第 45 卷 第 12 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2020 年 12 月
Vol. 45 No. 12 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Dec. 2020

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2020.12.008

一类格林函数变号的二阶 Neuman 问题正解的存在性[①]

李朝倩

西北师范大学 数学与统计学院,兰州 730070

摘要: 运用 Schauder 不动点定理研究了一类格林函数变号的非线性二阶 Neumann 问题

$$\begin{cases} u'' + m^2 u = \lambda g(t) f(u) & t \in [0, 1] \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

正解的存在性,其中 λ 是一个正参数,$m \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \varepsilon\right)$,$\varepsilon > 0$ 充分小,$g: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ 为连续函数,$f: [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ 为连续函数且 $f(0) > 0$.

关 键 词: Neumann 问题;格林函数;正解;存在性

中图分类号: O177.92 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5471(2020)12-0043-05

非线性二阶常微分方程 Neumann 问题具有广泛的物理背景,对此类问题的研究已经取得了许多结果[1-11].但许多学者在研究非线性二阶 Neumann 问题正解的存在性时,都是在格林函数大于 0 的情形下研究的[1-7].特别地,文献[1]在 $m \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 的条件下研究了二阶常微分方程 Neumann 问题

$$\begin{cases} u'' + m^2 u = f(t, u) & t \in [0, 1] \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

基于锥

$$K = \left\{ u \in C[0, 2\pi]: u(t) \geqslant \frac{A}{B} \| u \|_\infty, \ t \in [0, 2\pi] \right\}$$

运用锥拉伸与压缩不动点定理,得到问题(1)至少存在 1 个正解,其中非线性项 f 满足超线性或次线性条件,A,B 分别表示问题(1)对应的齐次问题的格林函数的最小值和最大值,且 A,B 均大于 0.

进一步,文献[2]对问题(1)中的非线性项 f 提出了新的约束条件,运用 Leggett-Williams 不动点定理,在 $m \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 的条件下,得到问题(1)至少存在 3 个非负解,其中 $f \in C([0, 1] \times [0, \infty), [0, \infty))$ 且存在常数 a,d,使得 $0 < d < a$,且

$$f(t, u) > \frac{a}{\min\limits_{t \in [0, 1]} \int_0^1 G(t, s) \mathrm{d}s} \qquad u \in [0, d]$$

或

$$f(t, u) < \frac{a}{\max\limits_{t \in [0, 1]} \int_0^1 G(t, s) \mathrm{d}s} \qquad u \in \left[a, \frac{a}{\frac{1}{\cosh^2 m}}\right]$$

① 收稿日期:2019-11-01
基金项目:国家自然科学基金项目(11671322).
作者简介:李朝倩(1995-),女,硕士研究生,主要从事常微分方程边值问题的研究.

这里 $m \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 保证了问题(1) 的格林函数大于 0，但是在格林函数变号的情况下此类问题的研究较少.

注意到：当问题(1) 中 $m = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n} \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \varepsilon\right)$，且 $\varepsilon > 0$ 充分小时，$G_m(0, 0) < 0$，$G_m\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) > 0$，即问题(1) 的格林函数变号. 现在的问题是：当格林函数变号时，二阶 Neumann 问题是否存在正解？基于此，本文将运用 Schauder 不动点定理考察二阶 Neumann 问题

$$\begin{cases} u'' + m^2 u = \lambda g(t) f(u) & t \in [0, 1] \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

正解的存在性，其中 λ 是正参数，$m \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \varepsilon\right)$，$\varepsilon > 0$ 充分小.

记 $G_m(t, s)$ 是问题(2) 对应的齐次问题

$$\begin{cases} u'' + m^2 u = 0 & t \in [0, 1] \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

的格林函数，则

$$G_m(t, s) = \begin{cases} \dfrac{\cos m(1-t) \cdot \cos ms}{m \sin m} & 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1 \\ \dfrac{\cos m(1-s) \cdot \cos mt}{m \sin m} & 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1 \end{cases}$$

令 $G_m(t, s) = G_m^+(t, s) - G_m^-(t, s)$，其中

$$G_m^+(t, s) = \max\{0, G_m(t, s)\} \qquad G_m^-(t, s) = \max\{0, -G_m(t, s)\} \qquad t, s \in [0, 1]$$

本文总假定：

(H1) $f: [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ 为连续函数且 $f(0) > 0$；

(H2) $g: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ 连续且在(0, 1) 的任一子区间内不恒为 0；

(H3) 存在常数 $k > 0$，使得 $\int_0^1 G_m^+(t, s) g(s) \mathrm{d}s \geqslant (1 + k) \int_0^1 G_m^-(t, s) g(s) \mathrm{d}s$，$t \in [0, 1]$.

引理 1 问题(2) 对应的齐次问题的格林函数 $G_m(t, s)$ 在 $(t, s) \in [0, 1] \times [0, 1]$ 上有以下性质：

(i) $G_m(t, s)$ 在 $(t, s) \in [0, 1] \times [0, 1]$ 上变号，如图 1 所示. 在图 1 中 $m \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \varepsilon\right)$，其中 $\varepsilon > 0$ 充分小，“+” 表示 $G_m(t, s) > 0$，“−” 表示 $G_m(t, s) < 0$.

当 (t, s) 属于线段 L_1, L_2, L_3, L_4 时，$G_m(t, s) = 0$；

当 (t, s) 属于 D_1, D_2, D_5, D_6 区域时，$G_m(t, s) < 0$；

当 (t, s) 属于 D_3, D_4 区域时，$G_m(t, s) > 0$.

(ii) $\int_0^1 G_m(t, s) \mathrm{d}s > 0$.

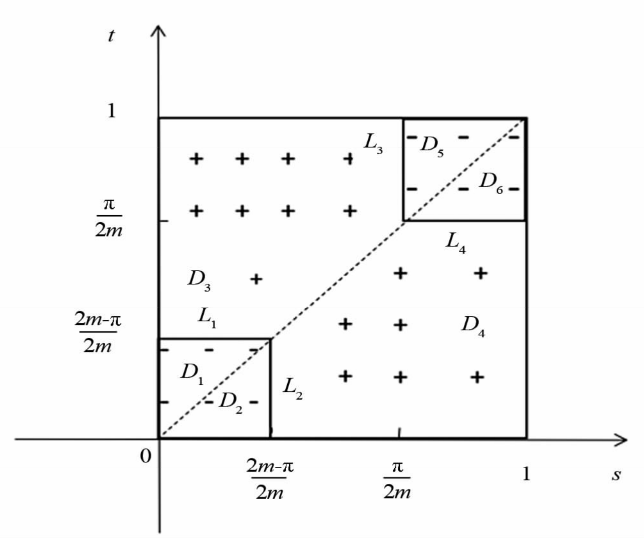

图 1 格林函数 $G_m(t, s)$ 在 $(t, s) \in [0, 1] \times [0, 1]$ 上的符号

证 (i) 分两种情况进行讨论：

情形 1 $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$.

$$G_m(t, s) = \frac{\cos m(1-t) \cdot \cos ms}{m \sin m}$$

因为 $m \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \varepsilon\right)$，其中 $\varepsilon > 0$ 充分小，所以 $m \sin m > 0$. 因此 $G_m(t, s)$ 的符号与 $\cos m(1-t) \cdot \cos ms$ 的符号一致.

(a) $G_m(t, s) = 0$.

当 $\cos m(1-t) = 0$ 或 $\cos ms = 0$ 时，$G_m(t, s) = 0$. 此时 s, t 满足 $0 \leqslant s \leqslant t = \frac{2m - \pi}{2m}$ 或 $\frac{\pi}{2m} = s \leqslant$

$t \leqslant 1$. 即(t, s) 属于图 1 中的线段 L_1 或 L_3.

当 $\cos m(1-t)=0$，$\cos ms=0$ 时，$G_m(t, s)=0$. 但是 s,t 不满足 $s \leqslant t$，故舍去.

(b) $G_m(t, s)<0$.

当 $\cos m(1-t)>0$，$\cos ms<0$，或 $\cos m(1-t)<0$，$\cos ms>0$ 时，$G_m(t, s)<0$. 此时 s,t 满足 $\frac{2m-\pi}{2m}<t \leqslant 1$，$\frac{\pi}{2m}<s \leqslant 1$，或 $0 \leqslant t<\frac{2m-\pi}{2m}$，$0 \leqslant s<\frac{\pi}{2m}$. 即$(t, s)$ 属于图 1 中的 D_1 区域或 D_5 区域.

(c) $G_m(t, s)>0$.

当 $\cos m(1-t)>0$ 且 $\cos ms>0$ 时，$G_m(t, s)>0$. 此时 s,t 满足$\frac{2m-\pi}{2m}<t \leqslant 1$ 且 $0 \leqslant s<\frac{\pi}{2m}$. 即$(t, s)$ 属于图 1 中的 D_3 区域.

当 $\cos m(1-t)<0$ 且 $\cos ms<0$ 时，$G_m(t, s)>0$. 但是 s,t 不满足 $s \leqslant t$，故舍去.

情形 2　$0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1$.

同理可得：

(d) $G_m(t, s)=0$.

当(t, s) 属于图 1 中的线段 L_2 或 L_4 时，$G_m(t, s)=0$.

(e) $G_m(t, s)<0$.

当(t, s) 属于图 1 中的 D_2 区域或 D_6 区域时，$G_m(t, s)<0$.

(f) $G_m(t, s)>0$.

当(t, s) 属于图 1 中的 D_4 区域时，$G_m(t, s)>0$.

(ii)

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 G_m(t, s)\mathrm{d}s = & \int_0^t \frac{\cos m(1-t) \cdot \cos ms}{m\sin m}\mathrm{d}s+\int_t^1 \frac{\cos m(1-s) \cdot \cos mt}{m\sin m}\mathrm{d}s= \\
& \frac{1}{m\sin m}\left(\cos m(1-t)\int_0^t \cos ms\,\mathrm{d}s+\cos mt\int_t^1 \cos m(1-s)\mathrm{d}s\right)= \\
& \frac{1}{m\sin m}\left[\cos m(1-t)\left(\frac{1}{m}\sin ms\Big|_0^t\right)+\cos mt\left(-\frac{1}{m}\sin m(1-s)\Big|_t^1\right)\right]= \\
& \frac{1}{m^2\sin m}[\cos m(1-t) \cdot \sin mt+\cos mt \cdot \sin m(1-t)]= \\
& \frac{1}{m^2\sin m}\sin m=\frac{1}{m^2}>0
\end{aligned}
$$

引理 2[12]　(Schauder 不动点定理) 设 D 是 Banach 空间 X 中的有界闭凸集，$A: D \longrightarrow D$ 全连续，则 A 在 D 中必有不动点，即存在 $x^* \in D$，使得 $Ax^*=x^*$.

定理 1　假设条件(H2) 成立，若 $\tilde{f}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$，且存在常数 $M>0$ 使得 $|\tilde{f}(s)| \leqslant M$，则 $\forall \lambda \in \mathbb{R}$，问题

$$
\begin{cases} u''+m^2u=\lambda g(t)\tilde{f}(u) & t \in [0, 1] \\ u'(0)=u'(1)=0 \end{cases} \tag{3}
$$

至少存在 1 个解 $u_\lambda \in C[0, 1]$.

证　令 $E=C[0, 1]$，则 E 在范数 $\|u\|=\max\limits_{t \in [0, 1]}|u(t)|$ 下构成 Banach 空间. B 是闭凸集，定义为

$$B=\{u \in C[0, 1]: \|u\| \leqslant R\}$$

其中 R 是待定的正常数.

定义算子 $F_\lambda: B \longrightarrow E$ 为

$$(F_\lambda u)(t)=\lambda\int_0^1 G_m(t, s)g(s)\tilde{f}(u(s))\mathrm{d}s$$

问题(3) 有解等价于算子方程 $F_\lambda u=u$ 有不动点. 由于对任意的 $u \in B$，$t \in [0, 1]$，都有

$$\|F_\lambda u\| \leqslant |\lambda| M\max|G_m| \|g\|$$

取 $R=|\lambda| M\max|G_m| \|g\|$，则 $F_\lambda(B) \subset B$. 因为 $G_m(t, s)$ 在$[0, 1]\times[0, 1]$ 上连续且 g 在$[0, 1]$ 上

连续，因此易证 $F_\lambda: B \longrightarrow B$ 是全连续算子.

根据引理 2 可知 F_λ 至少存在 1 个不动点 $u_\lambda \in [0, 1]$. 故问题(3) 至少存在 1 个解 $u_\lambda \in C[0, 1]$.

定理 2 假设条件(H1)－(H3) 成立，则存在 $\lambda_0 > 0$，使得当 $0 < \lambda < \lambda_0$ 时，问题(2) 至少存在 1 个正解.

证 固定一个足够大的 M，定义函数为 $h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 为

$$h(s) = \begin{cases} f(0) & s \leqslant 0 \\ f(s) & 0 < s \leqslant M \\ f(M) & s > M \end{cases}$$

由定理 1 可知，对任意的 $\lambda \in \mathbb{R}$，问题

$$\begin{cases} u'' + m^2 u = \lambda g(t) h(u) & t \in [0, 1] \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

至少存在 1 个解 $u_\lambda \in C[0, 1]$.

固定 $\gamma \in \left(0, \dfrac{k}{2+k}\right)$，$k > 0$，由 h 的连续性可知，存在 $\delta \in (0, M)$ 使得

$$|s| < \delta$$
$$h(0) - \gamma h(0) < h(s) < h(0) + \gamma h(0)$$

因为

$$u_\lambda(t) = \lambda \int_0^1 G_m(t, s) g(s) h(u_\lambda(s)) \mathrm{d}s$$

从而存在 $\lambda_0 > 0$，使得

$$\| u_\lambda \| < \delta \qquad \lambda \in (0, \lambda_0)$$

因此

$$\begin{aligned} u_\lambda(t) = & \lambda \int_0^1 G_m(t, s) g(s) h(u_\lambda(s)) \mathrm{d}s = \\ & \lambda \left(\int_0^1 G_m^+(t, s) g(s) h(u_\lambda(s)) \mathrm{d}s - \int_0^1 G_m^-(t, s) g(s) h(u_\lambda(s)) \mathrm{d}s \right) > \\ & \lambda \left[\int_0^1 G_m^+(t, s) g(s)(h(0) - \gamma h(0)) \mathrm{d}s - \int_0^1 G_m^-(t, s) g(s)(h(0) + \gamma h(0)) \mathrm{d}s \right] = \\ & \lambda h(0)(1-\gamma) \int_0^1 \left(G_m^+(t, s) g(s) - \frac{1+\gamma}{1-\gamma} G_m^-(t, s) g(s) \right) \mathrm{d}s = \\ & \lambda h(0)(1-\gamma) \int_0^1 (G_m^+(t, s) g(s) - (1+k) G_m^-(t, s) g(s)) \mathrm{d}s + \\ & \lambda h(0)(1-\gamma) \int_0^1 \left((1+k) G_m^-(t, s) g(s) - \frac{1+\gamma}{1-\gamma} G_m^-(t, s) g(s) \right) \mathrm{d}s > \\ & \lambda h(0)(1-\gamma) \int_0^1 \left[G_m^-(t, s) g(s) \left((1+k) - \frac{1+\gamma}{1-\gamma} \right) \right] \mathrm{d}s \end{aligned} \tag{4}$$

因为 $\gamma \in \left(0, \dfrac{k}{2+k}\right)$，从而(4) 式右端非负，因此问题(2) 存在解 $u_\lambda \in C[0, 1]$，$t \in [0, 1]$.

例 1 考虑二阶 Neumann 边值问题

$$\begin{cases} u'' + m^2 u = \lambda(u+1) & t \in [0, 1] \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

正解的存在性，其中 λ 是正参数，$m \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2} + \varepsilon\right)$，$\varepsilon > 0$ 充分小.

这里 $f(u) = u + 1$，$g(t) = 1$，因此条件(H1)，(H2) 成立. 由引理 1 知 $\int_0^1 G_m(t, s) \mathrm{d}s > 0$，故存在常数 $k > 0$ 使得条件(H3) 成立.

因此由定理 2 可知，存在 $\lambda_0 = m^2 > 0$，使得当 $0 < \lambda < \lambda_0 = m^2$ 时，问题(5) 有唯一的正解 $u = \dfrac{\lambda}{m^2 - \lambda}$.

参考文献：

[1] JIANG D Q，LIU H Z. Existence of Positive Solutions to Second Order Neumann Boundary Value Problems [J]. Journal of Mathematical Research and Exposition，2000，20(3)：360-364.

[2] SUN J P，LI W T，CHENG S S. Three Positive Solutions for Second-Order Neumann Boundary Value Problems [J]. Applied Mathematics Letters，2004，17(9)：1079-1084.

[3] CHEN X P，LI R G. Existence of Multiple Positive Solutions to Singular Second Order Neumann Boundary Value Problems [J]. Ann Differential Equations，2010，26(2)：136-143.

[4] 陈瑞鹏，马如云，闫东明. 二阶常微分方程 Neumann 边值问题正解的全局分歧 [J]. 应用数学学报，2012，35(3)：515-528.

[5] ZHANG Y W，LI H X. Positive Solutions of a Second-Order Neumann Boundary Value Problem with a Parameter [J]. Bulletin of the Australian Mathematical Society，2012，86(2)：244-253.

[6] 马如云，陈瑞鹏，李杰梅. 非线性 Neumann 问题正解的存在性 [J]. 数学学报，2013，56(3)：289-300.

[7] WANG F，ZHANG F. Existence of Positive Solutions of Neumann Boundary Value Problem Via a Cone Compression-Expansion Fixed Point Theorem of Functional Type[J]. Journal of Applied Mathematics Computing，2011，35(2)：341-349.

[8] BOSCAGGIN A，GARRIONE M. Positive Solutions to Indefinite Neumann Problems When the Weight Has Positive Average [J]. Discrete Contin Dyn Syst，2016，36(10)：5231-5244.

[9] CIANCIARUSO F，INFANTE G，PIETRAMALA P. Multiple Positive Radial Solutions for Neumann Elliptic Systems With Gradient Dependence [J]. Math Methods Appl Sci，2018，41(16)：6358-6367.

[10] LEI C Y. Existence and Multiplicity of Positive Solutions for Neumann Problems Involving Singularity and Critical Growth [J]. J Math Anal Appl，2018，459(2)：959-979.

[11] 王守财，赵仕海，熊宗洪，等. 一类带 Neumann 边界条件的 Kirchhoff 型方程解的多重性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2019，44(4)：11-15.

[12] 郭大钧，孙经先，刘兆理. 非线性常微分方程泛函方法 [M]. 2 版. 济南：山东科学技术出版社，2005：90.

Existence of Positive Solutions for a Class of Second Order Neumann Problem with Sign-Changing Green′s Function

LI Zhao-qian

School of Mathematics and Statistics，Northwest Normal University，Lanzhou 730070，China

Abstract：In this paper，a class of second-order nonlinear Neumann problems has been studied with sign-changing Green′s function

$$\begin{cases} u'' + m^2 u = \lambda g(t) f(u) & t \in [0,\ 1] \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

Where λ is a positive parameter，$m \in \left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2} + \varepsilon\right)$ with $\varepsilon > 0$ small，g：$[0,\ 1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ is a continuous function，f：$[0,\ \infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ is a continuous function and $f(0) > 0$. by means of the Schauder fixed point theorem，We obtain the existence of positive solutions.

Key words：Neumann problem；Green′s function；positive solutions；Existence

责任编辑　廖　坤