第 46 卷 第 2 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2021 年 2 月
Vol. 46 No. 2 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Feb. 2021

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2021.02.002

# 有限群可解的若干充分条件①

康旺强[1], 覃雪清[2], 卢家宽[3]

1. 广西师范大学 漓江学院,经济与管理学院,广西 桂林 541006;
2. 桂林电子科技大学 信息科技学院,广西 桂林 541004;
3. 广西师范大学 数学与统计学院,广西 桂林 541006

**摘要:** 证明了有限可解群的若干性质:若有限群 $G$ 的非正规非交换极大子群皆共轭,则 $G$ 是可解群;若有限群 $G$ 中非正规子群的共轭类个数不超过极大子群的共轭类个数,则 $G$ 是可解群;设 $G$ 是有限群,若 $G$ 的非幂零极大子群的指数为素数或素数的平方,则 $G$ 是可解群.

**关 键 词:** 可解群;极大子群;非正规子群;非交换子群

**中图分类号:O152.1** **文献标志码:A** **文章编号:** 1000-5471(2021)02-0004-04

从子群的特性来讨论有限群的可解性是群论研究的重要课题.例如,在群论研究中具有基础性作用的 Hall 定理[1]:有限群 $G$ 可解的充分必要条件是 $G$ 存在 Sylow 系;Schmidt 定理[1]:若有限群 $G$ 是内幂零群,则 $G$ 可解;Huppert 定理[2]:有限群 $G$ 是超可解群当且仅当 $G$ 的极大子群的指数均为素数.

学者们从各个方面继续研究有限群可解的条件.文献[3-4]从非正规子群的共轭类个数出发,给出了有限群可解的若干充分条件.文献[5]讨论了非平凡循环子群共轭类类数较小的有限非可解群.文献[6]讨论了 $S$-拟正规嵌入子群与有限群的 $p$-幂零性.文献[7]讨论了子群的弱 $s$-可补性对有限群可解性的影响.文献[8]从元素的阶讨论了有限群的可解性.文献[9]通过同阶子群的个数讨论了有限群.文献[10-11]使用非次正规子群的共轭类数讨论了有限群的可解性,其部分结果推广了文献[3-4]的结果.最近,文献[12]讨论了有限特征单群被有限交换群或有限非交换单群的扩张的 Coleman 自同构.

本文沿着上述研究方向,继续讨论非正规子群的共轭类个数对有限群可解性的影响.文献[3-4,10-11]主要是使用有限群 $G$ 的阶的素因子个数去限制非正规子群,或利用非次正规子群共轭类个数来讨论 $G$ 的可解性.本文使用有限群 $G$ 的极大子群共轭类个数去限制非正规子群共轭类个数,讨论了 $G$ 的可解性,得到了 $G$ 可解的两个充分条件,即定理 1 和定理 2.

文献[13]证明了:设 $p$ 是取定的素数,如果有限群 $G$ 的每一非幂零的极大子群的指数都为 $p$ 的方幂,则 $G$ 为可解群.文献[14]证明了:如果有限群 $G$ 的所有非幂零极大子群的指数都是素数,则 $G$ 是可解群.文献[15]证明了:如果有限群 $G$ 的所有极大子群的指数都是素数或素数的平方,则 $G$ 是可解群.本文只考虑非幂零极大子群,把这一结果推广为定理 3.

本文使用的符号都是标准的,参考文献[1].

**引理 1**[16] 若有限群 $G$ 有交换的极大子群,则 $G$ 是可解群.

**引理 2**[1] 若有限群 $G$ 是内幂零群,则 $G$ 可解.

① 收稿日期:2020-01-06
基金项目:国家自然科学基金项目(11861015);广西自然科学基金项目(2020GXNSFAA238045);广西高校中青年教师科研基础能力提升项目.
作者简介:康旺强,硕士,讲师,主要从事代数学的研究.
通信作者:卢家宽,教授.

**引理 3**[1]　奇数阶群必可解.

**引理 4**[1]　设 $G$ 是有限群，$P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. 若 $H \geqslant N_G(P)$，则 $N_G(H) = H$.

**引理 5**[2]　设 $G$ 是有限群，$P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ 非正规，$p$ 是 $|G|$ 的最大素因子. 假设 $M$ 是包含 $N_G(P)$ 的 $G$ 的极大子群，则 $|G:M|$ 是一个合数.

设 $p$ 是素数，$P$ 是 $p$- 群. Thompson 子群 $J(P)$ 是 $P$ 的所有极大阶子群生成的子群. 由于 $J(P)$ 是 $P$ 的特征子群，$Z(J(P))$ 是 $J(P)$ 的特征子群，故 $Z(J(P))$ 是 $P$ 的特征子群.

**引理 6**[2]　设 $G$ 为有限群，$p$ 为奇素数，$P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. 若 $N_G(Z(J(P)))$ 有正规 $p$- 补，则 $G$ 也有正规 $p$- 补.

**定理 1**　若有限群 $G$ 的非正规非交换极大子群皆共轭，则 $G$ 是可解群.

**证**　取 $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. 若 $P \trianglelefteq G$，则 $G/P$ 满足定理 1 的条件. 否则，$G/P$ 中存在非交换非正规的极大子群 $M_1/P$ 与 $M_2/P$，在 $G/P$ 中不共轭. 从而 $M_1$ 和 $M_2$ 为 $G$ 中非交换非正规的极大子群，且对任意 $g \in G$ 有 $M_1^g \neq M_2$，与已知条件矛盾. 故由归纳假设，$G/P$ 是可解群，从而 $G$ 是可解群.

下设 $G$ 的任意 Sylow 子群皆不正规. 令 $\pi(G) = \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$. 取 $P_i \in \mathrm{Syl}_{p_i}(G)$，以及 $G$ 的包含 $N_G(P_i)$ 的极大子群 $M_i$. 则有

$$P_1 \leqslant N_G(P_1) \leqslant M_1 \lessdot G$$
$$\cdots$$
$$P_n \leqslant N_G(P_n) \leqslant M_n \lessdot G$$

由于 $G$ 的任意 Sylow 子群皆不正规，故由引理 4，$M_1, M_2, \cdots, M_n$ 在 $G$ 中不正规. 若 $M_1, \cdots, M_n$ 全是非交换群，则由定理 1 的条件，可知 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 相互共轭. 特别地，$|M_1| = \cdots = |M_n|$. 而

$$|P_1| \mid |M_1|, \cdots, |P_n| \mid |M_n|$$

由此可得 $|M_1| = |G|$，即有 $G = M_1$，与 $M_1$ 是极大子群矛盾. 故必有某个 $M_i$ 是交换群，则由引理 1 知 $G$ 是可解群.

**定理 2**　若有限群 $G$ 中非正规子群的共轭类个数不超过极大子群共轭类个数，则 $G$ 是可解群.

**证**　设 $M_1, \cdots, M_n$ 为 $G$ 的极大子群共轭类代表. 分 3 种情形进行讨论：

情形 1　$M_1, \cdots, M_n$ 都不是 $G$ 的正规子群.

此时 $G$ 已有 $n$ 个不正规子群的共轭类. 于是每个 $M_i$ 的真子群均是 $G$ 的正规子群. 否则，$G$ 中的非正规子群的共轭类个数多于极大子群的共轭类个数，与定理 2 的条件矛盾. 从而 $M_i$ 的真子群均是 $M_i$ 的正规子群，$M_i$ 是幂零群. 因此，$G$ 是内幂零群，故由引理 2 知 $G$ 是可解群.

情形 2　$M_1, \cdots, M_n$ 都是 $G$ 的正规子群.

此时 $G$ 已是幂零群，故 $G$ 是可解群.

情形 3　$M_1, \cdots, M_s$ 是 $G$ 的正规子群，而 $M_{s+1}, \cdots, M_n$ 为 $G$ 的非正规极大子群，其中 $1 < s < n$.

此时已有 $n - s$ 个非正规子群的共轭类.

现假设 $M_1, \cdots, M_s$ 都是非可解群. 则对 $M_2, \cdots, M_s$ 而言，$M_2, \cdots, M_s$ 分别存在非正规的极大子群 $H_2, \cdots, H_s$. 首先，我们知道 $H_2, \cdots, H_s$ 也是 $G$ 的非正规子群. 其次，我们有 $H_2, \cdots, H_s$ 互不相等. 否则，不妨假设 $H_2 = H_s$. 则由 $H_2$ 的极大性，有

$$H_2 = H_s = M_2 \cap M_s \trianglelefteq G$$

这 $H_2$ 的选取矛盾. 进一步，我们有 $H_2, \cdots, H_s$ 互不共轭. 否则，不妨假设 $H_2$ 与 $H_s$ 共轭. 则存在 $g \in G$，使得 $H_2^g = H_s$，从而

$$H_s = H_2^g \leqslant M_2^g = M_2$$

因此，由 $H_2$ 的极大性，有 $\langle H_2, H_s \rangle = M_2$. 类似地，有 $\langle H_2, H_s \rangle = M_s$. 因此，$M_2 = M_s$，矛盾.

对 $M_1$ 而言，令 $P \in \mathrm{Syl}_2(M_1)$. 则 $P$ 不是 $G$ 的正规子群. 否则，则有 $P \trianglelefteq G$. 由于奇阶群可解，故 $M_1/P$ 可解，从而得出 $M_1$ 可解，矛盾. 又因存在素数 $q$，使得 $Q \in \mathrm{Syl}_q(M_1)$，则 $Q$ 不是 $G$ 的正规子群. 否则，$M_1$ 具有正规 2- 补 $K$. 由归纳法知 $G/K$ 是可解群. 注意到 $K$ 是奇数阶群，故由引理 3 知 $K$ 是可解群. 从而，$G$

是可解群.

现在我们知道 $P,Q,H_2,\cdots,H_s,M_{s+1},\cdots,M_n$ 都是$G$ 的非正规子群，且它们互不共轭. 这里只需验证 $H_i$ 与 $M_j$ 不共轭，其中 $1\leqslant i\leqslant s$，$s+1\leqslant j\leqslant n$. 否则，存在 $g\in G$，使得 $H_i^g=M_j$，从而

$$M_j=H_i^g\leqslant M_i^g=M_i$$

矛盾. 类似地，也有 $P,Q$ 与 $M_j$ 不共轭. 因此，我们找到了 $n+1$ 个非正规子群的共轭类，与定理 2 的假设矛盾. 故必有某个 $M_i$ 可解($i\leqslant s$). 考虑 $G/M_i$. 由 $M_i$ 的极大性，可知 $G/M_i$ 没有平凡子群. 由归纳法知，$G/M_i$ 是可解群，从而，$G$ 是可解群.

**定理 3** 设 $G$ 是有限群，若 $G$ 的非幂零极大子群的指数为素数或素数的平方，则 $G$ 是可解群.

**证** 假设结论不成立，设 $G$ 为极小阶反例.

令 $N$ 为$G$ 的极小正规子群. 取 $M/N$ 是$G/N$ 的非幂零极大子群，则

$$|(G/N):(M/N)|=|G:M|$$

于是$G/N$ 的非幂零极大子群的指数也是素数或素数的平方. 用归纳法，可设$G/N$ 可解. 如果 $N$ 亦可解，则 $G$ 可解，这与假设矛盾. 所以 $N$ 是非可解群.

令 $p$ 为 $|N|$ 的最大素因子，假设 $P\in \mathrm{Syl}_p(G)$. 考虑 $G$ 的子群 $N_G(Z(J(P)))$，其中 $J(P)$ 为 $G$ 的 Thompson 子群. 由于 $Z(J(P))$ char $P\trianglelefteq N_G(P)$，易知

$$N_G(P)\leqslant N_G(Z(J(P)))<G$$

令 $M$ 为$G$ 的包含 $N_G(Z(J(P)))$ 的极大子群. 由 Frattini 论断我们可以得到

$$G=N_G(P)N=N_G(Z(J(P)))N=MN$$

若 $M$ 是幂零群，则 $N_G(Z(J(P)))$ 是幂零群，特别地 $N_N(Z(J(P)))$ 是 $p$- 幂零的. 由引理 6 知 $N$ 是 $p$-幂零的，矛盾.

设 $M$ 是非幂零群，则由假设可得 $|G:M|$ 是素数或素数的平方. 于是

$$|G:M|=|MN:M|=|N:(M\cap N)|=q,q^2$$

特别地，$q\,\Big|\,|N|$. 由于 $p$ 是 $|N|$ 的最大素因子，所以有 $q\leqslant p$. 若 $|G:M|=q$，从引理 5 可以知道 $P\trianglelefteq N$，从而 $P\trianglelefteq G$. 由 $N$ 的极小性，易得 $P=N$，即 $N$ 是可解群，这与 $N$ 是非可解群矛盾.

若 $|G:M|=q^2$，由 Sylow 定理知

$$|G:N_G(P)|=|N_G(P)N:N_G(P)|=|N:(N\cap N_G(P))|=|N:N_n(P)|\equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$$

由于

$$M=M\cap G=M\cap N_G(P)N=N_G(P)(M\cap N)$$

故

$$|M:N_G(P)|=|N_G(P)(M\cap N):N_G(P)|=|(M\cap N):N_{M\cap N}(P)|$$

由于 $P$ 是 $N$ 的 Sylow $p$- 子群，故 $P$ 是 $M\cap N$ 的 Sylow $p$- 子群. 由 Sylow 定理知

$$|M:N_G(P)|\equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$$

因此，由初等数论得 $|G:M|\equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$，即 $q^2\equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$. 这推出

$$(q+1)(q-1)\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$$

因此 $p=3$，$q=2$，$|N:(N\cap M)|=4$.

考虑 $N$ 在 $N\cap M$上的右陪集集合上的右乘变换，于是把 $N$ 映到 $S_4$ 的一个非平凡子群，这推出 $N'<N$. 由 $N$ 的极小性，有 $N'=1$. 于是 $N$ 是可解群，这与假设矛盾. 定理 3 得证.

**参考文献：**

[1] 徐明曜. 有限群导引(上)[M]. 2 版. 北京：科学出版社，1993.

[2] 徐明曜，黄建华，李慧陵，等. 有限群导引(下)[M]. 2 版. 北京：科学出版社，2001.

[3] BRANDL R. Groups with Few Non-Normal Subgroups [J]. Comm algebra，1995，23(6)：2091-2098.

[4] BRANDL R. Non-Soluble Groups with Few Conjugacy Classes of Non-Normal Subgroups [J]. Beitr Algebra Geom，2013，54(2)：493-501.

［5］ 史江涛，张　翠．非平凡循环子群共轭类类数较小的有限非可解群［J］．广西师范大学学报(自然科学版)，2014，32(3)：52-56．

［6］ 袁　媛，唐　康，刘建军．$S$-拟正规嵌入子群与有限群的 $p$-幂零性［J］．西南师范大学学报(自然科学版)，2020，45(6)：1-4．

［7］ 卢家宽，邱燕燕．子群弱 $s$-可补性对有限群可解性的影响［J］．广西师范大学学报(自然科学版)，2017，35(1)：49-52．

［8］ 施武杰．有限群可解的一个充分条件［J］．西南大学学报(自然科学版)，2017，39(6)：1-4．

［9］ 李春艳，陈贵云．同阶子群个数之集为{1，3，4}的有限群［J］．西南大学学报(自然科学版)，2017，39(6)：54-59．

［10］ FENG A F，LIU Z H．Finite Groups Having Exactly Two Conjugate Classes of Non-Subnormal Subgroups［J］．Comm. algebra，2015，43(9)：3840-3847．

［11］ 钟祥贵，丁锐芳，凌思敏．非次正规子群共轭类数对有限群结构的影响［J］．广西师范大学学报(自然科学版)，2017，35(1)：44-48．

［12］ 赵乐乐，海进科．具有某种扩张的有限群的 Coleman 自同构［J］．山东大学学报(理学版)，2019，54(10)：109-112．

［13］ 郭秀云．非幂零极大子群指数为素数幂的有限群［J］．数学年刊(A辑)，1994，15(6)：721-725．

［14］ LU J K，PANG L N，ZHONG X G．Finite Groups with Non-Nilpotent Maximal Subgroups［J］．Monatsh Math，2013，171(3-4)：425-431．

［15］ 徐明曜．有限群初步［M］．北京：科学出版社，2014．

［16］ ROBINSON D J S．A Course in the Theory of Groups［M］．New York：Springer-Verlag，1996．

# Some Sufficient Conditions on Solvability of Finite Groups

KANG Wang-qiang[1]，　QIN Xue-qing[2]，　LU Jia-kuan[3]

1. *Department of Economics and Management，Lijiang College，Guangxi Normal University，Guilin Guangxi 541006，China*；

2. *Institute of Information Technology，Guilin University of Electronic Technology，Guilin Guangxi 541004，China*；

3. *School of Mathematics and Statistics，Guangxi Normal University，Guilin Guangxi 541006，China*

**Abstract**：In this paper，some sufficient conditions on solvability of finite groups obtained：If all non-normal non-abelian subgroups of a finite group $G$ are conjugate，then $G$ is solvable；If the number of conjugacy classes of non-normal subgroups of a finite group $G$ is no more than thenumber of conjugacy classes of maximal subgroups of $G$，then $G$ is solvable；If the indexs of its non-nilpotent maximal subgroups of $G$ are prime or the square of prime，then $G$ is solvable.

**Key words**：solvable group；maximal subgroup；non-normal subgroup；non-abelian subgroup

责任编辑　廖　坤