第 46 卷 第 1 期 西 南 师 范 大 学 学 报(自然科学版) 2021 年 1 月
Vol. 46 No. 1 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Jan. 2021

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2021.01.021

一类超临界增长的 Schrödinger-Poisson 系统正解存在性①

何鹏飞[1,2], 索洪敏[3]

1. 贵州师范大学 数学科学学院,贵阳 550025;2. 贵州财经大学 数学与统计学院,贵阳 550025;
3. 贵州民族大学 数据科学与信息工程学院,贵阳 550025

摘要: 利用山路引理和变分法研究了一类超临界增长的 Schrödinger-Poisson 系统正解存在性结果.

关 键 词: Schrödinger-Poisson 系统;山路引理;变分法

中图分类号:O177.91 **文献标志码:A** **文章编号:** 1000-5471(2021)01-0144-04

考虑如下一类超临界增长的 Schrödinger-Poisson 系统

$$\begin{cases} -\Delta u+\phi u=u^{5+r^{\alpha}} & \text{in } B \\ -\Delta \phi=u^{2} & \text{in } B \\ u=\phi=0 & \text{on } \partial B \end{cases} \tag{1}$$

其中 $B \subset \mathbb{R}^3$ 是一个光滑单位球,$0<\alpha<1$,$r=|x|$.

由 Lax-Milgram 定理知,对每一个 $u \in H_{0,\mathrm{rad}}^{1}(B)$,存在 ϕ_u 使得 $-\Delta\phi_u=|u|^2$. 故系统(1) 的能量泛函为

$$I(u)=\frac{1}{2}\|u\|^{2}+\frac{1}{4}\int_{B}\phi_{u}|u|^{2}\mathrm{d}x-\int_{B}\frac{1}{6+r^{\alpha}}|u|^{6+r^{\alpha}}\mathrm{d}x$$

其中 $H_{0,\mathrm{rad}}^{1}(B)$ 是径向函数的一阶 Sobolev 空间,其范数定义为:$\|u\|^{2}=\int_{B}|\nabla u|^{2}\mathrm{d}x$.

近年来,很多学者研究了 Schrödinger-Poisson 系统,其中许多文献研究了其正解的存在性、唯一性和多重性问题[1-6]. 文献[7-11]研究了带有临界指数、分数阶和位势的Schrödinger-Poisson系统的正解,文献[12] 讨论了超临界 Sobolev 不等式及相关椭圆方程,在文献[7-12] 研究的基础上,本文考虑系统(1) 正解存在性问题,主要结果为:

定理 1 若 $0<\alpha<1$,$r=|x|$,则存在 $\lambda_{*}>0$ 使得对于任意的 $\lambda\in(0,\lambda_{*})$,系统(1) 至少有一个正解.

在证明定理 1 之前,需要证明如下引理:

引理 1 若存在 $\rho>0$,$\beta>0$,则 $I(u)$ 满足山路结构,即 $u\in S_{\rho}$ 时 $I(u)>\beta$,$\|u\|>\rho$ 时 $I(u)<0$,其中 S_{ρ} 表示球面.

证 对任意 $u\in H_{0,\mathrm{rad}}^{1}(B)$,$u\neq 0$,有

$$\lim_{t\to 0^{+}}\frac{I(tu)}{t^{2}}=\frac{1}{2}\|u\|^{2}>0$$

① 收稿日期:2019-09-23
基金项目:国家自然科学基金项目(11661021).
作者简介:何鹏飞,博士研究生,讲师,主要从事微分方程等的研究.
通信作者:索洪敏,教授.

因此存在 $\rho > 0$ 适当小，使得当 $\| u \| = \rho$ 时，有 $I(u) > \beta$. 此外，

$$I(tu) = \frac{t^2}{2} \| u \|^2 + \frac{t^4}{4}\int_B \phi_u \, | u |^2 \mathrm{d}x - \int_B \frac{t^{6+r^\alpha}}{6+r^\alpha} | u |^{6+r^\alpha} \mathrm{d}x \to -\infty$$

当 $t \to \infty$ 时存在 $e \in H^1_{0,\mathrm{rad}}(B)$，当 $\| e \| > \rho$ 时 $I(e) < 0$. 证毕

引理 2　假设 $c < \frac{1}{3}S^{\frac{3}{2}}$，则 I 满足 $(PS)_c$ 条件.

证　设 $\{u_n\} \subset H^1_{0,\mathrm{rad}}(B)$ 满足

$$I_\lambda(u_n) \to c, \ I'_\lambda(u_n) \to 0 \tag{2}$$

由(2) 式可知

$$\begin{aligned}
&1 + c + o(1) \| u_n \| \geqslant I(u_n) - \frac{1}{4}\langle I'(u_n), u_n \rangle \geqslant \\
&\frac{1}{4} \| u_n \|^2 + \frac{1}{4}\int_B | u_n |^{6+r^\alpha} \mathrm{d}x - \int_B \frac{1}{6+r^\alpha} | u_n |^{6+r^\alpha} \mathrm{d}x \geqslant \\
&\frac{1}{4} \| u_n \|^2 - \frac{1}{12}\int_B | u_n |^{6+r^\alpha} \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

从而 $\{u_n\}$ 在 $H^1_{0,\mathrm{rad}}(B)$ 有界. 因此存在其子列(仍记为 $\{u_n\}$)，根据集中紧性原理[11] 有函数 $u \in H^1_{0,\mathrm{rad}}(B)$ 使得

$$\int_B | Du_n |^2 \mathrm{d}x \to \mathrm{d}\mu \geqslant \int_B | Du |^2 \mathrm{d}x + \sum\nolimits_{j\in J} \mu_j \delta_{x_j}, \ \int_B | u_n |^6 \mathrm{d}x \to \mathrm{d}\eta = \int_B | u |^6 \mathrm{d}x + \sum\nolimits_{j\in J} \eta_j \delta_{x_j}$$

其中 J 至多是一个可数集，δ_{x_j} 表示 x_j 上的一个 Dirac 质量，现构造一个关于 x_j 的一个光滑切断函数 $\varphi_{\varepsilon,j}$ 使得 $0 \leqslant \varphi_{\varepsilon,j}(x) \leqslant 1$，在 $B\left(x_j, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ 中有 $\varphi_{\varepsilon,j}(x) = 1$，在 $\mathbb{R}^3 \backslash B(x_j, \varepsilon)$ 中有 $\varphi_{\varepsilon,j}(x) = 0$，$| \nabla \varphi_{\varepsilon,j}(x) | \leqslant \frac{4}{\varepsilon}$ 成立，对任意小的 $\varepsilon > 0$. 首先，我们断言：当 $\varepsilon \to 0$ 时，

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_B (| u_n |^{6+r^\alpha} \varphi_{\varepsilon,j} - | u_n |^6 \varphi_{\varepsilon,j}) \mathrm{d}x = &\int_B \varphi_{\varepsilon,j} (| u_n |^{6+r^\alpha} - | u_n |^6) \mathrm{d}x = \\
&\int_B | u_n^6(x) | [| u_n^{r^\alpha}(x) | - 1] \varphi_{\varepsilon,j} \mathrm{d}x = \\
&\int_{|x|\leqslant\varepsilon} | u_n^6(x) | [| u_n^{r^\alpha}(x) | - 1] \mathrm{d}x = \\
&c\int_0^\varepsilon | u_n^6(r) | [| u_n^{r^\alpha}(r) | - 1] r^2 \mathrm{d}r \leqslant \\
&c\int_0^\varepsilon \frac{M^6}{r} [| u_n(r) |^{r^\alpha} - 1] \mathrm{d}r = \\
&c\int_0^\varepsilon \frac{1}{r} [e^{r^\alpha \ln | u_n(r) |} - 1] \mathrm{d}r \leqslant \\
&c\int_0^\varepsilon \frac{1}{r} [e^{r^\alpha (\ln M - \frac{1}{2}\ln r)} - 1] \mathrm{d}r = \\
&c\int_0^\varepsilon \frac{1}{r} \left(r^\alpha \ln M - \frac{1}{2} r^\alpha \ln r\right) \mathrm{d}r = \\
&c\int_0^\varepsilon \left(\frac{\ln M}{r^{1-\alpha}} - \frac{1}{2}\frac{\ln r}{r^{1-\alpha}}\right) \mathrm{d}r \leqslant \\
&c\int_0^\varepsilon \frac{\mathrm{d}r}{r^{1-\alpha}} + c\int_0^\varepsilon \frac{\ln r}{r^{1-\alpha}} \mathrm{d}r = \\
&c\int_0^\varepsilon \frac{\mathrm{d}r}{r^{1-\alpha}} + c \ln \varepsilon \int_0^\varepsilon r^{\alpha-1} \mathrm{d}r = \\
&cr^\alpha \Big|_0^\varepsilon + c \ln \varepsilon r^\alpha \Big|_0^\varepsilon = \\
&c\varepsilon^\alpha + c\,\varepsilon^\alpha \ln \varepsilon \to 0
\end{aligned}$$

同理有 $\lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{n\to\infty} \int_B \phi_{u_n} | u_n |^2 \varphi_{\varepsilon,j} \mathrm{d}x = 0$ 成立.

事实上:

$$0 = \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\langle I'(u_n), u_n\varphi_{\varepsilon,j}\rangle =$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\left\{\int_B \nabla u_n \nabla(u_n, u_n\varphi_{\varepsilon,j})\mathrm{d}x - \int_B |u_n|^6\varphi_{\varepsilon,j}\mathrm{d}x - \right.$$
$$\left.\int_B [|u_n|^{6+r^\alpha}\varphi_{\varepsilon,j} - |u_n|^6\varphi_{\varepsilon,j}]\mathrm{d}x + \int_B \phi_{u_n}|u_n|^2\varphi_{\varepsilon,j}\mathrm{d}x\right\} =$$
$$\mu_j - \eta_j$$

又因为 $\mu_j \geqslant S\eta_j^{\frac{1}{3}}$,得 $\mu_j \geqslant S^{\frac{3}{2}}$.

所以

$$c = \lim_{n\to\infty}[I(u_n) - \frac{1}{6}\langle I'(u_n), u_n\rangle] \geqslant$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\|u_n\|^2 + \frac{1}{6}\int_B |u_n|^{6+r^\alpha}\mathrm{d}x - \int_B \frac{1}{6+r^\alpha}|u_n|^{6+r^\alpha}\mathrm{d}x \geqslant$$
$$\frac{1}{3}\|u\|^2 + \frac{1}{3}\mu_j \geqslant$$
$$\frac{1}{3}S^{\frac{3}{2}}$$

此与引理假设 $c < \frac{1}{3}S^{\frac{3}{2}}$ 矛盾,故 $J = \varnothing$,所以 I 满足$(PS)_c$ 条件. 证毕.

考虑如下函数

$$v_\varepsilon = \frac{[3\varepsilon^2]^{\frac{1}{4}}}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{\frac{1}{2}}}$$

其中 ε 是一个正常数. 我们知道 v_ε 是问题 $-\Delta u = u^5$ 在 $\mathbb{R}^3$ 的一个正解,且有$\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla v_\varepsilon|^2\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3}|v_\varepsilon|^6\mathrm{d}x = S^{\frac{3}{2}}$. 令 η 是一个光滑切断函数 $\eta \in C_0^\infty(B)$ 使得 $0 \leqslant \eta(x) \leqslant 1$. 在 $x = 0$ 附近 $\eta(x) = 1$ 是径向对称的. 设 $|u_\varepsilon(x)| = v_\varepsilon(x)\eta(x)$. 根据文献[5]有

$$\|u_\varepsilon\|^2 \leqslant S^{\frac{3}{2}} + O(\varepsilon),\ \int_B |u_\varepsilon|^6\mathrm{d}x \geqslant S^{\frac{3}{2}} + O(\varepsilon)$$

引理 3 假设 $0 < \alpha < 1$,则有$\sup_{t\geqslant 0} I(tu_\varepsilon) < \frac{1}{3}S^{\frac{3}{2}}$ 成立.

证 由文献[12]可知,$\{u_\varepsilon\} \subset H^1_{0,\mathrm{rad}}(B)$ 满足

$$\int_B |u_\varepsilon|^{6+r^\alpha}\mathrm{d}x \geqslant \int_B |u_\varepsilon|^6\mathrm{d}x + c_1\varepsilon^2|\ln\varepsilon| + c_2\varepsilon,\ c_1, c_2 > 0$$

注意到$\int_B \phi_{u_\varepsilon}|u_\varepsilon|^2\mathrm{d}x \leqslant c\varepsilon$,由于当 $t \to 0^+$ 时,$I(tu_\varepsilon) \to 0^+$;当 $t \to +\infty$ 时,$I(tu_\varepsilon) \to -\infty$. 从而,当 ε 充分小时有

$$\sup_{t\geqslant 0} I(tu_\varepsilon) \leqslant \sup_{t\geqslant 0}\left(\frac{t^2}{2}\|u\|^2 - \frac{t^6}{6}\int_B |u_\varepsilon|^6\mathrm{d}x\right) - c_1\varepsilon^\alpha|\ln\varepsilon| - c_2\varepsilon + c_3\varepsilon \leqslant$$
$$\frac{1}{3}S^{\frac{3}{2}} + c\varepsilon - c_1\varepsilon^\alpha|\ln\varepsilon| \leqslant$$
$$\frac{1}{3}S^{\frac{3}{2}}$$

定理 1 的证明 由引理 1 知 I 满足山路结构,由引理 2,3 知 I 满足$(PS)_c$ 条件. 应用山路引理[6],存在子列$\{u_n\} \subset H^1_{0,\mathrm{rad}}(B)$ 使得当 $n \to \infty$ 时,$I'(u_n) \to 0$ 且 $I(u_n) \to c > 0$,其中

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t))$$
$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], H^1_{0,\mathrm{rad}}(B)): \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}$$

由引理 2,3 知,$\{u_n\}$ 有一个收敛子列(仍记为$\{u_n\}$),且存在 $u_* \in H^1_{0,\mathrm{rad}}(B)$ 使得 $u_n \to u_*$. 故得到系统(1)

的一个函数对解(u_*，ϕ_{u_*})满足

$$I(u_*)=\lim_{n\to\infty}I(u_n)=c>0$$

因此，得到 $u_*\not\equiv 0$ 且 $u_*\in B$，所以利用强极大值原理得 $u_*>0$，故(u_*，ϕ_{u_*})是系统(1)的一对函数解.证毕.

参考文献：

[1] ALMUAALEMI B，CHEN H B，KHOUTIR S. Existence of Nontrivial Solutions for Schrödinger-Poisson Systems with Critical Exponent on Bounded Domains [J]. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society，2019，42(4)：1675-1686.

[2] KHOUTIR S. Infinitely many High Energy Radial Solutions for a Class of Nonlinear Schrödinger-Poisson Systems in $\mathbb{R}^3$ [J]. Applied Mathematics Letters，2019，90：139-145.

[3] MURCIA E G，SICILIANO G. Least Energy Radial Sign-Changing Solution for the Schrödinger-Poisson System in $\mathbb{R}^3$ under an Asymptotically Cubic Nonlinearity [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2019，474(1)：544-571.

[4] SUN J J，MA S W. Ground State Solutions for some Schrödinger-Poisson Systems with Periodic Potentials [J]. Journal of Differential Equations，2016，260(3)：2119-2149.

[5] BREZIS H，NIRENBERG L. Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponents [J]. Communications on Pure and Applied Mathematics，1983，36(4)：437-477.

[6] AMBROSETTI A，RABINOWITZ P H. Dual Variational Methods in Critical Point Theory and Applications [J]. Journal of Functional Analysis，1973，14(4)：349-381.

[7] 杜 瑶，唐春雷. 一类临界 Schrödinger 方程的正基态径向解 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2019，44(6)：22-26.

[8] 李贵东，唐春雷. 带有临界指数的 Schrödinger 方程正基态解的存在性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2018，40(6)：92-96.

[9] 张 琦. 带有位势的 Schrödinger-Poisson 系统解的存在性与多解性 [J]. 数学物理学报，2016，36(1)：49-64.

[10] 张 维，唐春雷. 一类次线性分数阶 Schrödinger 方程的无穷多解 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2018，40(6)：78-83.

[11] GAO F S，DA SILVA E D，YANG M B，et al. Existence of Solutions for Critical Choquard Equations via the Concentration-Compactness Method [J]. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh：Section A Mathematics，2020，150(2)：921-954.

[12] DOÓJ M，RUF B，UBILLA P. On Supercritical Sobolev Type Inequalities and Related Elliptic Equations [J]. Calculus of Variations and Partial Differential Equations，2016，55(4)：83.

Existence of Positive Solutions for a Class of Schrödinger-Poisson Systems with Supercritical Growth

HE Peng-fei[1,2]， SUO Hong-min[2]

1. School of Mathematics Science，Guizhou Normal University，Guiyang 550025，China；

2. School of Mathematics and Statistics，Guizhou University of Finance and Economics，Guiyang 550025，China；

3. School of Data Science and Information Engineering，Guizhou Minzu University，Guiyang 550025，China

Abstract：By using mountain pass theorem and variational method，the existence of positive solutions for a class of Schrödinger-Poisson systems with supercritical growth has been proved.

Key words：Schrödinger-Poisson system；mountain pass theorem；variational method

责任编辑 张 枸