

一类共轭类长度集合的长度为 3 的有限群^①

曹熠维, 吕恒

西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715

摘要: 证明了: 若 G 为有限群, 且 $|cd(G)| = |cs(G)| = 3$, 则 $G = H \times A$. 其中 A 是交换群, H 是非交换 p -群且 $|cs(H)| = 3$, 或 $H = KL$, $K \trianglelefteq H$, $(|K|, |L|) = 1$, K 是非交换 p -群且 $|cs(K)| = 2$, L 是交换群, $Z(K) = Z(H) \cap K$, $H/Z(H)$ 是 Frobenius 群, 并且 $|cd(K)| = 2$, $c(K) = 2$.

关键词: 有限群; 共轭类长度; 特征标维数

中图分类号: O152.1

文献标志码: A

文章编号: 1000-5471(2021)02-0001-03

设 G 为有限群, 用 $cs(G)$ 表示 G 的所有共轭类长度的集合, $cd(G)$ 表示 G 的所有不可约特征标维数的集合, $c(G)$ 表示 G 的幂零类长, 文中其他符号都是标准的, 可参看文献[1-2].

在群论中, 共轭类的长度以及共轭类长度的集合 $cs(G)$ 的长度对研究有限群的结构十分有帮助. 文献[3] 确定了所有互不同构的 $2^3 p$ 阶群的共轭类个数. 文献[4] 确定了非循环子群的共轭类个数为 7 的有限 p -群的所有结构. 文献[5] 给出了 $|cs(G)| = 2, 3$ 时 G 的一些性质, 以及 $|cs(G)| = 4, 5, 6$ 时群的一些初等结果. 文献[6] 还研究了满足 $|cs(G)| = 3$ 的有限群 G 的详细结构和性质.

有限群的不可约特征标的维数对研究其结构也有着重要的作用. 文献[7] 证明了 $|cd(G)| \leq 3$ 的群是可解的, 并且导长至多是 3. 文献[8] 得到了: 若对 G 的任意一个非线性不可约特征标 χ , 都满足 $|G/\ker \chi| \leq p_m \chi(1)^2$, 则 G 非单. 文献[9] 确定了满足 $cd(G) = cs(G) = \{1, p^m\}$ 的有限 p -群的幂零类长至多是 2, 并且留下了一个猜测: 设 G 是有限 p -群, 且 $cd(G) = cs(G) = \{1, p^{n_1}, p^{n_2}, \dots, p^{n_s}\}$, 其中 $1 \leq p^{n_1} \leq p^{n_2} \leq \dots \leq p^{n_s}$, 能否确定 $c(G)$ 的上界?

本文在文献[6] 的基础上, 研究了满足 $|cs(G)| = |cd(G)| = 3$ 的有限群 G 的结构和性质.

定义 1 设群 G 是有限群, 其中 $H \trianglelefteq G$, $K \leq G$, $H \cap K = 1$ 且 $G = H \rtimes K$. 若 K 的非单位元无不动点地正规作用在 H 上, 则称 G 为 Frobenius 群, H 为 Frobenius 核, K 为 Frobenius 补.

引理 1^[6] 设 G 是有限群, $|cs(G)| = 3$, 则 G 是下列群 H 之一与交换群的直积:

(A) $|cs(H)| = 3$ 的 p -群;

(B) $H = KL$, $K \trianglelefteq H$, $(|K|, |L|) = 1$, 且满足下列条件之一:

(B1) K, L 都是交换群, $Z(H) \leq L$ 且 $H/Z(H)$ 是 Frobenius 群;

(B2) K 是交换群, L 是非交换 p -群, $O_p(H) \leq L$ 且 $O_p(H)$ 是交换群, $H/O_p(H)$ 是 Frobenius 群;

(B3) K 是非交换 p -群且 $cs(K) = 2$, L 是交换群, $Z(K) = Z(H) \cap K$, $H/Z(H)$ 是 Frobenius 群.

引理 2 设 G 是有限 p -群, $G = \langle x \rangle \cdot A$, $A \trianglelefteq G$ 且 A 是交换群, 则 $C_G(x) < C_G(x^p)$.

证 显然 $C_G(x) \leq C_G(x^p)$, 取 $a \in A - Z(G)$, 使得 $[a, x] \in Z(G)$, $[a, x]^p = 1$. 由 $[a, x] \in Z(G)$, 有 $[a, x]x^{-1} = x^{-1}[a, x]$, 进而可得 $[a, x^p] = 1$, 所以 $a \in C_G(x^p) - C_G(x)$. 故 $C_G(x) < C_G(x^p)$.

① 收稿日期: 2020-06-12

基金项目: 国家自然科学基金项目(11971391).

作者简介: 曹熠维, 硕士研究生, 主要从事群论的研究.

定理 1 设 G 为有限群, 且 $|cs(G)| = |cd(G)| = 3$, 则 G 是满足引理 1 中(A) 或(B3) 的群 H 和交换群的直积.

证 对引理 1 中的(B1), 令 $A = K \times Z(H)$, $\forall \chi \in \text{Irr}(H)$, 有

$$\chi(1) \mid |H : A| = |L : Z(H)|$$

设 $\chi \in \text{Irr}_1(H) = \text{Irr}(H) - \text{Lin}(H)$, 则 $\chi_K = e \sum_{i=1}^t \lambda^{h_i}$, $t = |L : Z(H)|$, 于是 $\lambda^H \in \text{Irr}(H)$. 因为 $[\chi_K, \lambda] = [\chi, \lambda^H] = e > 0$, 且 e 是整数, 所以 $\chi(1) = e \sum_{i=1}^t \lambda^{h_i}(1) \geq t$. 又因 $\chi(1) \mid t$, 故 $\chi(1) = t$. 所以 $cd(H) = \{1, |L/Z(H)|\}$.

对引理 1 中的(B2), 若 $L/O_p(H)$ 交换, 则 $L/O_p(H)$ 循环, 因此 $L = \langle x \rangle \cdot O_p(H)$, $x \in L$, 且 $|\langle x \rangle| > p$. 否则 $cd(H) = \{1, p\}$, 所以存在 $x^p \in L - O_p(H)$. 因为 $G/O_p(H)$ 是 Frobenius 群, 所以 $C_H(x) \leq C_H(x^p) \leq L$. 于是由引理 2, $C_H(x) < C_H(x^p)$, 即 $|d(x)| \neq |d(x^p)|$. 因此对 $\forall b \in K$, $|d(1)|, |d(b)|, |d(x)|, |d(x^p)|$ 互不相等. 于是 $|cs(H)| \geq 4$, 与 $|cs(H)| = 3$ 矛盾.

若 $L/O_p(H)$ 非交换, 则 $L/O_p(H) \cong Q_{2^{n+1}}$ ($n \geq 2$). 于是

$$L/O_p(H) = \langle xO_p(H), yO_p(H) \rangle : x^4O_p(H) = y^{2^n}O_p(H) = 1 \cdot O_p(H), x^2O_p(H) = y^{2^{n-1}}O_p(H) \}$$

且 $C_H(x) \leq C_H(x^2) \leq L$, $C_H(y) \leq C_H(y^2) \leq L$.

若 $O_p(H) \not\leq Z(L)$, 则 $\langle x, O_p(H) \rangle, \langle y, O_p(H) \rangle$ 中至少有一个为非交换 p -群, 于是由引理 2, 有 $C_H(x) < C_H(x^2) \leq L$ 或 $C_H(y) < C_H(y^2) \leq L$. $\forall b \in K$, 有 $|d(1)|, |d(b)|, |d(x)|, |d(x^2)|$ 互不相等, 或 $|d(1)|, |d(b)|, |d(y)|, |d(y^2)|$ 互不相等. 于是有 $|cs(H)| \geq 4$, 与 $|cs(H)| = 3$ 矛盾.

若 $O_p(H) \leq Z(L)$, 由广义四元数群的结构知 $\langle yO_p(H) \rangle \trianglelefteq L/O_p(H)$, 因此 $\langle y, O_p(H) \rangle \trianglelefteq L$ 且 $\langle y, O_p(H) \rangle$ 是交换群, 于是 $L = \langle x, y, O_p(H) \rangle$, 故 $C_H(x) < C_H(x^2) \leq L$. 同样可得 $|cs(H)| \geq 4$, 与 $|cs(H)| = 3$ 矛盾.

注 1 对引理 1 中的(A) 和(B3), 这样的群是存在的, 例如 $H = \langle \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle : a^{27} = b^9 = 1, a^b = a^4 \rangle$, $cs(H) = cd(H) = \{1, 3, 9\}$; $H = SL(2, 3)$, $cs(H) = \{1, 4, 6\}$, $cd(H) = \{1, 2, 3\}$.

定理 2 设 $G = KL$, $|cs(G)| = |cd(G)| = 3$, $K \trianglelefteq G$, $(|K|, |L|) = 1$, K 是非交换 p -群且 $|cs(K)| = 2$, L 是交换群, $Z(K) = Z(G) \cap K$, $G/Z(G)$ 是 Frobenius 群. 则 $c(K) = 2$.

证 先证明 $|cd(K)| = 2$. 若 $|cd(K)| = 3$, 则存在 $1_G \neq \theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \text{Irr}(K)$, 不妨设 $\theta_1(1) = 1 < \theta_2(1) < \theta_3(1)$, 于是存在 $\chi_2, \chi_3 \in \text{Irr}(G)$, 使得

$$[(\chi_2)_K, \theta_2] \neq 0 \quad [(\chi_3)_K, \theta_3] \neq 0$$

即 $\theta_2(1) \mid \chi_2(1)$, $\theta_3(1) \mid \chi_3(1)$. 由于 $G/Z(G)K'$ 也是 Frobenius 群, 于是 $\theta_i^G \in \text{Irr}(G)$, 且 $\theta_i^G(1) = |G/Z(G)K'| \mid |L|$, 与 $|K|$ 互素, 因此有 $|cd(G)| \geq 4$, 与 $|cd(G)| = 3$ 矛盾. 故 $|cd(K)| = 2$.

由文献[10], $c(K) \leq 3$, 设 $c(K) = 3$, $cd(K) = \{1, p^m\}$, $|K'| = p^s$, $|K/K'| = p^r$,

$$|Z(K) \cap K'| = p^{t_1} \quad |Z(K)/(Z(K) \cap K')| = p^{t_2}$$

则 K 的非线性特征标的个数为 $\frac{p^{r+s} - p^r}{p^{2m}} = p^{r-2m}(p^s - 1)$. 由于 $(Z(K) \cap K') < K'$, 因此 $p^{t_1} < p^s$, 显然也有 $p^{t_1} < p^s - 1$. 取 $\hat{\chi} \in \text{Irr}_1(K/[K', K])$, 于是 $\hat{\chi}(1) = p^m$. 因为 $c(K) = 3$, 所以 $c(K/[K', K]) = 2$, 因此

$$K/[K', K] \leq Z(K/[K', K]) \leq Z(\hat{\chi})$$

即 $K' \leq Z(\hat{\chi})$, $K/Z(\hat{\chi})$ 是交换群. 于是

$$|K : Z(\hat{\chi})| = \chi(1)^2 = p^{2m} \quad |Z(\hat{\chi})/K'| = \frac{|K : K'|}{|K : Z(\hat{\chi})|} = p^{r-2m}$$

又因为

$$|Z(K)/Z(K) \cap K'| = |Z(K)K'/K'| = p^{t_2} \quad Z(K)K' \leq Z(\hat{\chi})$$

所以 $p^{t_2} < p^{r-2m}$, 进而有 $p^{r-2m}(p^s - 1) > p^{t_1+t_2} = |Z(K)|$. 因此由置换同构定理, K 中有 G -不变的不可

约特征标, 也有不是 G -不变的不可约特征标, G -不变的不可约特征标一定可以扩张到 G , 由此可以得到 $|cd(G)| \geq 4$, 与 $|cd(G)| = 3$ 矛盾, 故 $c(K) = 2$.

参考文献:

- [1] KURZWEIL H, STELLMACHER B. The Theory of Finite Groups [M]. New-York: Springer-Verlag, 2004.
- [2] ISAACS I M. Character Theory of Finite Groups [M]. New York: Academic Press, 1976.
- [3] 廖俊梅, 曹洪平. $2^3 p$ 阶群的共轭类的个数与群的结构 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2018, 40(12): 86-89.
- [4] 杨东芳, 赵 冲, 吕 恒. 非循环子群的共轭类个数为 7 的有限 p -群 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2017, 39(4): 52-55.
- [5] ITO N. On Finite Groups with Given Conjugate Types. I. [J]. Nagoya Math J, 1953(6): 17-28.
- [6] DOLFI S, JABARA E. The Structure of Finite Groups of Conjugate Rank 2 [J]. Bulletin of the London Math Soc, 2009, 41(5): 916-926.
- [7] ISAACS I M. Groups Having at Most Three Irreducible Character Degrees [J]. Proc Amer Math Soc, 1969, 21(1): 185-188.
- [8] 高 聪, 吕 恒. 具有一些特殊维数的不可约特征标的有限群 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2018, 43(12): 30-35.
- [9] 薛海波, 吕 恒. 具有特殊特征标维数的有限 p -群 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2019, 44(10): 5-7.
- [10] ISHIKAWA K, On Finite p -Groups Which Have Only Two Conjugacy Lengths [J]. Israel Journal Of Mathematics, 2002, 129: 119-123.

A Type of Finite Groups With Three Conjugacy Lengths

CAO Yi-wei, LÜ Heng

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: This paper is based on the classification of finite groups with three conjugacy lengths to find out which have three character degrees. If G is a finite group with three conjugacy lengths and three character degrees, then $G = H \times A$, H is an unabelian p -group, A is abelian; or $H = KL$, $K \trianglelefteq H$, $(|K|, |L|) = 1$, K is an unabelian p -group with two conjugacy lengths and L is abelian, $Z(K) = Z(H) \cap K$, $H/Z(H)$ is a Frobenius group, and K have two different character degrees, the nilpotent class of K is two.

Key words: finite groups; conjugacy length; character degree

责任编辑 廖 坤