第 46 卷 第 2 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2021 年 2 月
Vol. 46 No. 2 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Feb. 2021

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2021.02.003

(m, n)-凝聚模与(m, n)-半遗传模①

王 党， 刘仲奎

西北师范大学 数学与统计学院，兰州 730070

摘要： 通过类比凝聚模、(m, n)-凝聚环和半遗传环的概念与性质，给出了(m, n)-凝聚模和(m, n)-半遗传模的概念，并研究了在一般环的条件下(m, n)-凝聚模和(m, n)-半遗传模的性质. 还通过(m, n)-M-平坦模和(m, n)-M-内射模给出了(m, n)-凝聚模和(m, n)-半遗传模的一些等价刻画.

关 键 词： (m, n)-凝聚模；(m, n)-半遗传模；(m, n)-M-平坦模；(m, n)-M-内射模

中图分类号：O153.3 **文献标志码：A** **文章编号：** 1000－5471(2021)02－0008－07

众所周知，凝聚环和伪凝聚环都是很重要的环类，这两类环的研究在环论中具有一定的意义. 作为凝聚环和伪凝聚环的统一推广，文献[1]引入了(m, n)-凝聚环的概念，研究了(m, n)-凝聚环的一些性质，给出了一系列的等价刻画. 文献[2]引入了n-半遗传环的概念. 文献[3]将n-凝聚环和n-半遗传环的概念推广到了一般模上，定义了n-凝聚模和n-半遗传模的概念，得出了其在 Noether 和 Artin 等环上的一些性质，例如：证明了 Noether 环上内射左R-模都是n-凝聚的，并引入了n-M-平坦模与n-M-内射模来描述其相关的特征性质.

受到以上研究的启发，类似文献[4]的方法，本文先给出(m, n)-凝聚模和(m, n)-半遗传模的概念，证明了它们的一些性质，再通过引入(m, n)-M-平坦模和(m, n)-M-内射模，给出了(m, n)-凝聚模和(m, n)-半遗传模的一些等价刻画.

本文中所提到的环R均指有单位元的结合环，除非特别说明，模均指酉模，直和、直积均指有限直和、有限直积. 对于正整数m，R^m表示m个R的拷贝直和. 记M_R($_RM$)是右(左)R-模，M的特征模 $\mathrm{Hom}_z(M, Q/Z)$ 用M^+表示.

文中未解释的概念与符号可参见文献[2,5-6].

1 预备知识

定义 1[1] 设m, n是取定的正整数.

(a) 如果环R的每个n-生成左理想是有限表现(投射)的，则称环R是左n-凝聚环(左n-半遗传环)；

(b) 如果左R-模R^m的每个n-生成子模都是有限表现的，则称环R是左(m, n)-凝聚环；

(c) 设M是左R-模. 如果M的每个n-生成子模都是有限表现(投射)的，则称M是n-凝聚(n-半遗传)左R-模.

① 收稿日期：2020－04－21
基金项目：国家自然科学基金项目(11761060).
作者简介：王 党，硕士研究生. 主要从事环的同调理论的研究.
通信作者：刘仲奎，教授.

定义 2[7]　(a) 如果存在左 R-模的正合序列 $0 \longrightarrow K \longrightarrow R^m \longrightarrow M \longrightarrow 0$，其中 K 是 n-生成的，则称 M 是$(m，n)$-表现左 R-模；

(b) 如果每个从 R^m 的 n-生成子模到 M 的左 R-同态都可以扩张成从 R^m 到 M 的左 R-同态，则称 M 是$(m，n)$-内射左 R-模；

(c) 如果对于左 R-模 R^m 的所有 n-生成子模 I，同态 $1_M \otimes i_I$：$M \otimes_R I \longrightarrow M \otimes_R R^m$ 是单的，则称右 R-模 M 是$(m，n)$-平坦模.

定义 3[8]　设 $\mathscr{C}$ 是左 R-模类，M 是左 R-模. 若 $C \in \mathscr{C}$ 且对任意 $C' \in \mathscr{C}$，Abel 群同态 $\mathrm{Hom}(\varphi, C')$：$\mathrm{Hom}(C, C') \longrightarrow \mathrm{Hom}(M, C')$ 是满的，则称同态 φ：$M \longrightarrow C$ 是 M 的 $\mathscr{C}$-预包络. 如果满足 $\varphi g = \varphi$ 的每个同态 g：$C \longrightarrow C$ 都是同构，则 $\mathscr{C}$-预包络 φ：$M \longrightarrow C$ 称为 $\mathscr{C}$-包络. 对偶地有 $\mathscr{C}$-预覆盖和 $\mathscr{C}$-覆盖的定义.

2　$(m，n)$-凝聚模与$(m，n)$-半遗传模

定义 4　设 R 是环，m，n 是给定的正整数. 如果左 R-模 M^m 的每个 n-生成子模都是有限表现的，则称左 R-模 M 是$(m，n)$-凝聚的.

注 1　(i) 若 M 是凝聚左 R-模，则 M 是$(1，n)$-凝聚左 R-模，其中 n 是正整数；

(ii) 由定义容易看出，$(m，n)$-凝聚模的子模仍是$(m，n)$-凝聚的.

与文献[7]的引理 2.2 的证明方法类似，我们有下面的引理：

引理 1　设 R 是环，M 是左 R-模. $N = R\alpha_1 + R\alpha_2 + \cdots + R\alpha_n$ 是 M 的 n-生成子模，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \alpha \in M^m$. 令 $L = N + R\alpha$，F 是基为 $x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}$ 的自由左 R-模，f：$F \longrightarrow L$ 是左 R-模同态，使得对 $i \leqslant n$ 有 $f(x_i) = \alpha_i$，$f(x_{i+1}) = \alpha$. 令 $K = \mathrm{Ker}\, f$，$F' = Rx_1 + Rx_2 + \cdots + Rx_n \subseteq F$，$K' = K \cap F'$，则存在满同态 g：$K \longrightarrow (N : \alpha)$，使得 $\mathrm{Ker}\, g = K'$，其中 $(N : \alpha) = \{r \in R \mid r\alpha \in N\}$.

定理 1　设 R 是环，M 是左 R-模. 则下列结论等价：

(i) M 是$(m，n)$-凝聚左 R-模；

(ii) 若 N 是 M^m 的$(n-1)$-生成子模，则对任意 $\alpha \in M^m$，$(N : \alpha)$ 是 M 的有限生成子模.

证　(i)⇒(ii) 设 N 是 M^m 的$(n-1)$-生成子模，$\alpha \in M^m$，F 是由 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 生成的自由模. 由引理 1 可得正合序列 $0 \longrightarrow K \longrightarrow F \xrightarrow{f} L \longrightarrow 0$，其中 $L = N + R\alpha$. 则由(i)可知 K 是有限生成的. 因此再由引理 1 可知$(N : \alpha)$是有限生成的.

(ii)⇒(i) 设 $N_n = R\alpha_1 + R\alpha_2 + \cdots + R\alpha_n$ 是 M^m 的 n-生成子模，其中 $\alpha_i \in M^m$，$i = 1, 2, \cdots, n$. 定义左 R-模同态 h_n：$R^n \longrightarrow N_n$ 为 $h(r_1, r_2, \cdots, r_n) = r\alpha_1 + r\alpha_2 + \cdots + r\alpha_n$，其中 $(r_1, r_2, \cdots, r_n) \in R^n$.

当 $n = 1$ 时，存在正合序列 $0 \longrightarrow K_1 \longrightarrow R \longrightarrow N_1 \longrightarrow 0$，由(ii)可知 $K_1 = (0 : \alpha_1)$ 是有限生成的，从而 N_1 是有限生成的.

当 $n > 1$ 时，考虑交换图

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & & & \\
0 \arrow[r] & K_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & R^{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & N_{n-1} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_n \arrow[r] \arrow[d, "g_n"] & R^n \arrow[r] & N_n \arrow[r] & 0 \\
& (N_{n-1} : \alpha_n) \arrow[d] & & & \\
& 0 & & &
\end{tikzcd}$$

其中第一列是正合的. 所以依次类推可得 $N_n = N_{n-1} + R\alpha_n$ 是 M^m 的 n-生成子模，且 N_n 是有限表现的，故 M 是$(m，n)$-凝聚的.

定义 5 设 R 是环，m,n 是给定的正整数. 如果 M^m 的每个 n -生成子模是投射的，那么称左 R -模 M 是 (m, n) -半遗传模.

命题 1 设 R 是环，m,n 是给定的正整数. 则 (m, n) -半遗传模关于直和封闭.

证 设 $\{M_i\}_{i\in\Lambda}$ 是一簇 (m, n) -半遗传左 R -模，N 是 $(\bigoplus_{i\in\Lambda}M_i)^m$ 的 n -生成子模. 则存在正整数 k，使得 N 是 $(\bigoplus_{i=1}^{k}M_i)^m$ 的 n -生成子模.

当 $k=1$，结论显然成立.

假设结论对 $k-1$ 成立，即 $(\bigoplus_{i=1}^{k-1}M_i)$ 是 (m, n) -半遗传的. 设 π：$(\bigoplus_{i=1}^{k}M_i)^m \longrightarrow (M_k)^m$ 是标准投影. 定义左 R -模同态 α：$N \longrightarrow (M_k)^m$ 为 $\alpha(x)=\pi(x)$，其中 $x\in N$. 则可得左 R -模正合序列

$$0 \longrightarrow N \cap (M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_{k-1})^m \longrightarrow N \longrightarrow \mathrm{Im}(\alpha) \longrightarrow 0$$

因为 $\mathrm{Im}(\alpha)$ 是 $(M_k)^m$ 的 n -生成子模，所以 $\mathrm{Im}(\alpha)$ 是投射的，由此可知该序列是可裂的. 从而 $N \cap (M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_{k-1})^m$ 是 N 的直和项，因此 $N \cap (M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_{k-1})^m$ 是 $(M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_{k-1})^m$ 的 n -生成子模. 则由假设可知 $N \cap (M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_{k-1})^m$ 是投射的，所以 $N \cong (N \cap (M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_{k-1})^m) \oplus \mathrm{Im}(\alpha)$ 是投射的. 故 $\bigoplus_{i\in\Lambda}M_i$ 是 (m, n) -半遗传的.

定理 2 给定正整数 m,n. 对于左 R -模 M，下列结论成立：

(i) 若 M 是凝聚(半遗传) 左 R -模，则 M 是 (m, n) -凝聚(半遗传) 左 R -模，且 M^n 也是 (m, n) -凝聚(半遗传) 左 R -模；

(ii) 若 M 是 (m, n) -凝聚(半遗传) 左 R -模，且 M^m 的每个 n -生成子模都平坦，则 M 是 (m, n) -半遗传左 R -模；

(iii) (m, n) -凝聚(半遗传) 左 R -模的子模也是 (m, n) -凝聚(半遗传) 左 R -模；

(iv) 若 R 是左 Noether 环，则每个左 R -模都是 (m, n) -凝聚的；

(v) 若 R 是半单 Artin 环，则每个左 R -模都是 (m, n) -半遗传的.

证 (i) 因为 M 是凝聚左 R -模，所以 M 是 n -凝聚左 R -模. 则由文献[3]的命题 2.3 可知，M^m 是 n -凝聚左 R -模. 故 M 是 (m, n) -凝聚左 R -模. 同理可证，对半遗传模，结论也成立.

(ii) 设 K 是 M^m 的 n -生成子模，则 K 是有限表现的. 又因为 K 是平坦的，所以由文献[9]的定理 3.56 可知，K 是投射的. 由 K 的任意性可知，M 是 (m, n) -半遗传左 R -模.

(iii) 设 M 是 (m, n) -凝聚左 R -模. 任取 M 的子模 N，设 K 是 N^m 的 n -生成子模，易知 K 是 M^m 的 n -生成子模，则 K 是有限表现的. 由 K 的任意性可知，N 是 (m, n) -凝聚左 R -模. 同理可证，对 (m, n) -半遗传模，结论也成立.

(iv) 因为环 R 是左 Noether 环，所以 R 上的有限生成模与有限表现模是等价的. 对任意左 R -模 M，设 $N=Rx_1+Rx_2+\cdots+Rx_n$ 是 M^m 的 n -生成子模，其中 $x_i\in M^m$，$i=1,2,\cdots,n$. 则 N 是有限生成左 R -模. 所以 N 是有限表现的，故 M 是 (m, n) -凝聚模.

(v) 因为 R 是半单 Artin 环，当且当每个左 R -模是内射的，当且当每个左 R -模是投射的. 所以对环 R 上的任意左 R -模 M^m，它的 n -生成子模是投射的，则 M 是 (m, n) -半遗传左 R -模.

3 (m,n) - M -平坦模与 (m, n) - M -内射模

定义 6 设 m,n 是任意的正整数，M 是左 R -模.

(a) 如果对 M^m 的任意 n -生成子模 K，都存在正合序列 $0 \longrightarrow N \otimes K \longrightarrow N \otimes M^m$，则称右 R -模 N 为 (m, n) - M -平坦模；

(b) 如果对 M^m 的任意 n -生成子模 K，都存在正合序列 $\mathrm{Hom}(M^m, L) \longrightarrow \mathrm{Hom}(K, L) \longrightarrow 0$，则称左 R -模 L 为 (m, n) - M -内射模.

注 2 (i) 由文献[7]可知，右 R -模 N 是 (m, n) - R -平坦模当且仅当 N 是 (m, n) -平坦模；左 R -模

L 是(m,n)-R-内射模当且仅当 L 是(m,n)-内射模.

(ii) 由定义可知，(m,n)-M-平坦模类关于直和项有限直和封闭；(m,n)-M-内射模类关于有限直积封闭.

引理 2　设 M 是左 R-模. 则下列结论成立：

(i) 右 R-模 N 是(m,n)-M-平坦的当且仅当 N^+ 是(m,n)-M-内射的；

(ii) (m,n)-M-内射模类关于直和、直积和直和项封闭；

(iii) (m,n)-M-平坦模类关于纯子模、纯商模、直和项、正向极限和直和封闭，并且每个右 R-模有(m,n)-M-平坦覆盖.

证　(i) 设 N 是(m,n)-M-平坦的，K 是 M^m 的 n-生成子模. 由定义可得正合序列 $0\longrightarrow N\otimes K\longrightarrow N\otimes M^m$. 则 $(N\otimes M^m)^+\longrightarrow(N\otimes K)^+\longrightarrow 0$ 是正合的当且仅当 $\mathrm{Hom}(M^m,n^+)\longrightarrow\mathrm{Hom}(K,n^+)\longrightarrow 0$ 是正合的. 故 N 是(m,n)-M-平坦的当且仅当 N^+ 是(m,n)-M-内射的.

(ii) 设 $\{L_i\}_{i\in I}$ 是一簇(m,n)-M-内射模，K 是 M^m 的 n-生成子模. 则有正合序列 $\bigoplus_{i\in I}\mathrm{Hom}(M^m,L_i)\longrightarrow\bigoplus_{i\in I}\mathrm{Hom}(K,L_i)\longrightarrow 0$. 我们可以得到交换图

$$\begin{array}{ccccc}
\bigoplus_{i\in I}\mathrm{Hom}(M^m,L_i) & \xrightarrow{\alpha} & \bigoplus_{i\in I}\mathrm{Hom}(K,L_i) & \longrightarrow & 0\\
\downarrow{\scriptstyle\theta_M} & & \downarrow{\scriptstyle\theta_K} & & \\
\mathrm{Hom}(M^m,\bigoplus_{i\in I}L_i) & \xrightarrow{\beta} & \mathrm{Hom}(K,\bigoplus_{i\in I}L_i) & &
\end{array}$$

即 $\theta_K\alpha=\beta\theta_M$. 因为 K 是有限生成的，所以 θ_K 是同构的. 又因为 α,θ_K 是满的，所以 β 是满的. 因此 $\mathrm{Hom}(M^m,\bigoplus_{i\in I}L_i)\longrightarrow\mathrm{Hom}(K,\bigoplus_{i\in I}L_i)\longrightarrow 0$ 是正合的，所以 $\bigoplus_{i\in I}L_i$ 是(m,n)-M-内射模. 由此证得(m,n)-M-内射模类对直和封闭，同理可证对直和项封闭. 由定义易证对直积封闭.

(iii) (m,n)-M-平坦模类关于直和项、正向极限和直和封闭是显然的，下面只证关于纯子模和纯商模封闭.

设 $0\longrightarrow A\longrightarrow B\longrightarrow B/A\longrightarrow 0$ 是右 R-模纯正合序列，其中 B 是(m,n)-M-平坦的. 则有可裂正合列 $0\longrightarrow(B/A)^+\longrightarrow B^+\longrightarrow A^+\longrightarrow 0$. 由(i)知，$B^+$ 是(m,n)-M-内射的. 又因为 $B^+=A^+\oplus(B/A)^+$，故$(B/A)^+$ 和 A^+ 是(m,n)-M-内射的，所以 A 和 B/A 是(m,n)-M-平坦的. 从而可知(m,n)-M-平坦模对纯子模和纯商模封闭.

因为(m,n)-M-平坦模类关于正向极限和纯商模封闭，所以根据文献[10]的定理 2.7 可知，每个右 R-模 有(m,n)-M-平坦覆盖.

引理 3　设 M 是(m,n)-凝聚左 R-模. 则(m,n)-M-平坦模类关于直积封闭，且每个右 R-模有(m,n)-M-平坦预包络.

证　设 $\{N_i\}_{i\in\Lambda}$ 是一簇(m,n)-M-平坦右 R-模，K 是 M^m 的 n-生成子模. 则可得交换图

$$\begin{array}{ccc}
(\prod_{i\in\Lambda}N_i)\otimes K & \xrightarrow{\gamma} & (\prod_{i\in\Lambda}N_i)\otimes M^m\\
\downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi}\\
\prod_{i\in\Lambda}(N_i\otimes K) & \xrightarrow{\beta} & \prod_{i\in\Lambda}(N_i\otimes M^m)
\end{array}$$

因为 K 是有限表现的，所以由文献[8]的定理 3.2.22 可知，α 是同构的. 又因为 $\beta\alpha=\varphi\gamma$ 且 β 是单的，所以 γ 是单的. 则 $0\longrightarrow(\Pi_{i\in\Lambda}N_i)\otimes K\longrightarrow(\Pi_{i\in\Lambda}N_i)\otimes M^m$ 是正合的. 故 $\Pi_{i\in\Lambda}N_i$ 是(m,n)-M-平坦的，即(m,n)-M-平坦模类关于直积封闭.

由引理 2 知，(m,n)-M-平坦模类关于纯子模封闭. 由文献[10]的定理 4.1 知，每个右 R-模有(m,n)-M-平坦预包络.

定理 3　对于有限表现左 R-模 M，下列条件等价：

(i) M 是(m, n)-凝聚左 R-模;

(ii) (m, n)-M-平坦右 R-模关于直积封闭;

(iii) R_R 的任意拷贝直积是(m, n)-M-平坦的;

(iv) 每个右 R-模有(m, n)-M-平坦预包络;

(v) 左 R-模 N 是(m, n)-M-内射模当且仅当 N^+ 是(m, n)-M-平坦模;

(vi) 左 R-模 N 是(m, n)-M-内射模当且仅当 N^{++} 是(m, n)-M-内射模;

(vii) 右 R-模 N 是(m, n)-M-平坦模当且仅当 N^{++} 是(m, n)-M-平坦模;

(viii) (m, n)-M-内射模类关于纯商模封闭;

(ix) (m, n)-M-内射模类关于正向极限封闭.

证　(i)⇒(ii), (i)⇒(iv) 由引理 3 已证.

(ii)⇒(iii) 显然.

(iii)⇒(i) 设 K 是 M^m 的任意 n-生成子模. 则有交换图

$$\begin{tikzcd}
(\prod R_R)\otimes K \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\alpha"] & (\prod R_R)\otimes M^m \arrow[d, "\beta"] \\
\prod K \arrow[r, "\varphi"] & \prod M^m
\end{tikzcd}$$

由(iii) 知 ΠR_R 是(m, n)-M-平坦的, 所以 γ 是单的. 又因为 M 是有限表现模, 则由文献[8]的定理 3.2.22 知 β 是同构的. 由 $\varphi\alpha=\beta\gamma$ 可知 α 是单的. 因为 K 是有限生成的, 所以由文献[8]的定理 3.2.21 知 α 是满的, 从而 α 是同构的. 又由文献[8]的定理 3.2.22 知, K 是有限表现的. 故由 K 的任意性可知, M 是(m, n)-凝聚模.

(iv)⇒(ii) 由引理 2 知(m, n)-M-平坦模是关于直和封闭的, 又因为每个右 R-模都有(m, n)-M-平坦预包络, 则由文献[11]的引理 1 知, 结论是成立的.

(i)⇒(v) 设 K 是 M^m 的 n-生成子模, 则可得交换图

$$\begin{tikzcd}
N^+\otimes K \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\alpha"] & N^+\otimes M^m \arrow[d, "\beta"] \\
\mathrm{Hom}(K, N)^+ \arrow[r, "\varphi"] & \mathrm{Hom}(M^m, N)^+
\end{tikzcd}$$

因为 M 是有限表现的, 所以 M^m 是有限表现的. 又由(i) 知 K 是有限表现的, 所以 α, β 是同构的. 又因为 $\varphi\alpha=\beta\gamma$, 所以若 N^+ 是(m, n)-M-平坦的, 则 γ 是单的, 当且当 φ 是单的, 当且当 $\mathrm{Hom}(M^m, N)\longrightarrow\mathrm{Hom}(K, N)\longrightarrow 0$ 是正合的. 则 N 是(m, n)-M-内射模. 结论成立.

(v)⇒(vi) 设 K 是 M^m 的 n-生成子模, N 是(m, n)-M-内射模. 由(v) 知, $0\longrightarrow N^+\otimes K\longrightarrow N^+\otimes M^m$ 正合等价于$(N^+\otimes M^m)^+\longrightarrow(N^+\otimes K)^+\longrightarrow 0$, 即 $\mathrm{Hom}(M^m, N^{++})\longrightarrow\mathrm{Hom}(K, N^{++})\longrightarrow 0$ 正合, 所以 N^{++} 是(m, n)-M-内射模.

(vi)⇒(vii) 由引理 2 和(vi) 知, 右 R-模 N 是(m, n)-M-平坦模, 等价于 N^+ 是(m, n)-M-内射模, 等价于 N^{+++} 是(m, n)-M-内射模, 又等价于 N^{++} 是(m, n)-M-平坦模.

(vii)⇒(iii) 因为对 M^m 的任意 n-生成子模 K, 存在正合列 $0\longrightarrow(\bigoplus R_R)\otimes K\longrightarrow(\bigoplus R_R)\otimes M^m$. 所以 $\bigoplus R_R$ 是(m, n)-M-平坦的. 由(vii) 知, $(\bigoplus R_R)^{++}\cong(\Pi R^+)^+$ 是(m, n)-M-平坦的. 由文献[12]的引理 1(1) 知, $\bigoplus R_R^+$ 是 ΠR_R^+ 的纯子模. 则存在可裂正合列 $(\Pi R_R^+)^+\longrightarrow(\bigoplus R_R^+)^+\longrightarrow 0$, 使得 $(\bigoplus R_R^+)^+\cong(\Pi R^{++})$ 是(m, n)-M-平坦模. 又由文献[12]的引理 1(2) 知, ΠR_R 是 ΠR_R^{++} 的纯子模, 则由引理 2 知, ΠR_R 是(m, n)-M-平坦模.

(v)⇒(viii) 设 $0\longrightarrow A\longrightarrow B\longrightarrow C\longrightarrow 0$ 是左 R-模纯正合列, 其中 B 是(m, n)-M-内射模, 由此

可得可裂正合列 $0\longrightarrow C^{+}\longrightarrow B^{+}\longrightarrow A^{+}\longrightarrow 0$，由(v)知，$B^{+}$ 是$(m,n)-M$-平坦模，并且有 $B^{+}\cong A^{+}\oplus C^{+}$，则由引理 2 知 A^{+},C^{+} 是$(m,n)-M$-平坦的，因此 C 是$(m,n)-M$-内射模．故$(m,n)-M$-平坦模类关于纯商模封闭．

(viii)⇒(ix) 设$\{N_i\}_{i\in I}$ 是一簇$(m,n)-M$-内射模，其中 I 是有向集．由文献[13]的 33.9 可得纯正合列 $0\longrightarrow N_i\longrightarrow\bigoplus_{i\in I}N_i\longrightarrow\varinjlim N_i\longrightarrow 0$，所以 $\bigoplus_{i\in I}N_i$ 是$(m,n)-M$-内射模．故由(viii)可知$\varinjlim N_i$ 是$(m,n)-M$-内射模．

(ix)⇒(i) 设 K 是 M^m 的 n-生成子模，$\{N_i\}_{i\in I}$ 是一簇$(m,n)-M$-内射模，其中 I 是有向集．则由(ix)知$\varinjlim N_i$ 是$(m,n)-M$-内射的．因此可得交换图

$$\begin{array}{ccc}\varinjlim \mathrm{Hom}(M^m,N_i) & \xrightarrow{\gamma} & \varinjlim \mathrm{Hom}(K,N_i)\\ \downarrow\alpha & & \beta\downarrow\\ \mathrm{Hom}(M^m,\varinjlim N_i) & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{Hom}(K,\varinjlim N_i)\end{array}$$

因为 M 是有限表现的，所以 M^m 是有限表现的．由文献[13]的 25.4 知 α 是同构的．又因为$\varinjlim N_i$ 是(m,n)-M-内射的，所以 φ 是满的，因此 β 是满的．又因为 K 是有限生成的，则由文献[13]的 24.9 可知，β 是单射，故 β 是同构的．从而由文献[13]的 25.4 知 K 是有限表现的．因此 M 是(m,n)-凝聚左 R-模．

命题 2　若 M 是有限表现的(m,n)-凝聚左 R-模，则每个左 R-模有$(m,n)-M$-内射预包络和$(m,n)-M$-内射覆盖．

证　设 $0\longrightarrow A\longrightarrow B\longrightarrow C\longrightarrow 0$ 是左 R-模纯正和序列，其中 B 是$(m,n)-M$-内射模，由此可得可裂正合列 $0\longrightarrow C^{+}\longrightarrow B^{+}\longrightarrow A^{+}\longrightarrow 0$，并且 B^{+},A^{+} 是(m,n)-M-平坦的，所以 A 是(m,n)-M-内射的．因此$(m,n)-M$-内射模类关于纯子模封闭，且由引理 2 知，$(m,n)-M$-内射模类关于直积封闭．则由文献[10]的定理 4.1 知，每个左 R-模有(m,n)-M-内射预包络．再由定理 3 和引理 2 知，(m,n)-M-内射模类关于纯商模和直和封闭，则由文献[10]的定理 2.7 知每个左 R-模有$(m,n)-M$-内射覆盖．

定理 4　对于平坦(m,n)-凝聚左 R-模 M，下列条件等价：

(i) M 是(m,n)-半遗传左 R-模；

(ii) $(m,n)-M$-平坦右 R-模关于子模封闭；

(iii) 每个右 R-模有满的$(m,n)-M$-平坦预包络；

(iv) $(m,n)-M$-内射左 R-模关于商封闭．

证　(i)⇒(ii) 设 B 是$(m,n)-M$-平坦右 R-模，A 是 B 的子模，K 是 M^m 的 n-生成子模，则可以得到交换图

$$\begin{array}{ccc}A\otimes K & \xrightarrow{\gamma} & A\otimes M^m\\ \downarrow\alpha & & \beta\downarrow\\ B\otimes K & \xrightarrow{\varphi} & B\otimes M^m\end{array}$$

因为 K 投射，且 B 是$(m,n)-M$-平坦的，所以 α,φ 是单的．则由 $\varphi\alpha=\beta\gamma$ 知 γ 是单的．因此 A 是$(m,n)-M$-平坦的．

(ii)⇒(iii) 对任意右 R-模 N，由引理 3 知 N 有$(m,n)-M$-平坦预包络，设为 f：$N\longrightarrow F$．由(ii)知 $\mathrm{Im}(f)$ 是$(m,n)-M$-平坦的，所以 g：$N\longrightarrow\mathrm{Im}(f)$ 是满的$(m,n)-M$-平坦预包络．

(i)⇒(iv) 设 X 是$(m,n)-M$-内射模，N 是 X 的子模．下证 X/N 是$(m,n)-M$-内射模．

设 K 是 M^m 的 n-生成子模，i：$K\longrightarrow M^m$ 是包含映射，π：$X\longrightarrow X/N$ 是标准映射．对任意的同态 f：$K\longrightarrow X/N$，因为 K 是投射的，所以存在 g：$K\longrightarrow X$ 使得 $\pi g=f$．因此存在 l：$M^m\longrightarrow X$ 使得 $li=g$．

又因为 X 是$(m, n)-M$-内射的，所以有$(\pi l)i = f$. 故 X/N 是$(m, n)-M$-内射的，

(iv)⇒(ii) 设 A 是$(m, n)-M$-平坦右R-模 B 的子模，由引理 2，B^+ 是$(m, n)-M$-内射的，因为 A^+ 是 B^+ 的商，则由(iv) 知，A^+ 是$(m, n)-M$-内射模. 所以 A 是$(m, n)-M$-平坦模.

参考文献：

[1] ZHANG X X, CHEN J L. On n-Semihereditary and n-Coherent Rings [J]. Inter Electron J Algebra, 2007(1): 1-10.

[2] 申婧雯，杨晓燕. 余纯 FP_n-平坦模 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2018, 40(6): 69-72.

[3] MAO L X. Relative Coherent Modules and Semihereditary Modules [J]. Communications in Algebra, 2019, 47(9): 3583-3596.

[4] 魏佳玲，杨晓燕. $G\chi I$-内射模 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2018, 43(10): 9-12.

[5] 宋彦辉，梁 力. 模的限制内射维数 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2018, 40(12): 94-99.

[6] LUO X Q, MAO L X. Modules Whose Endomorphism Rings Are (m, n)-Coherent [J]. Algebra Colloq, 2019, 26(2): 231-242.

[7] ZHANG X X, CHEN J L, ZHANG J. On (m, n)-Injective Modules and (m, n)-Coherent Rings [J]. Algebra Colloq, 2005, 12(1): 149-160.

[8] ENOCHS E E, JENDA O M G. Relative Homological Algebra [M]. Berlin, New-York: de Gruyter, 2000.

[9] ROTMAN J. An Introduction to Homological Algebra [M]. Amsterdam: Elsevier, 1979.

[10] CRIVEI S, PREST M, TORRECILLAS B. Covers in Finitely Accessible Categories [J]. Proc Amer Math Soc, 2010, 138(4): 1213-1221.

[11] CHEN J L, DING N Q. A Note on Existence of Envelopes and Covers [J]. Bull Austral Math Soc, 1996, 54(3): 383-390.

[12] CHEATHAM T J, STONE D R. Flat and Projective Character Modules [J]. Proc Amer Math Soc, 1981, 81(2): 175-177.

[13] WISBAUER R. Foundations of Module and Ring Theory [M]. Philadelphia: Gordon and Breach, 1991.

(m, n)-Coherent Modules and (m, n)-Semihereditary Modules

WANG Dang, LIU Zhong-kui

School of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China

Abstract: In this paper, the concepts of (m,n)-coherent modules and (m,n)-semihereditary modules are given by analogy to the concepts and properties of coherent modules, (m,n)-coherent rings and semihereditary rings, and the properties of (m,n)-coherent modules and (m,n)-semihereditary modules under the condition of general rings are studied. Some equivalent characterizations of (m,n)-coherent modules and (m,n)-semihereditary modules are also given by (m,n)-M-flat modules and (m,n)-M-injective modules.

Key words: (m,n)-coherent module; (m,n)-semihereditary module; (m,n)-M-flat module; (m,n)-M-injective module

责任编辑 廖 坤