第 46 卷 第 1 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2021 年 1 月
Vol. 46 No. 1　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Jan. 2021

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2021.01.025

一类常微分方程和偏微分方程的耦合系统的边界控制[①]

徐铃铃，　白艺昕，　谢成康

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 考虑一类常微分方程组和偏微分方程组的耦合系统的稳定性. 通过 Backstepping 的方法，设计出系统的控制律，并证明了闭环系统的指数稳定性.

关 键 词： 边界控制；耦合系统；稳定性

中图分类号： O231.2　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1000－5471(2021)01－0166－08

关于常微分方程和偏微分方程的耦合或级联系统的边界控制问题已经有了大量的研究成果，而且具有实用价值[1-7]，以往的研究中有很多是单向能量传递的级联系统[8-11]. 近年来，在研究耦合的 ODE-PDE 边界控制问题中，也得到了在不同的边界条件下的系统控制率[4-7,12]，本文在以上研究的基础上，考虑如下控制系统：

$$\dot{X}(t) = \boldsymbol{A}X(t) + \boldsymbol{B}U(0, t) \tag{1a}$$

$$U_t(x, t) = U_{xx}(x, t) + \boldsymbol{\Lambda}U(x, t),\ 0 < x < 1 \tag{1b}$$

$$U_x(0, t) = \alpha(U(0, t) - \boldsymbol{F}X(t)) \tag{1c}$$

$$U(1, t) = C(t) \tag{1d}$$

其中：$X(t) \in \mathbb{R}^n$ 表示流体的温度、湿度、密度等物理参数；实数 α 是傅里叶常数，由导体的材料决定；$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$，$\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$，$\boldsymbol{\Lambda} \in \mathbb{R}^{m\times m}$，$\boldsymbol{F} \in \mathbb{R}^{m\times n}$，$C(t) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 是控制输入；$U(x, t) \in \mathbb{R}^n$ 为状态变量；$\boldsymbol{\Lambda}U(x, t)$ 是热源强度.

1　控制器设计

本文引入一个变换 $(X, U) \longmapsto (X, W)$：

$$X(t) = X(t) \tag{2a}$$

$$W(x, t) = U(x, t) - \int_0^x \Psi(x, y)U(y, t)\mathrm{d}y - \Phi(x)X(t) \tag{2b}$$

这里的核函数 $\Psi(x, y) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ 和矩阵函数 $\Phi(x) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 都是待定的. 该变换将系统(1)转换为一个指数稳定的目标系统，从而设计出控制律，那么闭环系统的稳定性就可以通过该变换及其逆变换建立起来. 选定的目标系统如下

① 收稿日期：2020－07－09
基金项目：国家自然科学基金项目(11671326).
作者简介：徐铃铃，硕士研究生，主要从事线性控制系统的研究.
通信作者：谢成康，教授.

$$\dot{X}(t) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{BK})X(t) + \boldsymbol{B}W(0, t) \tag{3a}$$

$$W_t(x, t) = W_{xx}(x, t), \ 0 < x < 1 \tag{3b}$$

$$W_x(0, t) = \boldsymbol{O} \tag{3c}$$

$$W(1, t) = \boldsymbol{O} \tag{3d}$$

其中 $\boldsymbol{O}$ 表示零矩阵或零向量，$\boldsymbol{K} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 使得 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{BK}$ 是 Hurwitz 矩阵. 为了满足(3d) 式，我们取控制律为

$$U(1, t) = C(t) = \int_0^1 \Psi(1, y)U(y, t)\mathrm{d}y + \Phi(1)X(t) \tag{4}$$

对方程(2b) 两边关于 x 求导数，可得

$$W_x(x, t) = U_x(x, t) - \Psi(x, x)U(x, t) - \int_0^x \Psi_x(x, y)U(y, t)\mathrm{d}y - \Phi'(x)X(t) \tag{5}$$

$$\begin{aligned} W_{xx}(x, t) = & U_{xx}(x, t) - \Psi(x, x)U_x(x, t) - (\Psi'(x, x) + \Psi_x(x, x))U(x, t) - \\ & \int_0^x \Psi_{xx}(x, y)U(y, t)\mathrm{d}y - \Phi''(x)X(t) \end{aligned} \tag{6}$$

对方程(2b) 两边关于 t 求导数，可得

$$\begin{aligned} W_t(x, t) = & U_{xx}(x, t) + (\boldsymbol{\Lambda} + \Psi_y(x, x))U(x, t) - \Psi(x, x)U_x(x, t) + \\ & \Psi(x, 0)U_y(0, t) - (\Psi_y(x, 0) + \Phi(x)\boldsymbol{B})U(0, t) - \\ & \int_0^x (\Psi_{yy}(x, y) + \Psi(x, y)\boldsymbol{\Lambda})U(y, t)\mathrm{d}y - \Phi(x)\boldsymbol{A}X(t) \end{aligned} \tag{7}$$

由方程(3b) 可得

$$\begin{aligned} W_t(x, t) - W_{xx}(x, t) = & (2\Psi'(x, x) + \boldsymbol{\Lambda})U(x, t) - (\Psi_y(x, 0) + \Phi(x)\boldsymbol{B} - \alpha\Psi(x, 0))U(0, t) + \\ & \int_0^x (\Psi_{xx}(x, y) - \Psi_{yy}(x, y) - \Psi(x, y)\boldsymbol{\Lambda})U(y, t)\mathrm{d}y + \\ & (\Phi''(x) - \Phi(x)\boldsymbol{A} - \alpha\Psi(x, 0)\boldsymbol{F})X(t) \end{aligned}$$

取核函数 $\Psi(x, y)$ 和矩阵函数 $\Phi(x)$ 满足如下方程

$$\Psi_{xx}(x, y) - \Psi_{yy}(x, y) - \Psi(x, y)\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{O} \tag{8a}$$

$$2\Psi'(x, x) + \boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{O} \tag{8b}$$

$$\Psi_y(x, 0) + \Phi(x)\boldsymbol{B} - \alpha\Psi(x, 0) = \boldsymbol{O} \tag{8c}$$

$$\Phi''(x) - \Phi(x)\boldsymbol{A} - \alpha\Psi(x, 0)\boldsymbol{F} = \boldsymbol{O} \tag{8d}$$

通过方程(1c) 以及方程(5)，可得

$$\begin{aligned} & W_x(0, t) = U_x(0, t) - \Psi(0, 0)U(0, t) - \Phi'(0)X(t) = \\ & (\alpha - \Psi(0, 0))U(0, t) - (\boldsymbol{F} + \Phi'(0))X(t) \end{aligned} \tag{9}$$

取

$$\Psi(0, 0) = \alpha\boldsymbol{I} \tag{10}$$

$$\Phi'(0) = -\boldsymbol{F} \tag{11}$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 表示单位矩阵. 这样就可以满足边界条件(3c) 式. 此外，状态 $X(t)$ 满足方程(1a) 和(3a)，即

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{K}X(t) + W(0, t) - U(0, t)) = \boldsymbol{O} \tag{12}$$

从方程(2b) 中可以发现，当 $x = 0$ 时

$$W(0, t) = U(0, t) - \Phi(0)X(t) \tag{13}$$

比较方程(12) 和(13)，我们得到矩阵函数 $\Phi(x)$ 的另一个边界条件为

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{K} - \Phi(0))X(t) = \boldsymbol{O} \tag{14}$$

可取如下条件成立

$$\Phi(0) = \boldsymbol{K} \tag{15}$$

接下来我们对核函数 $\Psi(x, y)$ 以及矩阵函数 $\Phi(x)$ 进行求解，引入变量

$$x = \frac{\xi + \eta}{2}, \ y = \frac{\xi - \eta}{2} \tag{16}$$

记为

$$G(\xi,\ \eta)=\Psi\left(\frac{\xi+\eta}{2},\ \frac{\xi-\eta}{2}\right) \tag{17}$$

代入边界条件，将系统(1)转化为

$$G_{\xi\eta}(\xi,\ \eta)=\frac{1}{4}G(\xi,\ \eta)\boldsymbol{\Lambda} \tag{18a}$$

$$G_{\xi}(\xi,\ 0)=-\frac{1}{4}\boldsymbol{\Lambda} \tag{18b}$$

$$G_{\xi}(\xi,\ \xi)-G_{\eta}(\xi,\ \xi)=\alpha G(\xi,\ \xi)-\Phi(\xi)\boldsymbol{B} \tag{18c}$$

$$\Phi''(\xi)-\Phi(\xi)\boldsymbol{A}-\alpha G(\xi,\ \xi)\boldsymbol{F}=\boldsymbol{O} \tag{18d}$$

$$G(0,\ 0)=\alpha\boldsymbol{I} \tag{18e}$$

$$\Phi(0)=\boldsymbol{K} \tag{18f}$$

$$\Phi'(0)=-\boldsymbol{F} \tag{18g}$$

将方程(18a)两边关于 η 从 0 到 η 积分，由方程(18b)得到

$$G_{\xi}(\xi,\ \eta)=-\frac{1}{4}\boldsymbol{\Lambda}+\frac{1}{4}\int_{0}^{\eta}G(\xi,\ \tau)\mathrm{d}\tau\boldsymbol{\Lambda} \tag{19}$$

再将方程(19)两边关于 ξ 从 η 到 ξ 积分，得到

$$G(\xi,\ \eta)=G(\eta,\ \eta)-\frac{1}{4}(\xi-\eta)\boldsymbol{\Lambda}+\frac{1}{4}\int_{\eta}^{\xi}\int_{0}^{\eta}G(s,\ \tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\boldsymbol{\Lambda} \tag{20}$$

在方程(20)中，仍然需要计算 $G(\eta,\ \eta)$ 这一项. 在方程(19)中，令 $\eta=\xi$，有

$$G_{\xi}(\xi,\ \xi)=-\frac{1}{4}\boldsymbol{\Lambda}+\frac{1}{4}\int_{0}^{\xi}G(\xi,\ \tau)\mathrm{d}\tau\boldsymbol{\Lambda} \tag{21}$$

由方程(18c)有

$$G_{\eta}(\xi,\ \xi)=G_{\xi}(\xi,\ \xi)-\alpha G(\xi,\ \xi)+\Phi(\xi)\boldsymbol{B} \tag{22}$$

因此，由方程(21)和(22)有

$$G'(\xi,\ \xi)=-\frac{1}{2}\boldsymbol{\Lambda}-\alpha G(\xi,\ \xi)+\Phi(\xi)\boldsymbol{B}+\frac{1}{2}\int_{0}^{\xi}G(\xi,\ \tau)\mathrm{d}\tau\boldsymbol{\Lambda} \tag{23}$$

在方程(23)中将其最后两项看作已知函数，这是一个关于 $G(\xi,\ \xi)$ 的一阶线性常微分方程，结合方程(18e)有

$$G(\xi,\ \xi)=-\frac{1}{2\alpha}\boldsymbol{\Lambda}+\left(\frac{1}{2\alpha}\boldsymbol{\Lambda}+\alpha\right)\mathrm{e}^{-\alpha\xi}+\int_{0}^{\xi}\Phi(s)\mathrm{e}^{\alpha(s-\xi)}\mathrm{d}s\boldsymbol{B}+\frac{1}{2}\int_{0}^{\xi}\int_{0}^{s}G(s,\ \tau)\mathrm{e}^{\alpha(s-\xi)}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\boldsymbol{\Lambda} \tag{24}$$

将方程(24)代入方程(20)，可以得到 $G(\xi,\ \eta)$ 的积分形式，如下

$$\begin{aligned}G(\xi,\ \eta)=&-\frac{1}{2\alpha}\boldsymbol{\Lambda}+\left(\frac{1}{2\alpha}\boldsymbol{\Lambda}+\alpha\right)\mathrm{e}^{-\alpha\eta}+\frac{1}{4}(\eta-\xi)\boldsymbol{\Lambda}+\\&\int_{0}^{\eta}\Phi(s)\mathrm{e}^{\alpha(s-\eta)}\mathrm{d}s\boldsymbol{B}+\frac{1}{2}\int_{0}^{\eta}\int_{0}^{s}G(s,\ \tau)\mathrm{e}^{\alpha(s-\eta)}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\boldsymbol{\Lambda}+\\&\frac{1}{4}\int_{\eta}^{\xi}\int_{0}^{\eta}G(s,\ \tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\boldsymbol{\Lambda}\end{aligned} \tag{25}$$

由方程(18d)和(24)可得：

$$\begin{aligned}&\Phi''(\xi)-\Phi(\xi)\boldsymbol{A}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{F}-\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{F}+\alpha^{2}\boldsymbol{F}\right)\mathrm{e}^{-\alpha\xi}-\\&\alpha\int_{0}^{\xi}\Phi(s)\mathrm{e}^{\alpha(s-\xi)}\mathrm{d}s\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}-\frac{\alpha}{2}\int_{0}^{\xi}\int_{0}^{s}G(s,\ \tau)\mathrm{e}^{\alpha(s-\xi)}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{F}=\boldsymbol{O}\end{aligned} \tag{26}$$

方程(26)两边同时乘 $\mathrm{e}^{\alpha\xi}$，得到

$$e^{\alpha\xi}\Phi''(\xi)-e^{\alpha\xi}\Phi(\xi)\boldsymbol{A}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\Lambda F}e^{\alpha\xi}-\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\Lambda F}+\alpha^2\boldsymbol{F}\right)-\alpha\int_0^{\xi}\Phi(s)e^{\alpha s}\mathrm{d}s\boldsymbol{BF}-\frac{\alpha}{2}\int_0^{\xi}\int_0^{s}G(s,\tau)e^{\alpha s}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\boldsymbol{\Lambda F}=\boldsymbol{O} \tag{27}$$

方程(27)两边关于 ξ 求导，得

$$\alpha e^{\alpha\xi}\Phi''(\xi)+e^{\alpha\xi}\Phi'''(\xi)-\alpha e^{\alpha\xi}\Phi(\xi)\boldsymbol{A}-e^{\alpha\xi}\Phi'(\xi)\boldsymbol{A}+\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{\Lambda F}e^{\alpha\xi}-\alpha\Phi(\xi)e^{\alpha\xi}\boldsymbol{BF}-\frac{\alpha}{2}\int_0^{\xi}G(\xi,\tau)e^{\alpha\xi}\mathrm{d}\tau\boldsymbol{\Lambda F}=\boldsymbol{O} \tag{28}$$

因此

$$\Phi'''(\xi)+\alpha\Phi''(\xi)-\Phi'(\xi)\boldsymbol{A}-\alpha\Phi(\xi)(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BF})+\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{\Lambda F}-\frac{\alpha}{2}\int_0^{\xi}G(\xi,\tau)\mathrm{d}\tau\boldsymbol{\Lambda F}=\boldsymbol{O} \tag{29}$$

方程(29)两边关于 ξ 求导，有

$$\Phi''''(\xi)+\alpha\Phi'''(\xi)-\Phi''(\xi)\boldsymbol{A}-\alpha\Phi'(\xi)(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BF})-\frac{\alpha}{2}G(\xi,\xi)\boldsymbol{\Lambda F}=\boldsymbol{O} \tag{30}$$

通过方程(18d)和(30)，可得

$$\Phi''''(\xi)+\alpha\Phi'''(\xi)-\Phi''(\xi)\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\Lambda}+\boldsymbol{A}\right)-\alpha\Phi'(\xi)(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BF})+\frac{1}{2}\Phi(\xi)\boldsymbol{A\Lambda}=\boldsymbol{O} \tag{31}$$

方程(31)中的函数 Φ 不依赖于核函数 Ψ，可以进行求解. 令

$$\Gamma(\xi)=(\Phi(\xi),\Phi'(\xi),\Phi''(\xi),\Phi'''(\xi)) \tag{32}$$

和

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}&-\frac{1}{2}\boldsymbol{A\Lambda}\\ \boldsymbol{I}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}&\alpha(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BF})\\ \boldsymbol{O}&\boldsymbol{I}&\boldsymbol{O}&\frac{1}{2}\boldsymbol{\Lambda}+\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{I}&-\alpha\boldsymbol{I}\end{bmatrix}$$

将方程(31)写成矩阵方程

$$\Gamma'(\xi)=\Gamma(\xi)\boldsymbol{D} \tag{33}$$

常微分方程的边界条件

$$\Gamma(0)=(\Phi(0),\Phi'(0),\Phi''(0),\Phi'''(0)) \tag{34}$$

由方程(18f)和(18g)可以获得边界条件 $\Phi(0)$ 和 $\Phi'(0)$，通过方程(18d),(18e)和(18f)可得

$$\Phi''(0)=\boldsymbol{KA}+\alpha^2\boldsymbol{F} \tag{35}$$

由方程(18e)可得

$$\Phi'''(\xi)=\Phi'(\xi)\boldsymbol{A}+\alpha G'(\xi,\xi)\boldsymbol{F} \tag{36}$$

在方程(23)中，令 $\xi=0$，得

$$G'(0,0)=-\frac{1}{2}\boldsymbol{\Lambda}-\alpha^2\boldsymbol{I}+\boldsymbol{KB} \tag{37}$$

则

$$\Phi'''(0)=-\left(\boldsymbol{FA}+\alpha\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\Lambda}+\alpha^2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{KB}\right)\boldsymbol{F}\right) \tag{38}$$

因此

$$\Gamma(0)=\left(\boldsymbol{K},-\alpha\boldsymbol{F},\alpha^2\boldsymbol{F}+\boldsymbol{KA},-\left(\boldsymbol{FA}+\alpha\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\Lambda}+\alpha^2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{KB}\right)\boldsymbol{F}\right)\right) \tag{39}$$

在边界条件(39)下，矩阵方程(33)的解是

$$\Gamma(\xi)=\Gamma(0)e^{\boldsymbol{D}\xi} \tag{40}$$

令 $\boldsymbol{J}=(\boldsymbol{I},\boldsymbol{O},\boldsymbol{O},\boldsymbol{O})^{\mathrm{T}}$，则

$$\boldsymbol{\Phi}(\xi)=\Gamma(\xi)\boldsymbol{J}=\Gamma(0)\mathrm{e}^{\boldsymbol{D}\xi}\boldsymbol{J} \tag{41}$$

由于函数 Φ 已经确定，从而控制器中 $\Phi(1)$ 也可以得到

$$\Phi(1)=\Gamma(0)\mathrm{e}^{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{J} \tag{42}$$

接下来需要求解核函数 Ψ，为了求解核函数，可将核函数化为积分方程，再利用逐次逼近法求得近似解，其求解过程可参考文献[5]. 最后得到核函数解为

$$\Psi(x,\ y)=\frac{1}{\alpha}\Gamma(0)\mathrm{e}^{\boldsymbol{D}(x-y)}\boldsymbol{M}+\frac{1}{\alpha}\Gamma(0)\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{4^j}\sum_{i=0}^{j-1}\frac{a_{j,\ i}(2y)^{j-i}}{(j-i)!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{D}^n(x-y)^{n+j+i}}{(n+j+i)!}\right)\boldsymbol{M\Lambda}^j-\sum_{j=0}^{\infty}\frac{2y(x^2-y^2)^j}{4^{j+1}j!(j+1)!}\boldsymbol{\Lambda}^{j+1} \tag{43}$$

其中：$a_{j,\ i}=\dfrac{(j-i)(j+i-1)!}{j!i!}$，$i=0,1,2,\cdots,j-2$；$a_{j,\ j-1}=a_{j,\ j-2}$.

2 稳定性

要得到闭环系统(1)的指数稳定性，就需要证明目标系统(3)的稳定性以及变换(2)可逆. 因此，首先证明目标系统(3)的稳定性.

引理 1 对于目标系统(3)，存在 $\alpha>0$，$\beta>0$，使得

$$\|X(t)\|^2+\|W(t)\|_{L^2}^2\leqslant\alpha(\|X(0)\|^2+\|W(0)\|_{L^2}^2)\mathrm{e}^{-\beta t} \tag{44}$$

即目标系统在 L_2 范数意义下指数稳定，其中 $\|\cdot\|$ 表示欧几里得范数，$\|W(t)\|_{L^2}$ 表示 $W(t)$ 的 L_2 范数，即

$$\|W(t)\|_{L^2}=\left(\int_0^1 W(x,\ t)^{\mathrm{T}}W(x,\ t)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

证 选取李雅普诺夫函数

$$V(t)=X(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}X(t)+a\int_0^1 W(x,\ t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}W(x,\ t)\mathrm{d}x \tag{45}$$

这里的矩阵 $\boldsymbol{P}>0$ 是 Lyapunov 方程

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})+(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=-\boldsymbol{I} \tag{46}$$

的解. 矩阵 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}>0$ 是 Lyapunov 方程

$$(-\boldsymbol{D})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{Q}(-\boldsymbol{D})=-\boldsymbol{I} \tag{47}$$

的解. 其中 $\boldsymbol{I}$ 表示 n 阶单位阵，$a>0$ 是需要被确定的参数. 首先证明存在常数 $b>0$，使得下式成立

$$\dot{V}\leqslant V(0)\mathrm{e}^{-bt}$$

对 Lyapunov 函数(45)两边关于 t 求导，由于 W 满足方程组(3)，所以有

$$\dot{V}(t)=\dot{X}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}X(t)+X(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\dot{X}(t)+a\int_0^1(W_t(x,\ t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}W(x,\ t)+W(x,\ t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}W_t(x,\ t))\mathrm{d}x=-\|X(t)\|^2+2(\boldsymbol{PB}W(0,\ t))^{\mathrm{T}}X(t)+a\int_0^1 W_{xx}(x,\ t)^{\mathrm{T}}W(x,\ t)\mathrm{d}x$$

由于

$$a\int_0^1 W_{xx}(x,\ t)^{\mathrm{T}}W(x,\ t)\mathrm{d}x=a\int_0^1 W(x,\ t)\mathrm{d}(W_x(x,\ t)^{\mathrm{T}})=-a\|W_x(t)\|_{L^2}^2$$

因此

$$\dot{V}(t)=-\|X(t)\|^2+2(\boldsymbol{PB}W(0,\ t))^{\mathrm{T}}X(t)-a\|W_x(t)\|_{L^2}^2 \tag{48}$$

先对第二项进行估计，根据柯西不等式和 Young 不等式，有

$$(\boldsymbol{PB}W(0,\ t))^{\mathrm{T}}X(t)\leqslant\|\boldsymbol{PB}W(0,\ t)\|\,\|X(t)\|\leqslant\|\boldsymbol{PB}\|^2\|W(0,\ t)\|^2+\frac{1}{4}\|X(t)\|^2 \tag{49}$$

其中 $\|W(0,\ t)\|^2=W(0,\ t)^{\mathrm{T}}W(0,\ t)$. 又由 Agmon 不等式及 $W(1,\ t)=0$ 可得

$$\begin{aligned}\|W(0,t)\|^2 &\leqslant \max_{x\in[0,1]}\|W(x,t)\|^2 \leqslant \\ &\|W(1,t)\|^2 + 2\|W(t)\|_{L^2}\|W_x(t)\|_{L^2} = \\ &2\|W(t)\|_{L^2}\|W_x(t)\|_{L^2}\end{aligned} \tag{50}$$

由 Poincaré 不等式及 $W(1,t)=0$ 可得

$$\begin{aligned}\|W(t)\|_{L^2} &= \left(\int_0^1\|W(x,t)\|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \\ &(2\|W(1,t)\|^2 + 4\int_0^1\|W_x(x,t)\|^2\mathrm{d}x)^{\frac{1}{2}} = \\ &2\|W_x(t)\|_{L^2}\end{aligned} \tag{51}$$

这里 $\|W(x,t)\|^2 = W(x,t)^{\mathrm{T}}W(x,t)$. 于是由式(49)－(51)可得

$$(\boldsymbol{PB}W(0,t))^{\mathrm{T}}X(t) \leqslant 4\|\boldsymbol{PB}\|^2\|W_x(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4}\|X(t)\|^2 \tag{52}$$

从而，由式(48)和式(52)可得

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &\leqslant -\|X(t)\|^2 + 8\|\boldsymbol{PB}\|^2\|W_x(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|X(t)\|^2 - a\|W_x(t)\|_{L^2}^2 = \\ &-\frac{1}{2}\|X(t)\|^2 - (a - 8\|\boldsymbol{PB}\|^2)\|W_x(t)\|_{L^2}^2\end{aligned}$$

取 $a = 8\|\boldsymbol{PB}\|^2 + 2$，则

$$\dot{V}(t) \leqslant -\frac{1}{2}\|X(t)\|^2 - 2\|W_x(t)\|_{L^2}^2$$

又由 $\|W(t)\|_{L^2} \leqslant 2\|W_x(t)\|_{L^2}$ 可得

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &\leqslant -\frac{1}{2}\|X(t)\|^2 - \frac{1}{2}\|W(t)\|_{L^2}^2 = \\ &-\frac{1}{2}(\|X(t)\|^2 + \|W(t)\|_{L^2}^2)\end{aligned}$$

又因为

$$\lambda_{\min}(\boldsymbol{P})\|X(t)\|^2 \leqslant X(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}X(t) \leqslant \lambda_{\max}(\boldsymbol{P})\|X(t)\|^2$$

$$\mu_{\min}(\boldsymbol{Q})\|W(t)\|_{L^2}^2 \leqslant \int_0^1 W(x,t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}W(x,t)\mathrm{d}x \leqslant \mu_{\max}(\boldsymbol{Q})\|W(t)\|_{L^2}^2$$

其中：$\lambda_{\min}(\boldsymbol{P})$ 是 $\boldsymbol{P}$ 的最小特征值，$\lambda_{\max}(\boldsymbol{P})$ 是 $\boldsymbol{P}$ 的最大特征值；$\mu_{\min}(\boldsymbol{Q})$ 是 $\boldsymbol{Q}$ 的最小特征值，$\mu_{\max}(\boldsymbol{Q})$ 是 $\boldsymbol{Q}$ 的最大特征值. 那么，由式(45)可得

$$\alpha_1(\|X(t)\|^2 + \|W(t)\|_{L^2}^2) \leqslant V(t) \leqslant \alpha_2(\|X(t)\|^2 + \|W(t)\|_{L^2}^2) \tag{53}$$

其中

$$\alpha_1 = \min\{\lambda_{\min}(P), a\mu_{\min}(Q)\},\ \alpha_2 = \max\{\lambda_{\max}(P), a\mu_{\max}(Q)\}$$

就可以得到

$$V(t) \leqslant V(0)\mathrm{e}^{-\beta t} \tag{54}$$

这里 $\beta = \frac{1}{2}\alpha_2$. 由方程(53)和(54)得到方程(44)成立，

$$\begin{aligned}\|X(t)\|^2 + \|W(t)\|_{L^2}^2 &\leqslant \frac{1}{\alpha_1}V(t) \leqslant \\ &\frac{1}{\alpha_1}V(0)\mathrm{e}^{-\beta t} \leqslant \\ &\alpha_2(\|X(t)\|^2 + \|W(t)\|_{L^2}^2) \leqslant \\ &\alpha(\|X(0)\|^2 + \|W(0)\|_{L^2}^2)\mathrm{e}^{-\beta t}\end{aligned}$$

其中 $\alpha = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$，这就证明了闭环系统是稳定的. 从变换(2b)中直接求解 $U(x,t)$ 是一个很困难的数学问题，

因此，本文假设逆变换具有如下形式

$$X(t)=X(t) \tag{55a}$$

$$U(x,t)=W(x,t)+\int_0^x L(x,y)W(y,t)\mathrm{d}y+Q(x)X(t) \tag{55b}$$

下面需证明引理2.

引理2 变换(2)及其逆变换(55)均为有界算子，即存在正整数δ，$\bar{\delta}$，γ和$\bar{\gamma}$使得

$$\|W(t)\|_{L^2}^2\leqslant\delta\|U(t)\|_{L^2}^2+\bar{\delta}\|X(t)\|^2 \tag{56}$$

$$\|U(t)\|_{L^2}^2\leqslant\gamma\|W(t)\|_{L^2}^2+\bar{\gamma}\|X(t)\|^2 \tag{57}$$

证 从变换(2b)及范数的性质，可得

$$\|W(t)\|_{L^2}\leqslant\|U(t)\|_{L^2}+\left\|\int_0^x\Psi(x,y)U(y,t)\mathrm{d}y\right\|_{L^2}+\|\Phi(x)X(t)\|_{L^2} \tag{58}$$

接下来需要对第二项和第三项进行估计. 首先根据Hölder不等式

$$\begin{aligned}\left\|\int_0^x\Psi(x,y)U(y,t)\mathrm{d}y\right\|_{L^2}^2\leqslant&\int_0^1\left\|\int_0^x\Psi(x,y)U(y,t)\mathrm{d}y\right\|^2\mathrm{d}x\leqslant\\&\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\|\Psi(x,y)U(y,t)\|^2\mathrm{d}y\leqslant\\&\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\|\Psi(x,y)\|^2\|U(y,t)\|^2\mathrm{d}y=\\&\int_0^1\int_0^1\|\Psi(x,y)\|^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x\int_0^1\|U(y,t)\|^2\mathrm{d}y=\\&\delta_1\|U(y,t)\|_{L^2}^2\end{aligned}$$

其中 $\|\Psi(x,y)\|$ 是矩阵值函数 $\Psi(x,y)$ 的算子范数，且

$$\delta_1=\int_0^1\int_0^1\|\Psi(x,y)\|^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

同理可得

$$\|\Phi(x)X(t)\|_{L^2}^2\leqslant\bar{\delta}\|X(t)\|^2\mathrm{d}x \tag{60}$$

其中$\bar{\delta}=\int_0^1\|\Phi(x)\|^2\mathrm{d}x$. 取$\delta=1+\delta_1$，则

$$\|W(t)\|_{L^2}^2\leqslant\delta\|U(t)\|_{L^2}^2+\bar{\delta}\|X(t)\|^2$$

同理，取$\gamma=1+\int_0^1\int_0^1\|L(x,y)\|^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x$，$\bar{\gamma}=\int_0^1\|N(x)\|^2\mathrm{d}x$. 则

$$\|U(t)\|_{L^2}^2\leqslant\gamma\|W(t)\|_{L^2}^2+\bar{\gamma}\|X(t)\|^2$$

根据引理1和引理2可以建立闭环系统的稳定性.

定理1 设$\Psi(1,y)$和$\Phi(1)$是方程(8)及(18)的解. 考虑系统(1)，控制律为(4)，则存在常数σ使得

$$\|X(x)\|^2+\|U(t)\|_2^2\leqslant\sigma(\|X(0)\|^2+\|U(0)\|_2^2)\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \tag{61}$$

即闭环系统在上述范数下是指数稳定的.

参考文献：

[1] BEKIARIS-LIBERIS N, KRSTIC M. Compensating the Distributed Effect of Diffusion and Counter-Convection in Multi-Input and Multi-Output LTI Systems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2011, 56(3): 637-643.

[2] KRSTIC M, SMYSHLYAEV A. Boundary Control of PDEs [M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2008.

[3] ZHANGX, ZUAZUA E. Control Observation and Polynomial Decay for a Coupled Heat-wave System [J]. ComptesRendusMathematique, 2003, 336(10): 823- 828.

[4] ZHAO A L, XIE C K. Stabilization of Coupled Linear Plant and Reaction-Diffusion Process [J]. Journal of the Franklin

Institute, 2014, 351(2): 857-877.

[5] ANTONIO SUSTO G, KRSTIC M. Control of PDE-ODE Cascades with Neumann Interconnections [J]. Journal of the Franklin Institute, 2010, 347(1): 284-314.

[6] SMYSHLYAEV A, KRSTIC M. Adaptive Control of Parabolic PDEs [J]. Automatica, 2007, 43(9): 1557-1564.

[7] TANG S, XIE C. Stabilization for a Coupled PDE-ODE System with Boundary Control [J]. IEEE Conference on Decision and Control IEEE, 2011, 349(9): 4042-4047.

[8] KRSTIC M. Compensating a String PDE in the Actuation or Sensing Path of an Unstable ODE [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2009, 54(6): 1362-1368.

[9] BEKIARIS-LIBERIS N, KRSTIC M. Compensating the Distributed Effectof a Wave PDE in the Actuationor Sensing Path of MIMO LTI Systems [J]. Systems & Control Letters, 2010, 59(11): 713-719.

[10] ZHOU Z C, GUO C L, WANG Y Q. Stabilization of a Heat-ODE System Cascaded at Intermediate Point [C]//2013 25th Chinese Control and Decision Conference (CCDC). New York: IEEE Press, 2013: 4613-4617.

[11] BOSKOVIC D M, BALOGH A, KRSTIC M. Backstepping in Infinite Dimension for a Class of Parabolic Distributed Parameter Systems [J]. Mathematics of Control, Signals and Systems, 2003, 16(1): 44-75.

[12] HE C H, XIE C K, ZHEN Z Y. Explicit Control Law of a Coupled Reaction-Diffusion Process [J]. Journal of the Franklin Institute, 2017, 354(5): 2087-2101.

On Stabilization of an ODE-PDE Coupled System by Boundary Control

XU Ling-ling,　BAI Yi-xin,　XIE Cheng-kang

School of Mathematics and Statistic, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: The system aims at consideration of a class of coupled ODE-PDE in this note. A control law has been established by back-stepping, and the stability of the closed loops been achieved.

Key words: stabilization; coupled system; boundary control

责任编辑　张　枸