稿日期:2019-11-28

基金项目:湖南省教育厅科学研究重点项目(19A455);国家自然科学基金项目(11171280).

作者简介:刘英迪(1993-),女,助教,主要从事金融学和数学的研究.

通信作者:刘 琼,教授.

化推广：

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{(x+y)^\lambda}\mathrm{d}x\mathrm{d}y < B\left(\frac{\lambda}{2},\frac{\lambda}{2}\right)\|f\|_{2,\varphi}\|g\|_{2,\varphi} \tag{3}$$

其中 $\varphi(x)=x^{1-\lambda}$，常数因子 $B\left(\frac{\lambda}{2},\frac{\lambda}{2}\right)$ 是最佳值($B(u,v)$ 为 Beta 函数)．文献[5]得到了如下不等式：

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{|x-y|^\lambda}\mathrm{d}x\mathrm{d}y < B\left(\frac{\lambda}{2},1-\lambda\right)\|f\|_{2,\varphi}\|g\|_{2,\varphi} \tag{4}$$

其中 $\varphi(x)=x^{1-\lambda}(0<\lambda<1)$，常数因子 $B\left(\frac{\lambda}{2},1-\lambda\right)$ 是最佳值．关于 Hilbert 型积分不等式的一些近期成果可参阅文献[6-14]．

混合核和复合核是 Hilbert 不等式的重要研究内容之一．所谓的混合核和复合核研究，就是将一些基本核和一些简单的单核进行组合，构造新的积分核进行研究．这方面的研究已取得了不少成果[15-17]．我们查阅大量文献尚未发现有将基本核 $k_1(x,y)=\frac{1}{x+y}$ 和 $k_2(x,y)=\frac{1}{|x-y|}$ 组合成混合核的研究．本文引入参数 α,β，将上面两个基本核 $k_1(x,y)$，$k_2(x,y)$ 进行参量化组合成混合核 $k(x,y)=\frac{|x-y|^\beta}{(x+y)^\alpha}$．利用基于 Hardy 插值难题的权函数方法和实分析技巧(如在引理 2 的证明中，我们利用连续函数的有界性和函数的幂级数展开式及幂级数的逐项积分性质，巧妙地证明了积分的有界性)，建立了一个常数因子联系 Γ- 函数和超几何函数的混合核 Hilbert 型积分不等式及其等价形式，并证明了它们的常数因子是最佳的．所得结果不仅统合了上面的(1)，(2)，(3) 式和(4) 式，而且可选取符合条件的参数值，得到一些新的、形式简单的 Hilbert 型积分不等式．

在本文的推证过程中，我们需要如下一些特殊函数[18]：

设 $z>0$，Γ- 函数定义为

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u}u^{z-1}\mathrm{d}u \tag{5}$$

设 $\mathrm{Re}(\gamma_3)>\mathrm{Re}(\gamma_2)>0$，$|\arg(1-z)|<\pi$，超几何函数的定义为

$$F(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,z)=\frac{\Gamma(\gamma_3)}{\Gamma(\gamma_2)\Gamma(\gamma_3-\gamma_2)}\int_0^1 t^{\gamma_2-1}(1-t)^{\gamma_3-\gamma_2-1}(1-zt)^{-\gamma_1}\mathrm{d}t \tag{6}$$

引理 1　设 $p>1$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$\alpha\geqslant 0$，$\beta>-1$，且 $\alpha>\beta$，定义权函数

$$\omega(\alpha,\beta,x)=\int_0^\infty \frac{|x-y|^\beta}{(x+y)^\alpha}\frac{y^{\frac{\alpha-\beta-2}{2}}}{x^{\frac{\beta-\alpha}{2}}}\mathrm{d}y \qquad y>0$$

$$\omega(\alpha,\beta,y)=\int_0^\infty \frac{|x-y|^\beta}{(x+y)^\alpha}\frac{x^{\frac{\alpha-\beta-2}{2}}}{y^{\frac{\beta-\alpha}{2}}}\mathrm{d}x \qquad x>0$$

则有

$$\omega(\alpha,\beta,x)=\omega(\alpha,\beta,y)=C(\alpha,\beta)=\frac{2\Gamma\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}F\left(\alpha,\frac{\alpha-\beta}{2},\frac{\alpha+\beta}{2}+1,-1\right) \tag{7}$$

证　令 $\frac{y}{x}=u$，利用(6) 式，则有

$$\omega(\alpha,\beta,x)=\int_0^\infty \frac{|x-y|^\beta}{(x+y)^\alpha}\frac{y^{\frac{\alpha-\beta-2}{2}}}{x^{\frac{\beta-\alpha}{2}}}\mathrm{d}y=\int_0^\infty \frac{|1-u|^\beta u^{\frac{\alpha-\beta-2}{2}}}{(1+u)^\alpha}\mathrm{d}u=$$

$$\int_0^1 \frac{(1-u)^\beta u^{\frac{\alpha-\beta-2}{2}}}{(1+u)^\alpha}\mathrm{d}u+\int_1^\infty \frac{(u-1)^\beta u^{\frac{\alpha-\beta-2}{2}}}{(1+u)^\alpha}\mathrm{d}u=$$

$$2\int_0^1 \frac{(1-u)^\beta u^{\frac{\alpha-\beta-2}{2}}}{(1+u)^\alpha}\mathrm{d}u =$$

$$2\int_0^1 u^{\frac{\alpha-\beta}{2}-1}(1-u)^{(\frac{\alpha+\beta}{2}+1)-\frac{\alpha-\beta}{2}-1}(1+u)^{-\alpha}\mathrm{d}u =$$

$$\frac{2\Gamma\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}F\left(\alpha,\ \frac{\alpha-\beta}{2},\ \frac{\alpha+\beta}{2}+1,\ -1\right)=C(\alpha,\ \beta)$$

类似可证 $\omega(\alpha,\ \beta,\ y)=C(\alpha,\ \beta)$.

引理 2 设 $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 常数 α, β 满足 $\alpha\geqslant 0$, $\alpha>\beta>-1$, 且 ε, $\delta>0$ 充分地小, 定义可测函数

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}0 & x\in(0,\ 1] \\ x^{-\frac{2+\beta-\alpha}{2}-\frac{\varepsilon}{p}} & x\in(1,\ \infty)\end{cases}$$

$$\tilde{g}(y)=\begin{cases}0 & y\in(0,\ \delta] \\ y^{-\frac{2+\beta-\alpha}{2}-\frac{\varepsilon}{q}} & y\in(\delta,\ \infty)\end{cases}$$

则有

$$\tilde{J}\varepsilon=\left(\int_0^\infty x^{\frac{p(2+\beta-\alpha)}{2}-1}\tilde{f}^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^\infty y^{\frac{q(2+\beta-\alpha)}{2}-1}\tilde{g}^q(y)\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}}\varepsilon=\left(\frac{1}{\delta^\varepsilon}\right)^{\frac{1}{q}} \tag{8}$$

$$\tilde{I}\varepsilon=\varepsilon\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|x-y|^\beta\tilde{f}(x)\tilde{g}(y)}{(x+y)^\alpha}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant$$
$$\int_\delta^1\frac{(1-t)^\beta}{(1+t)^\alpha}t^{\frac{\alpha-\beta-2}{2}-\frac{\varepsilon}{q}}\mathrm{d}t+\int_0^1\frac{(1-t)^\beta}{(1+t)^\alpha}t^{\frac{\alpha-\beta-2}{2}+\frac{\varepsilon}{q}}\mathrm{d}t \tag{9}$$

证 先证(8)式. 容易得到

$$\tilde{J}\varepsilon=\left(\int_0^\infty x^{\frac{p(2+\beta-\alpha)}{2}-1}\tilde{f}^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^\infty y^{\frac{q(2+\beta-\alpha)}{2}-1}\tilde{g}^q(y)\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}}\varepsilon=$$

$$\left(\int_1^\infty x^{-1-\varepsilon}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_\delta^\infty y^{-1-\varepsilon}\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}}\cdot\varepsilon=\left(\frac{1}{\delta^\varepsilon}\right)^{\frac{1}{q}}$$

再证(9)式. 令 $\frac{y}{x}=t$, 由引理 1 的证明, 有

$$\tilde{I}\varepsilon=\varepsilon\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{|x-y|^\beta\tilde{f}(x)\tilde{g}(y)}{(x+y)^\alpha}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\varepsilon\int_1^\infty x^{-1-\varepsilon}\mathrm{d}x\int_{\frac{\delta}{x}}^\infty\frac{|1-t|^\beta}{(1+t)^\alpha}t^{\frac{\alpha-\beta}{2}-1-\frac{\varepsilon}{q}}\mathrm{d}t=$$

$$\int_{\frac{\delta}{x}}^\infty\frac{|1-t|^\beta}{(1+t)^\alpha}t^{\frac{\alpha-\beta}{2}-1-\frac{\varepsilon}{q}}\mathrm{d}t\geqslant\int_\delta^\infty\frac{|1-t|^\beta}{(1+t)^\alpha}t^{\frac{\alpha-\beta}{2}-1-\frac{\varepsilon}{q}}\mathrm{d}t=$$

$$\int_\delta^1\frac{(1-t)^\beta}{(1+t)^\alpha}t^{\frac{\alpha-\beta}{2}-1-\frac{\varepsilon}{q}}\mathrm{d}t+\int_1^\infty\frac{(t-1)^\beta}{(1+t)^\alpha}t^{\frac{\alpha-\beta}{2}-1-\frac{\varepsilon}{q}}\mathrm{d}t=$$

$$\int_\delta^1\frac{(1-t)^\beta}{(1+t)^\alpha}t^{\frac{\alpha-\beta-2}{2}-\frac{\varepsilon}{q}}\mathrm{d}t+\int_0^1\frac{(1-t)^\beta}{(1+t)^\alpha}t^{\frac{\alpha-\beta-2}{2}+\frac{\varepsilon}{q}}\mathrm{d}t$$

定理 1 设 $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $\alpha\geqslant 0$, $\beta>-1$, $\alpha>\beta$, $\varphi(x)=x^{\frac{p(2+\beta-\alpha)}{2}-1}$, $\psi(y)=y^{\frac{q(2+\beta-\alpha)}{2}-1}$, 且 $f\in L_\varphi^p(0,\ \infty)$, $g\in L_\psi^q(0,\ \infty)$, $\|f\|_{p,\varphi}$, $\|g\|_{q,\psi}>0$, 则有

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{|x-y|^\beta f(x)g(y)}{(x+y)^\alpha}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<C(\alpha,\ \beta)\|f\|_{p,\varphi}\|g\|_{q,\psi} \tag{10}$$

其中常数因子 $C(\alpha,\ \beta)$($C(\alpha,\ \beta)$ 同(7)式)是最佳的.

证 由 Hölder 不等式[19] 和 Fubini 定理[20] 及引理 1, 有

$$I=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{|x-y|^{\beta}f(x)g(y)}{(x+y)^{\alpha}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{|x-y|^{\beta}f(x)g(y)}{(x+y)^{\alpha}}\left[\frac{y^{\frac{\alpha-\beta-2}{2p}}}{x^{\frac{\alpha-\beta-2}{2q}}}\right]\left[\frac{x^{\frac{\alpha-\beta-2}{2q}}}{y^{\frac{\alpha-\beta-2}{2p}}}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant$$

$$\left(\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{|x-y|^{\beta}f^{p}(x)}{(x+y)^{\alpha}}\frac{y^{\frac{\alpha-\beta-2}{2}}}{x^{\frac{p(\alpha-\beta-2)}{2q}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{|x-y|^{\beta}g^{q}(y)}{(x+y)^{\alpha}}\frac{x^{\frac{\alpha-\beta-2}{2}}}{y^{\frac{q(\alpha-\beta-2)}{2p}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}}=$$

$$\left(\int_0^{\infty}\omega(\alpha,\beta,x)\varphi(x)f^{p}(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\infty}\omega(\alpha,\beta,y)\psi(y)g^{q}(y)\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}}=$$

$$C(\alpha,\beta)\|f\|_{p,\varphi}\|g\|_{q,\psi}\tag{11}$$

一方面，如果(11) 式取等号，则存在不全为 0 的常数 A 和 B[19]，使得

$$A\cdot\frac{y^{\frac{\alpha-\beta-2}{2}}}{x^{\frac{p(\alpha-\beta-2)}{2q}}}\cdot f^{p}(x)=B\cdot\frac{x^{\frac{\alpha-\beta-2}{2}}}{y^{\frac{q(\alpha-\beta-2)}{2p}}}\cdot g^{q}(y)$$

于$(0,\infty)\times(0,\infty)$内几乎处处成立，即 $Ax^{\frac{p(2+\beta-\alpha)}{2}}f^{p}(x)=By^{\frac{q(2+\beta-\alpha)}{2}}g^{q}(y)$ 于$(0,\infty)\times(0,\infty)$内几乎处处成立．假设 $A\neq 0$，则存在 $y>0$，使得 $x^{\frac{p(2+\beta-\alpha)}{2}-1}f^{p}(x)=(y^{\frac{q(2+\beta-\alpha)}{2}}g^{q}(y))\dfrac{B}{Ax}$ 于$(0,\infty)$内几乎处处成立．而广义积分$\int_0^{\infty}(y^{\frac{q(2+\beta-\alpha)}{2}}g^{q}(y))\dfrac{B}{Ax}\mathrm{d}x$ 是发散的，这与 $0<\|f\|_{p,\varphi}=\int_0^{\infty}x^{\frac{p(2+\beta-\alpha)}{2}-1}f^{p}(x)\mathrm{d}x<\infty$ 矛盾，所以(11) 式当取严格不等号.

另一方面，如果(10) 式的常数因子 $C(\alpha,\beta)$ 不是最佳值，则存在正数 $K<C(\alpha,\beta)$，使得用 K 代替 $C(\alpha,\beta)$ 时，(10) 式仍然是成立的. 我们将(10) 式中的 $f(x)$，$g(y)$ 分别取引理 2 中的 $\widetilde{f}(x)$，$\widetilde{g}(y)$，并由(8) 式和(9) 式，有

$$\int_{\delta}^{1}\frac{(1-t)^{\beta}}{(1+t)^{\alpha}}t^{\frac{\alpha-\beta-2}{2}-\frac{\varepsilon}{q}}\mathrm{d}t+\int_0^{1}\frac{(1-t)^{\beta}}{(1+t)^{\alpha}}t^{\frac{\alpha-\beta-2}{2}+\frac{\varepsilon}{q}}\mathrm{d}t\leqslant\widetilde{I}_{\varepsilon}<\widetilde{J}_{\varepsilon}=K\left(\frac{1}{\delta^{\varepsilon}}\right)^{\frac{1}{q}}\tag{12}$$

在(12) 式中令 $\varepsilon\to 0^{+}$，并利用 Lebesgue 控制收敛定理[20]，有

$$\int_{\delta}^{1}\frac{(1-t)^{\beta}}{(1+t)^{\alpha}}t^{\frac{\alpha-\beta-2}{2}}\mathrm{d}t+\int_0^{1}\frac{(1-t)^{\beta}}{(1+t)^{\alpha}}t^{\frac{\alpha-\beta-2}{2}}\mathrm{d}t\leqslant K$$

再令 $\delta\to 0^{+}$，由引理 1 得到

$$K\geqslant 2\int_0^{1}\frac{(1-t)^{\beta}}{(1+t)^{\alpha}}t^{\frac{\alpha-\beta-2}{2}}\mathrm{d}t=C(\alpha,\beta)$$

显然这与前面的 $K<C(\alpha,\beta)$ 矛盾，所以(10) 式中的常数因子 $C(\alpha,\beta)$ 是最佳值. 至此定理 1 证毕.

由齐次核 Hilbert 型不等式的基本理论，下面两个不等式是等价的[21]：

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}K(x,y)f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<M\|f\|_{p,\varphi}\|g\|_{q,\psi}$$

$$\int_0^{\infty}\psi^{1-p}(y)\left(\int_0^{\infty}K(x,y)f(x)\mathrm{d}x\right)^{p}\mathrm{d}y<M^{p}\|f\|_{p,\varphi}^{p}$$

因此，我们可得到下面定理：

定理 2　在与定理 1 相同的条件下，有不等式

$$\int_0^{\infty}y^{\frac{p(\alpha-\beta)}{2}-1}\mathrm{d}y\left(\int_0^{\infty}\frac{|x-y|^{\beta}}{(x+y)^{\alpha}}f(x)\mathrm{d}x\right)^{p}<C^{p}(\alpha,\beta)\|f\|_{p,\varphi}^{p}\tag{13}$$

成立，其中常数因子 $C^{p}(\alpha,\beta)$ 是最佳值，并且(13) 式与(10) 式是等价的.

我们在(10)，(13) 式中取一些特殊参数值，借助 Maple 数学软件进行计算，既可得到有关参考文献的结果，又可获得一些新的、简单的和有意义的不等式.

(1°) 取 $\alpha=\lambda(>0)$，$\beta=0$，计算(7) 式得

$$C(\lambda, 0)=\frac{2\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}+1\right)}F\left(\lambda, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}+1, -1\right)=\frac{4}{\lambda}F\left(\lambda, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}+1, -1\right)=B\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}\right)$$

这时

$$\varphi(x)=x^{p\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)-1} \qquad \psi(y)=y^{q\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)-1}$$

设 $f\in L_{\varphi}^{p}(0, \infty)$，$g\in L_{\psi}^{q}(0, \infty)$，$\|f\|_{p,\varphi}, \|g\|_{q,\psi}>0$，于是得到等价不等式

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{(x+y)^\lambda}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<B\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}\right)\|f\|_{p,\varphi}\|g\|_{q,\psi} \tag{14}$$

$$\int_0^\infty y^{\frac{p\lambda}{2}-1}\mathrm{d}y\left(\int_0^\infty \frac{f(x)}{(x+y)^\lambda}\mathrm{d}x\right)^p<B^p\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}\right)\|f\|_{p,\varphi}^{p} \tag{15}$$

其中常数因子 $B\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}\right)$，$B^p\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}\right)$是最佳值．如果在(14)，(15) 式中取 $p=q=2$，可得(3) 式和其等价形式

$$\int_0^\infty y^{\lambda-1}\mathrm{d}y\left(\int_0^\infty \frac{f(x)}{(x+y)^\lambda}\mathrm{d}x\right)^2<B^2\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}\right)\|f\|_{2,\varphi}^{2} \tag{16}$$

其中 $\varphi(x)=x^{1-\lambda}$，常数因子 $B^2\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}\right)$是最佳值．继续在(16) 式中取 $\lambda=1$，可得(1) 式的等价式

$$\int_0^\infty \mathrm{d}y\left(\int_0^\infty \frac{f(x)}{x+y}\mathrm{d}x\right)^2<\pi^2\|f\|_{2}^{2}$$

(2°) 取 $\alpha=0$，$\beta=-\lambda(0<\lambda<1)$，$p=q=2$，由(7) 式，有

$$C(0, \lambda)=\frac{2\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)\Gamma(1-\lambda)}{\Gamma\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)}F\left(0, \frac{\lambda}{2}, 1-\frac{\lambda}{2}, -1\right)=B\left(\frac{\lambda}{2}, 1-\frac{\lambda}{2}\right)$$

这时 $\varphi(x)=x^{1-\lambda}$．设 $f,g\in L_{\varphi}^{2}(0, \infty)$，$\|f\|_{2,\varphi}, \|g\|_{2,\varphi}>0$，于是得到(4) 式和其等价形式

$$\int_0^\infty y^{\lambda-1}\mathrm{d}y\left(\int_0^\infty \frac{f(x)}{|x-y|^\lambda}\mathrm{d}x\right)^2<B^2\left(\frac{\lambda}{2}, 1-\frac{\lambda}{2}\right)\|f\|_{2,\varphi}^{2}$$

其中常数因子 $B^2\left(\frac{\lambda}{2}, 1-\frac{\lambda}{2}\right)$是最佳值．(1°)，(2°) 说明了(10)，(13) 式统合了参考文献的一些结论．除此之外，我们还可以在(10)，(13) 式中选取符合条件的参数值，得到一些新的混合核 Hilbert 型不等式．

(3°) 取 $\alpha=1$，$\beta=-\frac{1}{2}$，$p=q=2$，由(7) 式，有

$$C\left(1, -\frac{1}{2}\right)=\frac{2\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}F\left(1, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, -1\right)=\pi$$

这时 $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$．设 $f,g\in L_{\varphi}^{2}(0, \infty)$，$\|f\|_{2,\varphi}, \|g\|_{2,\varphi}>0$，则有等价不等式

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{(x+y)\sqrt{|x-y|}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\pi\|f\|_{2,\varphi}\|g\|_{2,\varphi}$$

$$\int_0^\infty \sqrt{y}\mathrm{d}y\left(\int_0^\infty \frac{f(x)}{(x+y)\sqrt{|x-y|}}\mathrm{d}x\right)^2<\pi^2\|f\|_{2,\varphi}^{2}$$

其中常数因子 π，π^2 是最佳值．

(4°) 取 $\alpha=3$，$\beta=2$，$p=q=2$，由(7) 式，有

$$C(3, 2)=\frac{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(3)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}F\left(3, \frac{1}{2}, \frac{7}{2}, -1\right)=\frac{32}{15}F\left(3, \frac{1}{2}, \frac{7}{2}, -1\right)=\frac{\pi}{2}$$

这时 $\varphi(x)=1$. 设 $f,g\in L^2(0,\infty)$，$\|f\|_2,\|g\|_2>0$，则有等价不等式

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{(x-y)^2 f(x)g(y)}{(x+y)^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\frac{\pi}{2}\|f\|_2\|g\|_2$$

$$\int_0^\infty \mathrm{d}y\left(\int_0^\infty \frac{(x-y)^2 f(x)}{(x+y)^3}\mathrm{d}x\right)^2<\frac{\pi^2}{4}\|f\|_2^2$$

其中常数因子 π,π^2 是最佳值.

(5°) 取 $\alpha=3$，$\beta=1$，$p=q=2$，由(7)式，有

$$C(3,1)=\frac{2\Gamma(1)\Gamma(2)}{\Gamma(3)}F(3,1,3,-1)=\frac{3}{2}-2\ln 2$$

这时 $\varphi(x)=x^{-1}$. 设 $f,g\in L_\varphi^2(0,\infty)$，$\|f\|_{2,\varphi},\|g\|_{2,\varphi}>0$，则有等价不等式

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|x-y|f(x)g(y)}{(x+y)^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\left(\frac{3}{2}-2\ln 2\right)\|f\|_{2,\varphi}\|g\|_{2,\varphi}$$

$$\int_0^\infty y\mathrm{d}y\left(\int_0^\infty \frac{|x-y|f(x)}{(x+y)^3}\mathrm{d}x\right)^2<\left(\frac{3}{2}-2\ln 2\right)^2\|f\|_{2,\varphi}^2$$

其中常数因子 $\frac{3}{2}-2\ln 2$，$\left(\frac{3}{2}-2\ln 2\right)^2$ 是最佳值.

参考文献：

[1] HARDY G H. Note on a Theorem of Hilbert Conceming Series of Positive Term [J]. Proceedings London Math Soc，1925，23(2)：45-46.

[2] HARDY G H，LITTLEWOOD J E，PÓLYA G. Inequalities [M]. Cambridge：Cambridge Univ Press，1952.

[3] YANG B C. On the Extended Hilbert's Integral Inequality [J]. J Ineq Pure Applied Math，2004，5(4)：1-8.

[4] 杨必成. 关于一个推广的 Hardy-Hilbert 不等式 [J]. 数学年刊，2002，23A(2)：247-254.

[5] 钟五一，杨必成. 一个新 Hilbert 型积分不等式的含多参数的最佳推广 [J]. 江西师范大学学报(自然科学版)，2007，31(4)：410-414.

[6] 杨必成. 算子范数与 Hilbert 型不等式 [M]. 北京：科学出版社，2009.

[7] KRNIĆ M，PEČARIĆ J，PERIĆ I，et al. Recent Advances in Hilbert-Type Inequalities [J]. Ele-ment，Zagreb，2012，2012：1-258.

[8] 刘　琼. 一个新的多参数 Hilbert 型积分不等式及其逆 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2012，34(6)：92-97.

[9] 刘　琼，龙顺潮. 一个核为双曲余割函数的 Hilbert 型积分不等式 [J]. 数学学报，2013，56(1)：97-104.

[10] HUANG L，LIU Q. A Hilbert-Type Integral Inequality with the Inhomogeneous Kernel and Multi-Parameters [J]. 湘潭大学自然科学学报，2015，37(3)：1-8.

[11] RASSIAS M T，YANG B C. On a Multidimensional Hilbert-Type Integral Inequality Associated to the Gamma Function [J]. Appl Math Comput，2014，249：408-418.

[12] 杨必成，陈　强. 一个核为双曲正割函数的半离散 Hilbert 型不等式 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2015，40(2)：26-32.

[13] LIU Q. A Hilbert-Type Fractional Integral Inequality with the Kernel of Mittag-Leffler Function and Its Applications [J]. Math Inequal Appl，2018，21(3)：729-737.

[14] LIU Q，SUN W B. A Hilbert-Type Fractal Integral Inequality and Its Applications [J]. Journal of Inequalities and Applications，2017，2017：1-8.

[15] 杨必成. 一个具有混合核的 Hilbert 型积分不等式及推广 [J]. 四川师范大学学报(自然科学版)，2008，31(3)：281-284.

[16] 刘　琼，杨必成. 一个含多参数混合核的 Hilbert 型积分不等式及应用 [J]. 浙江大学学报(理学版)，2012，39(2)：135-141.

[17] LIU Q. A Hilbert-Type Integral Inequality Under Configuring Free Power and Its Applications [J]. Journal of Inequalities and Applications, 2019, 2019: 1-11.
[18] 王竹溪, 郭敦仁. 特殊函数概论 [M]. 北京: 北京大学出版社, 2000.
[19] 匡继昌. 常用不等式 [M]. 4版. 济南: 山东科学技术出版社, 2010.
[20] 匡继昌. 实分析引论 [M]. 长沙: 湖南教育出版社, 1996.
[21] 洪 勇. 具有齐次核的 Hilbert 型积分不等式的构造特征及应用 [J]. 吉林大学学报(理学版), 2017, 55(2): 189-194.

A Homogeneous Kernel Hilbert-Type Integral Inequality Related to Hypergeometric Function

LIU Ying-di[1], LIU Qiong[2]

1. College of Economics and Management, Shaoyang University, Shaoyang Hunan 422000, China;
2. College of Science, Shaoyang University, Shaoyang Hunan 422000, China

Abstract: In the weight function method based on the Hardy interpolation puzzle, some real analysis techniques and the special function related theories, and introducing Γ- function and the hypergeometric function to jointly characterize the constant factor of the inequality, a composite homogeneous kernel Hilbert-type integraline quality with the best constant factor has been given, and it's equivalent form been considered. As an application, by taking some special parameter values which satisfy the conclusion conditions, not only the relevant results in the references have been derived, but also some new Hilbert-type integral inequalities with simple form have been found.

Key words: Hilbert-type integral inequality; weight function; the best constant factor; hypergeometric function

责任编辑 廖 坤