第 46 卷　第 2 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2021 年 2 月
Vol. 46　No. 2　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Feb. 2021

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2021.02.004

相对于余挠对的复形的 Tate 上同调①

陈早红，　杨晓燕

西北师范大学 数学与统计学院，兰州 730070

摘要：设$(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$是 Abel 范畴 $\mathscr{A}$ 中的完备遗传的余挠对. 定义了 Gorenstein 复形范畴 $\mathscr{G}(\mathscr{Y})$的 Tate 余分解，并且给出了相对于 $\mathscr{G}(\mathscr{Y})$的 Tate 上同调的定义，此外，还研究了相对于余挠对$(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$的复形的相对上同调和 Tate 上同调之间的相互关系.

关　键　词：余挠对；Tate 余分解；Tate 上同调

中图分类号：O153.3　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000－5471(2021)02－0015－06

关于Tate上同调的研究开始于有限表示群. 文献[1]将Tate上同调的定义延伸到了Noetherian环中有有限 Gorenstein 维数的模 M 上，在模 M 的完全分解上定义了 Tate 上同调函子$\widehat{\mathrm{Ext}}_R^*(M, -)$. 文献[2]研究了有限 Gorenstein 维数的模的广义 Tate 上同调理论. 文献[3]研究了有有限 Gorenstein 内射维数的复形的 Tate 上同调群，并且得到重要结论：复形 M 存在完全余分解当且仅当复形 M 有有限 Gorenstein 内射维数. 文献[4-5]研究了 Gorenstein 投射模范畴中的 FP -投射和强 Gorenstein 投射模的一些性质. 文献[6]研究了Gorenstein投射复行范畴中的绝对纯的性质. 文献[7]定义了Gorenstein AC-内射模，在此基础上，文献[8]研究了有有限 Gorenstein AC -内射维数的复形 M 的完全 $\mathscr{AC}$-余分解，并且定义了 M 的 Tate 上同调.

受以上工作的启发，在这篇文章中，设 $(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ 是 Abel 范畴 $\mathscr{A}$ 中的完备遗传的余挠对，定义了 Gorenstein 复形范畴$\mathscr{G}(\mathscr{Y})$及Tate余分解，并且给出了相对于$\mathscr{G}(\mathscr{Y})$的Tate上同调的定义，此外还研究了相对于余挠对$(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ 的复形的相对上同调和 Tate 上同调之间的相互关系.

1　预备知识

定义 1　设 $\mathscr{A}$ 为双完备的 Abel 范畴，复形

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+2}^M} M_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}^M} M_n \xrightarrow{d_n^M} M_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}^M} M_{n-2} \xrightarrow{d_{n-2}^M} \cdots$$

可记为(M, d)或简写为 M. $\mathrm{Ker}\, d_n^M$ 称为 n -循环，记为 $Z_n(M)$；$\mathrm{Im}\, d_{n+1}^M$ 称为 n -边缘，记为 $B_n(M)$. $Z_n(M)/B_n(M)$ 称为第 n 个上同调对象，记为 $H_n(M)$. 设 $C_n(M) = \mathrm{Coker}\, d_{n+1}^M$. 将 M 的平移记为 ΣM.

$\mathscr{A}$ 中的复形范畴记为 $\mathscr{C}(\mathscr{A})$. 设 M 是 $\mathscr{C}(\mathscr{A})$ 中的对象，对于整数 n，M 的左硬截断和右硬截断分别为

$$M_{\leqslant n}:\ 0 \longrightarrow M_n \xrightarrow{d_n^M} M_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}^M} M_{n-2} \xrightarrow{d_{n-2}^M} \cdots$$

$$M_{\geqslant n}:\ \cdots \longrightarrow M_{n+2} \xrightarrow{d_{n+2}^M} M_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}^M} M_n \xrightarrow{d_n^M} 0$$

定义 M 的上确界和下确界分别为

$$\sup M = \sup\{s \in \mathbb{Z} \mid H_s(M) \neq 0\}$$
$$\inf M = \inf\{i \in \mathbb{Z} \mid H_i(M) \neq 0\}$$

① 收稿日期：2020－03－28

基金项目：国家自然科学基金项目(11761060).

作者简介：陈早红，硕士研究生，主要从事同调代数的研究.

通信作者：杨晓燕，教授.

约定：若 M 正合，则 $\sup M = -\infty$ 或 $\inf M = \infty$. 若复形 M 存在上确界，则称 M 是上有界复形；若复形 M 存在下确界，则称 M 是下有界复形.

定义 2 设 $\mathscr{X}, \mathscr{Y}$ 是 $\mathscr{A}$ 中对象的类，如果 $(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ 是 $\mathscr{A}$ 中的余挠对，则

$$\mathscr{Y} = \mathscr{X}^{\perp} = \{A \in \mathscr{A} \mid \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(X, A) = 0, \ \forall X \in \mathscr{X}\}$$
$$\mathscr{X} = {}^{\perp}\mathscr{Y} = \{B \in \mathscr{A} \mid \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(B, Y) = 0, \ \forall Y \in \mathscr{Y}\}$$

如果余挠对 $(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ 是完备的，则对于 $\mathscr{A}$ 中的任意对象 A，存在正合序列

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow X \longrightarrow A \longrightarrow 0 \qquad 0 \longrightarrow A \longrightarrow Y' \longrightarrow X' \longrightarrow 0$$

其中 $Y, Y' \in \mathscr{Y}$, $X, X' \in \mathscr{X}$. 如果余挠对 $(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ 是遗传的，则对 $\forall i \geqslant 1$, $X \in \mathscr{X}$, $Y \in \mathscr{Y}$, 有 $\mathrm{Ext}^i_A(X, Y) = 0$.

定义 3[9] 设 $(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ 是 $\mathscr{A}$ 中的余挠对，M 是 $\mathscr{C}(\mathscr{A})$ 中的对象.

(a) 如果 M 是 $\mathscr{X}$ 复形，则 M 是正合的，且对于任意整数 n, $Z_n(M) \in \mathscr{X}$;

(b) 如果 M 是 $\mathscr{Y}$ 复形，则 M 是正合的，且对于任意整数 n, $Z_n(M) \in \mathscr{Y}$;

(c) 如果 M 是 $dg\mathscr{X}$ 复形，则对于任意整数 n, $M_n \in \mathscr{X}$, 且当 Y 是 $\mathscr{Y}$ 复形时，任意的链映射 $f: M \longrightarrow Y$ 是零伦链映射；

(d) 如果 M 是 $dg\mathscr{Y}$ 复形，则对于任意整数 n, $M_n \in \mathscr{Y}$, 且当 X 是 $\mathscr{X}$ 复形时，任意的链映射 $f: X \longrightarrow M$ 是零伦链映射.

$\mathscr{A}$ 为双完备的 Abel 范畴，$(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ 是 $\mathscr{A}$ 中的完备遗传的余挠对. $\widetilde{\mathscr{X}}$ 是 $\mathscr{X}$ 复形的类，$\widetilde{\mathscr{Y}}$ 是 $\mathscr{Y}$ 复形的类，$dg\widetilde{\mathscr{X}}$ 是 $dg\mathscr{X}$ 复形的类，$dg\widetilde{\mathscr{Y}}$ 是 $dg\mathscr{Y}$ 复形的类，由文献[10-11]可得，由 $(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ 诱导的余挠对 $(\widetilde{\mathscr{X}}, dg\widetilde{\mathscr{Y}})$, $(dg\widetilde{\mathscr{X}}, \widetilde{\mathscr{Y}})$ 是完备遗传的.

2 Tate 余分解

定义 4 $\mathscr{A}$ 中的一个完全 $\mathscr{Y}$-余分解是指 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{X} \cap \mathscr{Y}, -)$ 正合的正合列

$$Y = : \cdots \longrightarrow Y_1 \xrightarrow{d_1} Y_0 \xrightarrow{d_0} Y_{-1} \xrightarrow{d_{-1}} Y_{-2} \xrightarrow{d_{-2}} \cdots$$

其中 $Y_i \in \mathscr{Y}$. 若存在一个完全 $\mathscr{Y}$-余分解，使得 $N \cong \mathrm{Ker}(Y_{-1} \longrightarrow Y_{-2})$，则 $N \in \mathscr{G}(\mathscr{Y})$.

定义 5 设 N 是 $\mathscr{C}(\mathscr{A})$ 中的复形.

(a) 称拟同构 $N \longrightarrow Y$ 是 N 的 $dg\widetilde{\mathscr{Y}}$-余分解，其中 $Y \in dg\widetilde{\mathscr{Y}}$;

(b) 如果拟同构 $N \longrightarrow Y$ 是 N 的真 $dg\widetilde{\mathscr{Y}}$-余分解，则对于任意 $Y' \in dg\widetilde{\mathscr{Y}}$, 有 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(\mathscr{A})}(Y, Y') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(\mathscr{A})}(N, Y') \longrightarrow 0$ 正合；

(c) 若存在真 $dg\widetilde{\mathscr{Y}}$-余分解 $N \longrightarrow Y$，其中 $\inf Y \geqslant -n$，且对于任意 $j \leqslant -n$, $Z_j(Y) \in \mathscr{G}(\mathscr{Y})$，则对于任意整数 n, $\mathscr{G}(\mathscr{Y}) - \dim N \geqslant -n$.

设 N 是 $\mathscr{C}(\mathscr{A})$ 中的任意复形，因为余挠对 $(\widetilde{\mathscr{X}}, dg\widetilde{\mathscr{Y}})$ 是完备的，所以 N 存在真 $dg\widetilde{\mathscr{Y}}$-余分解.

定理 1 设 N 是 $\mathscr{C}(\mathscr{A})$ 中的复形，n 为整数，则以下结论等价：

(i) $\mathscr{G}(\mathscr{Y}) - \dim N \geqslant -n$;

(ii) $\inf N \geqslant -n$，且对于任意的 $dg\widetilde{\mathscr{Y}}$-余分解 $N \longrightarrow Y$, $Z_{-n}(Y) \in \mathscr{G}(\mathscr{Y})$.

证 必要性 显然.

充分性 因为 $\mathscr{G}(\mathscr{Y}) - \dim N \geqslant -n$，所以假设 N 的一个真 $dg\widetilde{\mathscr{Y}}$-余分解为 $N \longrightarrow Y'$，其中 $Z_{-n}(Y') \in \mathscr{G}(\mathscr{Y})$, $\inf(Y') \geqslant -n$. 由拟同构可知 $\inf N \geqslant -n$. 设 $N \longrightarrow Y$ 是 N 的一个 $dg\widetilde{\mathscr{Y}}$-余分解，则有交换图

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r] \arrow[d, equal] & Y' \arrow[d, "s"] \\ N \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

其中 s 为拟同构，对于 Y'，有单的链映射 $Y' \longrightarrow \overline{Y}$，其中 $\overline{Y} \in \widetilde{\mathscr{Y}} \subseteq dg\widetilde{\mathscr{Y}}$. 有推出图

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r] \arrow[d] & \overline{Y} \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & K \end{tikzcd}$$

所以存在短正合列 $0\longrightarrow Y'\longrightarrow Y\oplus\overline{Y}\longrightarrow K\longrightarrow 0$，其中 $K\in\widetilde{\mathscr{Y}}$. 从而有短正合列 $0\longrightarrow Z_{-n}(Y')\longrightarrow Z_{-n}(Y\oplus\overline{Y})\longrightarrow Z_{-n}(K)\longrightarrow 0$. 而 $Z_{-n}(K),Z_{-n}(\overline{Y})\in\mathscr{Y}$，$Z_{-n}(Y')\in\mathscr{G}(\mathscr{Y})$，由此可得 $Z_{-n}(Y)\in\mathscr{G}(\mathscr{Y})$.

定义 6　设 N 是 $\mathscr{C}(\mathscr{A})$ 中的复形. 称复形序列 $N\xrightarrow{\pi}Y\xrightarrow{\tau}T$ 是 N 在 $\mathscr{C}(\mathscr{A})$ 中的 Tate $\mathscr{Y}$-余分解，其中 π 是真 $dg\widetilde{\mathscr{Y}}$-余分解，$T$ 是完全 $\mathscr{Y}$-余分解，当 $i\ll 0$ 时，τ_i 是双射.

定理 2　设 N,N' 是 $\mathscr{C}(\mathscr{A})$ 中有有限 $\mathscr{G}(\mathscr{Y})$-余分解维数的复形，对于任意链映射 μ：$N\longrightarrow N'$，存在唯一的同伦链映射 $\overline{\mu}$，使得以下左边方框可交换：

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\mu"'] & Y \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\overline{\mu}"'] & T \arrow[d, "\widehat{\mu}"'] \\
N' \arrow[r, "\pi'"] & Y' \arrow[r, "\tau'"] & T'
\end{tikzcd}$$

对于任意的 $\overline{\mu}$，存在唯一的同伦链映射 $\widehat{\mu}$，使得右边方框同伦交换. 此交换图上下两行分别是 N 和 N' 的 Tate $\mathscr{Y}$-余分解，若 $\mu=id_N$，则 $\overline{\mu}$ 和 $\widehat{\mu}$ 是同伦等价的.

证　对于 N，存在短正合列 $0\longrightarrow L\longrightarrow X\longrightarrow N\longrightarrow 0$，其中 $X\in\widetilde{\mathscr{X}}$，$L\in dg\widetilde{\mathscr{Y}}$. 对于 X，存在短正合列 $0\longrightarrow X\longrightarrow\overline{Y}\longrightarrow K\longrightarrow 0$，其中 $\overline{Y}\in\widetilde{\mathscr{Y}}$，$K\in dg\widetilde{\mathscr{X}}$. 考虑推出图

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d, equal] & X \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\overline{\pi}"'] & N \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] & \overline{Y} \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & K \arrow[r, equal] \arrow[d] & K \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

同理，对于 N'，有推出图

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & L' \arrow[r] \arrow[d, equal] & X' \arrow[r, "\iota'"] \arrow[d, "\overline{\pi}'"'] & N' \arrow[r] \arrow[d, "\pi'"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & L' \arrow[r] & \overline{Y}' \arrow[r] \arrow[d] & Y' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & K' \arrow[r, equal] \arrow[d] & K' \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

因为 ι：$X\longrightarrow N$ 是 $dg\widetilde{\mathscr{X}}$-预覆盖，则有交换图

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\mu'"'] & N \arrow[r] \arrow[d, "\mu"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & L' \arrow[r] & X' \arrow[r] & N' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

因为 $\bar{\pi}'$：$X' \longrightarrow \bar{Y}'$ 是 $dg\widetilde{\mathscr{Y}}$-预包络，且有交换图

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\pi}'\bar{\mu}"'] & N \arrow[r] \arrow[d, "\pi'\mu"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & L' \arrow[r] & \bar{Y}' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

所以可得交换图

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d] & \bar{Y} \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\mu}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & L' \arrow[r] & \bar{Y}' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

因此有交换图

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d] & \bar{Y} \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\tau}"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\tau"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] & \bar{T} \arrow[r] & T \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L' \arrow[r] \arrow[d] & \bar{Y}' \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\tau}'"'] & Y' \arrow[r] \arrow[d, "\tau'"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & L' \arrow[r] & \bar{T}' \arrow[r] & T' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

所以对 $\forall\, i \leqslant \inf\{\mathscr{G}(\mathscr{Y})-\dim N,\ \mathscr{G}(\mathscr{Y})-\dim N'\}$，$\bar{\tau}_i$，$\bar{\tau}'_i$ 是双射．由此可得交换图

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[rr] & & L \arrow[rr] \arrow[dl, equal] \arrow[dd] & & \bar{Y} \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & Y \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd, "\bar{\mu}"'] & & 0 \\
0 \arrow[rr] & & L \arrow[rr] \arrow[dd] & & \bar{T} \arrow[rr] \arrow[dd] & & T \arrow[rr] \arrow[dd] & & 0 & \\
 & 0 \arrow[rr] & & L' \arrow[rr] \arrow[dl, equal] & & \bar{Y}' \arrow[rr, "\hat{\mu}"] \arrow[dl] & & Y' \arrow[rr] \arrow[dl] & & 0 \\
0 \arrow[rr] & & L' \arrow[rr] & & \bar{T}' \arrow[rr] & & T' \arrow[rr] & & 0 &
\end{tikzcd}
$$

因此得到了定理 2 所期望的交换图.

推论 1 设 N 是 $\mathscr{C}(\mathscr{A})$ 中的复形，n 为整数，则以下结论等价：

(i) $G(Y)-\dim N \geqslant -n$；

(ii) $\inf N \geqslant -n$，且存在 N 的 Tate $\mathscr{Y}$-余分解 $N \xrightarrow{\pi} Y \xrightarrow{\tau} T$，使得 $Z_{-n}(Y) \in \mathscr{G}(\mathscr{Y})$，特别地，有

$$\mathscr{G}(\mathscr{Y})-\dim N = \inf\{l \in \mathbb{Z} \mid N \xrightarrow{\pi} Y \xrightarrow{\tau} T \text{ 是 Tate } \mathscr{Y}\text{-余分解，使得 } i \leqslant -l,\ \tau_i \text{ 为双射}\}$$

3 Tate 上同调

定义 7 设 N 是 $\mathscr{C}(\mathscr{A})$ 中有有限 $\mathscr{G}(\mathscr{Y})$-余分解维数的复形，如果 $N \xrightarrow{\pi} Y \xrightarrow{\tau} T$ 是 N 的 Tate $\mathscr{Y}$-余分解，则对于任意整数 n，N 的第 n 个 Tate 上同调群为

$$\overline{\mathrm{Ext}}^n_{\mathscr{Y}\mathscr{A}}(M,\ N) = H_{-n}(\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(M,\ T))$$

态射 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(M,\ \tau)$：$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(M,\ Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(M,\ T)$ 诱导的 Abel 群同态为

$$\bar{\mathscr{A}}^n_{\varepsilon}(M,\ N)\text{：}\mathrm{Ext}^n_{\mathscr{Y}\mathscr{A}}(M,\ N) \longrightarrow \overline{\mathrm{Ext}}^n_{\mathscr{Y}\mathscr{A}}(M,\ N)$$

注 1　(i) 根据定理 2 可知，对于任意的整数 n，Tate 上同调函子的定义与 Tate 分解无关；

(ii) 设 N 的 Tate $\mathscr{Y}$-余分解为 $N \xrightarrow{\pi} Y \xrightarrow{\tau} T$，考虑 Y 的 Tate $\mathscr{Y}$-余分解为 $Y \xrightarrow{id_Y} Y \xrightarrow{\tau} T$，则对于任意的整数 i 和任意的复形 M，有 $\overline{\mathrm{Ext}}^i_{\mathscr{Y}\mathscr{A}}(M, N) \cong \overline{\mathrm{Ext}}^i_{\mathscr{Y}\mathscr{A}}(M, Y)$.

引理 1　设 $0 \longrightarrow N \longrightarrow N' \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$ 是 $\mathscr{C}(\mathscr{A})$ 中的正合序列，若 $\mathscr{G}(\mathscr{Y})-\dim N$ 和 $\mathscr{G}(\mathscr{Y})-\dim N''$ 有限，则有交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\pi"'] & N' \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\pi'"'] & N'' \arrow[r] \arrow[d, "\pi''"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r, "\widehat{\alpha}"] \arrow[d, "\tau"'] & Y' \arrow[r, "\widehat{\beta}"] \arrow[d, "\tau'"'] & Y'' \arrow[r] \arrow[d, "\tau''"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & T \arrow[r, "\widetilde{\alpha}"] & T' \arrow[r, "\widetilde{\beta}"] & T'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

使得列分别为 N, N' 和 N'' 的 Tate $\mathscr{Y}$-余分解.

证　证明与文献[12]的命题 4.8 对偶，在此不详细证明.

定理 3　设 M 是 $\mathscr{C}(\mathscr{A})$ 中的复形，考虑以下正合复形序列：

$$\mathbb{X} = 0 \longrightarrow N \longrightarrow N' \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$$

(i) 若 $\mathbb{X}$ 是有有限 $\mathbb{G}(\mathbb{Y})$-余分解维数的正合复形序列，则对于任意的整数 n，存在在 M 与 $\mathbb{X}$ 上自然的同态 $\overline{\chi}^n(M, \mathbb{X})$，使得序列

$$\cdots \longrightarrow \overline{\mathrm{Ext}}^n_{\mathscr{Y}\mathscr{A}}(M, N') \longrightarrow \overline{\mathrm{Ext}}^n_{\mathscr{Y}\mathscr{A}}(M, N'') \xrightarrow{\overline{\chi}^n(M,\ \mathbb{X})} \overline{\mathrm{Ext}}^{n+1}_{\mathscr{Y}\mathscr{A}}(M, N) \longrightarrow \cdots$$

是正合的，且链映射

$$\chi^n(M, \mathbb{X}): \mathrm{Ext}^n_{\mathscr{Y}\mathscr{A}}(M, N'') \longrightarrow \mathrm{Ext}^{n+1}_{\mathscr{Y}\mathscr{A}}(M, N)$$

满足 $\overline{\chi}^n(M, \mathbb{X}) \circ \overline{\mathscr{A}}^n_{\varepsilon}(M, N'') = \overline{\mathscr{A}}^{n+1}_{\varepsilon}(M, N) \circ \overline{\chi}^n(M, \mathbb{X})$.

(ii) 若 M 是有有限 $\mathscr{G}(\mathscr{Y})$-余分解维数的复形，则对于任意的整数 n，存在在 M 与 $\mathbb{X}$ 上自然的同态 $\overline{\chi}^n(M, \mathbb{X})$，使得序列

$$\cdots \longrightarrow \overline{\mathrm{Ext}}^n_{\mathscr{Y}\mathscr{A}}(N', M) \longrightarrow \overline{\mathrm{Ext}}^n_{\mathscr{Y}\mathscr{A}}(N, M) \xrightarrow{\overline{\chi}^n(\mathbb{X},\ M)} \overline{\mathrm{Ext}}^{n+1}_{\mathscr{Y}\mathscr{A}}(N'', M) \longrightarrow \cdots$$

是正合的，且链映射

$$\chi^n(\mathbb{X}, M): \mathrm{Ext}^n_{\mathscr{Y}\mathscr{A}}(N, M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{n+1}_{\mathscr{Y}\mathscr{A}}(N'', M)$$

满足 $\overline{\chi}^n(\mathbb{X}, M) \circ \overline{\mathscr{A}}^n_{\varepsilon}(N, M) = \overline{\mathscr{A}}^{n+1}_{\varepsilon}(N'', M) \circ \overline{\chi}^n(\mathbb{X}, M)$.

证　(i) 用 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(M, -)$ 作用引理 1 中交换图的下两行，可得交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(M,Y) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(M,\tau)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(M,Y') \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(M,\tau')"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(M,Y'') \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(M,\tau'')"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(M,T) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(M,T') \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(M,T'') \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

其中行是正合的，第二行诱导同调的正合序列是我们所期望得到的长正合序列. 由图的交换性得到了链映射的合成. 在 M 上的自然性显然. 取态射 $\mathbb{X} \longrightarrow \overline{\mathbb{X}}$，可得交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T \arrow[r, "\widetilde{\alpha}"] \arrow[d] & T' \arrow[r, "\widetilde{\beta}"] \arrow[d] & T'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \overline{T} \arrow[r, "\overline{\widetilde{\alpha}}"] & \overline{T}' \arrow[r, "\overline{\widetilde{\beta}}"] & \overline{T}'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

用 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(M, -)$ 作用以上交换图，可得交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(M,T) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(M,T') & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(M,T'') & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(M,\overline{T}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(M,\overline{T}') & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(M,\overline{T}'') & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

所以可得在 $\mathbb{X}$ 上的自然性.

(ii) N 的一个 Tate $\mathscr{Y}$-余分解 $N \xrightarrow{\pi} Y \xrightarrow{\tau} T$ 所诱导的复形的交换图为

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(N'',Y) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(N',Y) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(N,Y) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(N'',\tau)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(N',\tau)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(N,\tau)} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(N'',T) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(N',T) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(N,T) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

其中行是正合的，第二行诱导同调的正合序列是我们所期望得到的长正合序列. 由图的交换性得到了链映射的合成. 在 $\mathbb{X}$ 上的自然性是显然的，由定理 2 可得在 M 上的自然性.

参考文献:

[1] AVRAMOV L L, MARTSINKOVSKY A. Absolute, Relative, and Tate Cohomology of Modules of Finite Gorenstein Dimension [J]. Proc London Math Soc, 2002, 85(2): 393-440.

[2] VELICHE O. Gorenstein Projective Dimension for Complexes [J]. Trans Amer Math Soc, 2006, 358(3): 1257-1283.

[3] ASADOLLAHI J, SALARIAN S. Gorenstein Injective Dimension for Complexes and Iwanaga-Gorenstein Rings [J]. Comm Algebra, 2006, 34(8): 3009-3022.

[4] YANG X Y, DING, N Q. On a Question of Gillespie [J]. Forum Math, 2015, 27(6): 3205-3231.

[5] YANG G, LIU Z K. Cotorsion Pairs and Model Structures on Ch(R) [J]. Proc Edinburgh Math Soc, 2011, 54(3): 783-797.

[6] 魏宝军，于春艳，杨晓燕. Gorenstein 投射复形范畴中的纯正合列 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2020, 45(2): 7-10.

[7] YANG X Y, CHEN W J. Relative Homological Dimensions and Tate Cohomology of Complexes with Respect to Cotorsion Pairs [J]. Comm Algebra, 2017, 45(7): 2875-2888.

[8] 魏宝军，杨晓燕. GProj$R$ 中的 FP-投射模及维数 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2017, 39(10): 58-61.

[9] GILLESPIE J. The Flat Model Structure on Ch(R) [J]. Trans Amer Math Soc, 2004, 356(8): 3369-3390.

[10] 叶星美，杨晓燕. n-强 F-Gorenstein 投射模 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2015, 37(10): 84-88.

[11] BRAVO D, GILLESPIE J, HOVEY M. The Stable Module Category of a General Ring [EB/OL]. [2020-01-05]. https://arxiv.org/abs/1405.5768.

[12] XING J M, ZHAO T W, LI Y X, et al. Tate Cohomology for Complexes with Finite Gorenstein AC-Injective Dimension [J]. Bulletion of Iran Math Soc, 2019, 45(1): 103-125.

Tate Cohomology of Complexes with Respect to Cotorsion Pairs

CHEN Zao-hong, YANG Xiao-yan

School of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China

Abstract: Let $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ be a complete and hereditary cotorsion pair in a bicomplete abelian category $\mathscr{A}$. We give definition of Gorenstein category $\mathscr{G}(\mathscr{Y})$ of complexes and Tate-coresolution, and the definition of Tate cohomology with respect to $\mathscr{G}(\mathscr{Y})$ is given. In addition, we also study the interaction between the corresponding relative and Tate cohomologies of complexes with respect to the cotorsion pairs.

Key words: cotorsion pair; Tate-coresolution; Tate cohomology

责任编辑 廖 坤