第 46 卷　第 2 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2021 年 2 月
Vol. 46　No. 2　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Feb. 2021

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2021.02.006

一类分数阶 Kirchhoff 方程的半经典解[①]

杜佳璐，　吕　颖

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：在位势函数满足局部条件的假设下，应用惩罚方法，讨论了带有超线性、次临界增长非线性项的分数阶 Kirchhoff 方程，证明了该方程半经典解的存在性.

关　键　词：分数阶 Kirchhoff 方程；惩罚方法；半经典解

中图分类号：**O176.3**　　**文献标志码**：**A**　　**文章编号**：1000-5471(2021)02-0030-07

考虑如下一类分数阶 Kirchhoff 方程半经典解的存在性：

$$\begin{cases} \left(\varepsilon^{2s}a+\varepsilon^{4s-3}b\int_{\mathbb{R}^3}|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u|^2\mathrm{d}x\right)(-\Delta)^s u+V(x)u=\Gamma(x)f(u) & x\in\mathbb{R}^3 \\ u\in H^s(\mathbb{R}^3),\ u(x)>0 & x\in\mathbb{R}^3 \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\varepsilon>0$ 是一个很小的参数，$a,b>0$，$s\in\left(\frac{3}{4},1\right)$，$H^s(\mathbb{R}^3)$ 是分数阶 Sobolev 空间，定义为

$$H^s(\mathbb{R}^3)=\left\{u\in L^2(\mathbb{R}^3):\iint_{\mathbb{R}^6}\frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{3+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\infty\right\}$$

$(-\Delta)^s$ 是通常的分数阶拉普拉斯算子，光滑函数 $u:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ 的分数阶拉普拉斯算子$(-\Delta)^s$ 定义为

$$\mathscr{F}((-\Delta)^s(u))(\xi)=|\xi|^{2s}\mathscr{F}(u)(\xi)\qquad \xi\in\mathbb{R}^3$$

其中 $\mathscr{F}$ 为傅里叶变换，即

$$\mathscr{F}(w)(\xi)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot x}w(x)\mathrm{d}x$$

方程(1) 的能量泛函 $I_\varepsilon:H_\varepsilon\longrightarrow\mathbb{R}$ 为

$$I_\varepsilon(u)=\frac{\varepsilon^{2s}}{2}\int_{\mathbb{R}^3}a|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}V(x)u^2\mathrm{d}x+\frac{b}{4}\varepsilon^{4s-3}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u|^2\mathrm{d}x\right)^2-\int_{\mathbb{R}^3}\Gamma(x)F(u)\mathrm{d}x$$

其中

$$H_\varepsilon=\left\{u\in H^s(\mathbb{R}^3):\int_{\mathbb{R}^3}V(x)u^2\mathrm{d}x<\infty\right\}$$

它的范数为

$$\|u\|_\varepsilon^2=\int_{\mathbb{R}^3}(\varepsilon^{2s}a|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u|^2+V(x)u^2)\mathrm{d}x$$

关于 Kirchhoff 方程半经典解的存在性和多重性已有很多的结果[1-10]．但是关于分数阶 Kirchhoff 方程

① 收稿日期：2020-06-18
基金项目：国家自然科学基金项目(11601438).
作者简介：杜佳璐，硕士研究生，主要从事非线性泛函分析的研究.
通信作者：吕　颖，教授.

的结果比较少，其中大多数都是自治情形（即 $\Gamma=1$）下的结果，例如，文献[7] 研究了下面的方程：

$$\left(\varepsilon^{2s}a+\varepsilon^{4s-3}b\int_{\mathbb{R}^3}|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u|^2\mathrm{d}x\right)(-\Delta)^s u+V(x)u=f(u)\qquad x\in\mathbb{R}^3 \tag{2}$$

其中 $V(x)$ 满足如下局部条件：

(V_1) $V\in C(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$，使得 $V_0=\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^3}V(x)>0$；

(V_2) 存在有界开集 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$，使得 $V_0<\min\limits_{x\in\partial\Omega}V$，且集合 $M=\{x\in\Omega:V(x)=V_0\}\neq\varnothing$.

应用 Ljusternik-Schnirelmann 理论[8] 和极小极大原理，文献[7] 得到方程(2) 多个正解的存在性．至今关于非自治的分数阶 Kirchhoff 方程半经典解的结果几乎没有，本文利用惩罚方法，证明非自治方程(1) 半经典解的存在性.

假设 f 满足下面的条件(f_1)—(f_4)：

(f_1) $f\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$，且当 $t\to 0^+$ 时，$f(t)=o(t^3)$；

(f_2) 存在常数 $q\in(4,2_s^*)$，使得 $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{f(t)}{t^{q-1}}=0$，其中 $2_s^*=\dfrac{6}{3-2s}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的分数阶临界指数；

(f_3) 存在常数 $\theta\in(4,2_s^*)$，使得 $0<\theta F(t)=\theta\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\leqslant tf(t)$ 对于任意的 $t>0$ 成立；

(f_4) 当 $t\in(0,\infty)$ 时，$\dfrac{f(t)}{t^3}$ 是严格单调递增的.

V 和 Γ 满足条件(V_1) 及如下的条件：

(Γ) $\Gamma\in L^\infty(\mathbb{R})^3$ 是连续的，且存在常数 $\beta>0$，使得对任意的 $x\in\mathbb{R}^3$，有 $\Gamma(x)\geqslant\beta$；

(Ω) 存在有界开集 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$，使得：

(i) 存在 $x_{\min}\in\Omega$ 满足 $V(x_{\min})=V_0<\min\limits_{x\in\partial\Omega}V$，且 $\Gamma(x_{\min})=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^3}\Gamma$；

或者

(ii) 存在 $x_{\max}\in\Omega$ 满足 $\Gamma(x_{\max})=\Gamma_0>\max\limits_{x\in\partial\Omega}\Gamma$，其中 $\Gamma_0=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^3}\Gamma(x)$，且 $V(x_{\max})=\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^3}V$.

注 1　因为我们考虑方程(1) 的半经典解的存在性，所以当 $x\in(-\infty,0)$ 时，假设 $f(x)=0$.

注 2　不失一般性，我们可以假设 $|\Gamma|_\infty=1$，其中 $|\cdot|_p$ 定义为通常的 L^p -范数，这里的 $p\geqslant1$ 或者 $p=\infty$. 因此，有

$$\Gamma(x)f(u)=\frac{\Gamma(x)}{|\Gamma|_\infty}|\Gamma|_\infty f(u)$$

取

$$\hat{\Gamma}(x)=\frac{\Gamma(x)}{|\Gamma|_\infty}\qquad \hat{f}(u)=|\Gamma|_\infty f(u)$$

易知 $\hat{\Gamma}(x)$ 和 $\hat{f}(u)$ 仍然满足上述的关于 Γ 和 f 的所有条件，且 $|\hat{\Gamma}|_\infty=1$. 因此，在这篇论文中，我们取 $|\Gamma|_\infty=1$.

定理 1　假设条件(V_1),(Γ),(Ω) 和(f_1)—(f_4) 成立，$s\in\left(\dfrac{3}{4},1\right)$，则存在 $\varepsilon_0>0$，使得对任意的 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$，方程(1) 有半经典解 u_ε. 此外，如果 $\eta_\varepsilon\in\mathbb{R}^3$ 是 u_ε 的全局最大值点，则有

$$u_\varepsilon(x)\leqslant\frac{C\varepsilon^{3+2s}}{\varepsilon^{3+2s}+|x-\eta_\varepsilon|^{3+2s}}$$

由条件(f_1),(f_3),(f_4)，我们可以得到 $\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{f(t)}{t}=0$，$\dfrac{f(t)}{t}$ 在区间 $(0,\infty)$ 上是单调递增的．固定 $K>4$，由条件(f_3),(f_4) 知，存在 $a_0>0$ 使得 $f(a_0)=\dfrac{V_0}{K}a_0$．于是，采用文献[11] 所介绍的惩罚方法，定义

$$\tilde{f}(t)=\begin{cases}f(t) & t\leqslant a_0\\ \dfrac{V_0}{K}t & t>a_0\end{cases} \tag{3}$$

其中 V_0 在条件(V_1)中有定义．若 χ_Ω 定义为集合 Ω 的特征函数，引入惩罚函数 g：$\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 满足

$$g(x,t)=\chi_\Omega(x)\Gamma(x)f(t)+(1-\chi_\Omega(x))\Gamma(x)\tilde{f}(t)$$

由条件(f_1)－(f_4)，容易验证 g 满足下面的性质：

(g_1) $\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{g(x,t)}{t^3}=0$ 关于 $x\in\mathbb{R}^3$ 一致成立；

(g_2) 对于任意的 $x\in\mathbb{R}^3$ 和 $t>0$，$g(x,t)\leqslant f(t)$；

(g_3) 存在 $\theta\in(4,2_s^*)$，使得：

(i) 对于任意的 $x\in\Omega$ 和 $t>0$，有 $0\leqslant\theta G(x,t)=\theta\int_0^t g(x,s)\mathrm{d}s<g(x,t)t$，

(ii) 对于任意的 $x\in\mathbb{R}^3\backslash\Omega$ 和 $t>0$，有 $0\leqslant 2G(x,t)<g(x,t)t\leqslant\dfrac{V_0}{K}t^2$；

(g_4) 对于任意的 $x\in\Omega$，函数 $t\longmapsto\dfrac{g(x,t)}{t^3}$ 在区间 $(0,\infty)$ 上是单调递增的，并且对于任意的 $x\in\mathbb{R}^3\backslash\Omega$，函数 $t\longmapsto\dfrac{g(x,t)}{t^3}$ 在区间 $(0,a_0)$ 上是单调递增的．

我们注意到，如果 u_ε 是下面这个方程的正解：

$$\begin{cases}\left(\varepsilon^{2s}a+\varepsilon^{4s-3}b\int_{\mathbb{R}^3}|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u|^2\mathrm{d}x\right)(-\Delta)^s u+V(x)u=g(x,u) & x\in\mathbb{R}^3\\ u\in H^s(\mathbb{R}^3),\ u(x)>0 & x\in\mathbb{R}^3\end{cases}\tag{4}$$

并且对于任意的 $x\in\mathbb{R}^3\backslash\Omega$ 有 $u_\varepsilon(x)\leqslant a$，则 $g(x,u_\varepsilon)=\Gamma(x)f(u_\varepsilon)$，因此 $u_\varepsilon(x)$ 也是方程(1)的解．方程(4)的弱解是泛函 $J_\varepsilon\in C^1(H_\varepsilon,\mathbb{R})$ 正的临界点，J_ε 的定义为

$$J_\varepsilon(u)=\frac{\varepsilon^{2s}}{2}\int_{\mathbb{R}^3}a\,|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}V(x)u^2\mathrm{d}x+$$
$$\frac{b}{4}\varepsilon^{4s-3}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u|^2\mathrm{d}x\right)^2-\int_{\mathbb{R}^3}G(x,u)\mathrm{d}x$$

由文献[7]中的命题2.10知，泛函 J_ε 有正的临界点 $u_\varepsilon\in H_\varepsilon$ 满足 $J_\varepsilon(u_\varepsilon)=c_\varepsilon$，其中

$$c_\varepsilon=\inf_{u\in H_\varepsilon\backslash\{0\}}\sup_{t\geqslant0}J_\varepsilon(tu)$$

下面我们将证明惩罚方程(4)的解 u_ε 是方程(1)的解．

由于当 Ω 和 Γ 满足条件(Ω)的情形(ii)时，结论的证明与条件(Ω)的情形(i)的证明类似，这里就只讨论 Ω 和 Γ 满足条件(Ω)的情形(i)．由文献[7]知下面的方程存在一个最低能量解 $w\in H^s(\mathbb{R}^3)$：

$$\left(a+b\int_{\mathbb{R}^3}|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u|^2\mathrm{d}x\right)(-\Delta)^s u+V_0u=\Gamma_0f(u)\tag{5}$$

即

$$c_0=J_0(w)=\inf_{u\in H^s(\mathbb{R}^3)\backslash\{0\}}\sup_{t\geqslant0}J_0(tu)$$

其中

$$J_0(u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(a\,|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u|^2+V_0u^2)\mathrm{d}x+\frac{b}{4}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u|^2\mathrm{d}x\right)^2-\int_{\mathbb{R}^3}\Gamma_0F(u)\mathrm{d}x$$

引理 1 当 $\varepsilon\to0^+$ 时，泛函 $J_\varepsilon(u_\varepsilon)\leqslant\varepsilon^3(c_0+o(1))$．

证 设 $x_0\in\Omega$，使得 $V(x_0)=V_0$，令 $u(x)=w\left(\dfrac{x-x_0}{\varepsilon}\right)$，则存在某个 $t_0>0$ 使得

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon)\leqslant\sup_{t>0}J_\varepsilon(tu)=J_\varepsilon(t_0u)$$

于是

$$J_\varepsilon(t_0u)=$$
$$\varepsilon^3\left[\frac{t_0^2}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(a\,|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}w|^2+V(x_0+\varepsilon x)w^2)\mathrm{d}x+\frac{b}{4}t_0^4\left(\int_{\mathbb{R}^3}|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}w|^2\mathrm{d}x\right)^2-\int_{\mathbb{R}^3}G(x_0+\varepsilon x,t_0w)\mathrm{d}x\right]=$$
$$\varepsilon^3\left[J_0(t_0w)+\frac{t_0^2}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(V(x_0+\varepsilon x)-V_0)w^2\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}\Gamma_0F(t_0w)\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}G(x_0+\varepsilon x,t_0w)\mathrm{d}x\right]$$

根据$\langle J_\varepsilon'(t_0 u),\ t_0 u\rangle = 0$，条件$(f_1)$，$(f_2)$ 和(g_2)，存在某个正常数 C，使得

$$\int_{\mathbb{R}^3} V(x_0+\varepsilon x)w^2\mathrm{d}x \leqslant C\left(\int_{\mathbb{R}^3} w^2\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3} w^q\mathrm{d}x\right)$$

由条件(g_2)，有 $G(x_0+\varepsilon x,\ t_0 w)\leqslant F(t_0 w)$. 由条件$(f_1)$，$(f_2)$，易得

$$\int_{\mathbb{R}^3} G(x_0+\varepsilon x,\ t_0 w)\mathrm{d}x \leqslant C\left(\int_{\mathbb{R}^3} w^2\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3} w^q\mathrm{d}x\right)$$

由 Lebesgue 控制收敛定理，当 $\varepsilon\to 0$ 时，有

$$\int_{\mathbb{R}^3} V(x_0+\varepsilon x)w^2\mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^3} V_0 w^2\mathrm{d}x$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} G(x_0+\varepsilon x,\ t_0 w)\mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^3} \Gamma(x_0)F(t_0 w)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3} \Gamma_0 F(t_0 w)$$

因此

$$J_\varepsilon(t_0 u) = \varepsilon^3(J_0(t_0 w)+o(1)) \leqslant \varepsilon^3(c_0+o(1))$$

引理 2　存在常数 $C>0$，使得$\int_{\mathbb{R}^3}(\varepsilon^{2s}a\,|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u_\varepsilon|^2+V(x)\,|u_\varepsilon|^2)\mathrm{d}x \leqslant C\varepsilon^3$.

证　由于$\langle J_\varepsilon'(u_\varepsilon),\ u_\varepsilon\rangle = 0$，即

$$\int_{\mathbb{R}^3}(\varepsilon^{2s}a\,|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u_\varepsilon|^2+V(x)\,|u_\varepsilon|^2)\mathrm{d}x + \varepsilon^{4s-3}b\left(\int_{\mathbb{R}^3}|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u_\varepsilon|^2\mathrm{d}x\right)^2 = \int_{\mathbb{R}^3} g(x,\ u_\varepsilon)u_\varepsilon\mathrm{d}x$$

因此由引理 1 可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(\varepsilon^{2s}a\,|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u_\varepsilon|^2+V(x)\,|u_\varepsilon|^2)\mathrm{d}x = \\
&J_\varepsilon(u_\varepsilon)+\int_{\mathbb{R}^3}G(x,\ u_\varepsilon)\mathrm{d}x - \frac{b}{4}\varepsilon^{4s-3}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u_\varepsilon|^2\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \\
&\varepsilon^3(c_0+o(1)) + \frac{1}{\theta}\int_\Omega g(x,\ u_\varepsilon)u_\varepsilon\mathrm{d}x + \frac{1}{2K}\int_{\mathbb{R}^3}V(x)\,|u_\varepsilon|^2\mathrm{d}x - \frac{b}{4}\varepsilon^{4s-3}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u_\varepsilon|^2\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \\
&C_1\varepsilon^3 + \left(\frac{1}{\theta}+\frac{1}{2K}\right)\int_{\mathbb{R}^3}(\varepsilon^{2s}a\,|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u_\varepsilon|^2+V(x)\,|u_\varepsilon|^2)\mathrm{d}x + \left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{4}\right)\varepsilon^{4s-3}b\left(\int_{\mathbb{R}^3}|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u_\varepsilon|^2\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \\
&C_1\varepsilon^3 + \left(\frac{1}{\theta}+\frac{1}{2K}\right)\int_{\mathbb{R}^3}(\varepsilon^{2s}a\,|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u_\varepsilon|^2+V(x)\,|u_\varepsilon|^2)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

于是，我们有

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}-\frac{1}{2K}\right)\int_{\mathbb{R}^3}(\varepsilon^{2s}a\,|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u_\varepsilon|^2+V(x)\,|u_\varepsilon|^2)\mathrm{d}x \leqslant C_1\varepsilon^3$$

因为 $\theta>4$，$K>4$，则

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}-\frac{1}{2K} = \frac{1}{2}\left(\frac{\theta-2}{\theta}-\frac{1}{K}\right) > \frac{1}{8}$$

则存在某常数 C，使得引理 2 成立.

引理 3　若 $\varepsilon_n\to 0^+$，$\{x_n\}\subset\overline{\Omega}$，使得 $u_{\varepsilon_n}(x_n)\geqslant\gamma>0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}V(x_n)=V_0$.

证　反证法证明. 假设引理 3 不成立，则存在子列$\{x_n\}$，$x_n\to\bar{x}\in\overline{\Omega}$，使得 $V(\bar{x})>V_0$. 令 $v_n(x)=u_{\varepsilon_n}(x_n+\varepsilon_n x)$，显然 v_n 满足方程

$$\left(a+b\int_{\mathbb{R}^3}|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}v_n|^2\mathrm{d}x\right)(-\Delta)^s v_n + V(\varepsilon_n x+x_n)v_n = g(\varepsilon_n x+x_n,\ v_n) \tag{6}$$

相关的能量泛函为

$$J_n(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(a\,|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u|^2+V(\varepsilon_n x+x_n)u^2)\mathrm{d}x + \frac{b}{4}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u|^2\mathrm{d}x\right)^2 - \int_{\mathbb{R}^3}G(\varepsilon_n x+x_n,\ u)\mathrm{d}x$$

由引理 2 知$\{v_n\}$是有界的，因此存在某个 $v\in H^s(\mathbb{R}^3)$，使得 $v_n\rightharpoonup v$. 由于对任意的 $t>0$，有

$$J_0(tv_n) = \frac{1}{2}t^2\int_{\mathbb{R}^3}(a\,|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}v_n|^2+V_0 v_n^2)\mathrm{d}x + \frac{b}{4}t^4\left(\int_{\mathbb{R}^3}|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}v_n|^2\mathrm{d}x\right)^2 - \int_{\mathbb{R}^3}\Gamma_0 F(tv_n)\mathrm{d}x$$

由条件$(f_1)-(f_3)$ 易得：当 $t>0$ 足够小时，$J_0(tv_n)>0$；当 $t\to\infty$ 时，$J_0(tv_n)\to-\infty$. 则存在 $t_n>0$ 使

得 $J_0(t_nv_n)=\max\limits_{t\geqslant 0}J_0(tv_n)$. 设 $\tilde{v}_n=t_nv_n$,因此 $c_0\leqslant J_0(\tilde{v}_n)$. 由于 v_n 是方程(6)的弱解,所以 $J_n(v_n)=\max\limits_{t\geqslant 0}J_n(tv_n)$,于是

$$\begin{aligned}
&c_0\leqslant J_0(\tilde{v}_n)=\\
&\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(a\,|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}\tilde{v}_n|^2+V_0\tilde{v}_n^2)\mathrm{d}x+\frac{b}{4}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}\tilde{v}_n|^2\mathrm{d}x\right)^2-\int_{\mathbb{R}^3}\Gamma_0F(\tilde{v}_n)\mathrm{d}x\leqslant\\
&\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(a\,|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}\tilde{v}_n|^2+V(\varepsilon_nx+x_n)\tilde{v}_n^2)\mathrm{d}x+\frac{b}{4}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}\tilde{v}_n|^2\mathrm{d}x\right)^2-\int_{\mathbb{R}^3}\Gamma(\varepsilon_nx+x_n)F(\tilde{v}_n)\mathrm{d}x\leqslant\\
&\frac{t_n^2}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(a\,|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}v_n|^2+V(\varepsilon_nx+x_n)v_n^2)\mathrm{d}x+\frac{b}{4}t_n^4\left(\int_{\mathbb{R}^3}|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}v_n|^2\mathrm{d}x\right)^2-\int_{\mathbb{R}^3}G(\varepsilon_nx+x_n,t_nv_n)\mathrm{d}x=\\
&J_n(t_nv_n)\leqslant J_n(v_n)=\varepsilon_n^{-3}J_{\varepsilon_n}(u_{\varepsilon_n})\leqslant c_0+o(1)
\end{aligned}$$

其中最后一个不等式由引理1得到,从而 $\lim\limits_{n\to\infty}J_0(\tilde{v}_n)=c_0$. 易知 $\{\tilde{v}_n\}$ 是有界的,因此存在某个 $\tilde{v}\in H^s(\mathbb{R}^3)$,使得 $\tilde{v}_n\rightharpoonup\tilde{v}$. 事实上,由 Ekeland 变分原理[12]知,存在序列

$$\{w_n\}\subset\mathcal{N}_0=\{u\in H^s(\mathbb{R}^3)\backslash\{0\}:\langle J_0'(u),u\rangle=0\}$$

满足 $w_n=\tilde{v}_n+o_n(1)$, $J_0(w_n)\to c_0$ 且

$$J_0'(w_n)-\lambda_n\phi'(w_n)=o_n(1)$$

其中 λ_n 是实数. 对于任意的 $w\in H^s(\mathbb{R}^3)$, $\phi(w)=\langle J_0'(w),w\rangle$. 由条件($f_4$)和 $\{w_n\}\subset\mathcal{N}_0$,可以得到

$$\begin{aligned}
\langle\phi'(w_n),w_n\rangle=&-2\int_{\mathbb{R}^3}(a\,|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}w_n|^2+V_0w_n^2)\mathrm{d}x+3\int_{\mathbb{R}^3}\Gamma_0f(w_n)w_n\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}\Gamma_0f'(w_n)\,|w_n|^2\mathrm{d}x\leqslant\\
&\Gamma_0\int_{\mathbb{R}^3}(3f(w_n)w_n-f'(w_n)\,|w_n|^2)\mathrm{d}x\leqslant 0
\end{aligned}$$

容易得到 $\{w_n\}$ 是有界的,且

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^3}(a\,|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}w_n|^2+V_0w_n^2)\mathrm{d}x\neq 0$$

我们声称存在序列 $\{y_n\}\subset\mathbb{R}^3$ 和常数 $R>0$, $\delta>0$,使得

$$\lim_{n\to\infty}\sup\int_{B_R(y_n)}w_n^2\mathrm{d}x\geqslant\delta>0$$

如果不成立,则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{y\in\mathbb{R}^3}\int_{B_R(y)}w_n^2\mathrm{d}x=0$. 由文献[13]可得,对于任意的 $p\in(2,2_s^*)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^3}|w_n|^p\mathrm{d}x=0$. 注意到 $\{w_n\}\subset\mathcal{N}_0$,容易验证

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^3}(a\,|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}w_n|^2+V_0w_n^2)\mathrm{d}x=0$$

矛盾. 设 $\tilde{w}_n=w_n(x+y_n)$,易知 $\tilde{w}_n$ 在 $H^s(\mathbb{R}^3)$ 中是有界的,则存在 $\tilde{w}\neq 0$,使得 $\tilde{w}_n\rightharpoonup\tilde{w}$. 因此存在正测度的子集 $\Lambda\subset\mathbb{R}^3$,使得 $\tilde{w}>0$ 几乎处处成立于 Λ. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\langle\phi'(w_n),w_n\rangle=0$,则由条件($f_4$)和 Fatou 引理,有

$$0>\int_{\Lambda}(f(\tilde{w})\tilde{w}-f'(\tilde{w})\,|\tilde{w}|^2)\mathrm{d}x\geqslant 0$$

矛盾,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\langle\phi'(w_n),w_n\rangle<0$. 由 $\lambda_n\langle\phi'(w_n),w_n\rangle=o_n(1)$,可得 $\lambda_n=o_n(1)$,则 $J_0(w_n)\to c_0$, $J_0'(w_n)\to 0$. 不失一般性,则有 $J_0(\tilde{v}_n)\to c_0$ 和 $J_0'(\tilde{v}_n)\to 0$,因此 $J_0'(\tilde{v})=0$,即 $\tilde{v}$ 是方程(5)的弱解,所以

$$J_0(\tilde{v})=\max_{t\geqslant 0}J_0(t\tilde{v})\geqslant\inf_{u\in H^s(\mathbb{R}^3)\backslash\{0\}}\sup_{t\geqslant 0}J_0(tu)=c_0$$

由 Fatou 引理可得

$$\begin{aligned}
c_0\leqslant J_0(\tilde{v})=&J_0(\tilde{v})-\frac{1}{4}\langle J_0'(\tilde{v}),\tilde{v}\rangle=\\
&\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}(a\,|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}\tilde{v}|^2+V_0\tilde{v}^2)\mathrm{d}x+\Gamma_0\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{4}f(\tilde{v})\tilde{v}-F(\tilde{v})\right)\mathrm{d}x\leqslant\\
&\liminf_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}(a\,|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}\tilde{v}_n|^2+V_0\tilde{v}_n^2)\mathrm{d}x+\Gamma_0\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{4}f(\tilde{v}_n)\tilde{v}_n-F(\tilde{v}_n)\right)\mathrm{d}x\right\}=
\end{aligned}$$

$$\liminf_{n\to\infty}\left(J_0(\tilde{v}_n)-\frac{1}{4}\langle J_0'(\tilde{v}_n),\tilde{v}_n\rangle\right)\leqslant c_0$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^3}(a\,|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}\tilde{v}_n|^2+V_0\tilde{v}_n^2)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^3}(a\,|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}\tilde{v}|^2+V_0\tilde{v}^2)\mathrm{d}x$$

即在 $H^s(\mathbb{R}^3)$ 中 $\tilde{v}_n\to\tilde{v}$.

由 $V(\bar{x})>V_0$，$\tilde{v}_n\to\tilde{v}$，以及 Fatou 引理和引理 1 可得

$$\begin{aligned}
&c_0\leqslant J_0(\tilde{v})<\\
&\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(a\,|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}\tilde{v}|^2+V(\bar{x})\tilde{v}^2)\mathrm{d}x+\frac{b}{4}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}\tilde{v}|^2\mathrm{d}x\right)^2-\int_{\mathbb{R}^3}\Gamma(\bar{x})F(\tilde{v})\mathrm{d}x\leqslant\\
&\liminf_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(a\,|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}\tilde{v}_n|^2+V(\varepsilon_nx+x_n)\tilde{v}_n^2)\mathrm{d}x+\frac{b}{4}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}\tilde{v}_n|^2\mathrm{d}x\right)^2-\int_{\mathbb{R}^3}\Gamma(\varepsilon_nx+x_n)F(\tilde{v}_n)\mathrm{d}x\right]\leqslant\\
&\liminf_{n\to\infty}\left[\frac{t_n^2}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(a\,|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}v_n|^2+V(\varepsilon_nx+x_n)v_n^2)\mathrm{d}x+\frac{b}{4}t_n^4\left(\int_{\mathbb{R}^3}|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}v_n|^2\mathrm{d}x\right)^2-\int_{\mathbb{R}^3}G(\varepsilon_nx+x_n,t_nv_n)\mathrm{d}x\right]=\\
&\liminf_{n\to\infty}J_n(t_nv_n)\leqslant\liminf_{n\to\infty}J_n(v_n)=\liminf_{n\to\infty}\varepsilon_n^{-3}J_{\varepsilon_n}(u_{\varepsilon_n})\leqslant c_0
\end{aligned}$$

矛盾．则假设不成立，引理 3 证毕．

引理 4　$\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}m_\varepsilon=0$，其中 $m_\varepsilon=\max\limits_{x\in\partial\Omega}u_\varepsilon$.

证　假设引理 4 不成立，即当 $\varepsilon\to0^+$ 时，$m_\varepsilon\not\to0$．设 $x_\varepsilon\in\partial\Omega\subset\bar{\Omega}$ 使得 $u_\varepsilon(x_\varepsilon)=m_\varepsilon$，则存在子序列 $\{u_{\varepsilon_n}\}$ 使得 $u_{\varepsilon_n}(x_{\varepsilon_n})\geqslant\gamma>0$，$x_{\varepsilon_n}\to x_0\in\partial\Omega$．由引理 3 和条件(Ω)的情形(i)得

$$\min_{x\in\partial\Omega}V\leqslant\lim_{n\to\infty}V(x_{\varepsilon_n})=V(x_0)=V_0<\min_{x\in\partial\Omega}V$$

矛盾．所以引理 4 证毕．

定理 1 的证明　设 u_ε 是 J_ε 正的临界点，由引理 4 知，存在 $\varepsilon_0>0$ 使得对任意的 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ 有 $m_\varepsilon<a_0$，其中 a_0 为分段函数(3)的分界点．所以，当 $x\in\partial\Omega$ 时，$u_\varepsilon(x)<a_0$．因此，由极大值原理，对任意的 $x\in\Omega$ 有 $u_\varepsilon(x)\leqslant a_0$．取 $(u_\varepsilon-a_0)_+=\max\{u_\varepsilon-a_0,0\}$ 作为 J_ε 的测试函数，可以得到

$$\begin{aligned}
0=&\langle J'_\varepsilon(u_\varepsilon),(u_\varepsilon-a_0)_+\rangle=\\
&\int_{\mathbb{R}^3\setminus\Omega}[\varepsilon^{2s}a\,|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}(u_\varepsilon-a_0)_+|^2+b\varepsilon^{4s-3}|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u_\varepsilon|^2|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}(u_\varepsilon-a_0)_+|^2+\\
&c(x)(u_\varepsilon-a_0)_+^2+a_0c(x)(u_\varepsilon-a_0)_+]\mathrm{d}x
\end{aligned}\tag{7}$$

其中

$$c(x)=V(x)-\frac{g(x,u_\varepsilon)}{u_\varepsilon}$$

此外，当 $x\in\mathbb{R}^3\setminus\Omega$ 时，因为 $|\Gamma|_\infty=1$，所以 $\dfrac{g(x,u_\varepsilon)}{u_\varepsilon}\leqslant\dfrac{V_0}{K}$．因此，当 $x\in\mathbb{R}^3\setminus\Omega$ 时，有 $c(x)>0$，所以(7)式最后一个等式中每一项都等于 0，因此 $(u_\varepsilon-a_0)_+=0$，即当 $x\in\mathbb{R}^3\setminus\Omega$ 时，$u_\varepsilon(x)\leqslant a_0$．由此可得 $g(x,u_\varepsilon)=\Gamma(x)f(u_\varepsilon)$，因此 u_ε 是方程(1)的正解．u_ε 的衰减性是一个经典的验证，参见文献[7]，可以得到：如果 $\eta_\varepsilon\in\mathbb{R}^3$ 是 u_ε 的全局最大值点，则有

$$u_\varepsilon(x)\leqslant\frac{C\varepsilon^{3+2s}}{\varepsilon^{3+2s}+|x-\eta_\varepsilon|^{3+2s}}$$

因此定理 1 证毕．

参考文献：

[1]　LIU Z S，GUO S J. Existence and Concentration of Positive Ground States for a Kirchhoff Equation Involving Critical Sobolev Exponent [J]. Z Angew Math Phys，2015，66(3)：747-769.

[2]　彭秋颖，吕　颖．带有临界指数的 Kirchhoff 方程最小能量变号解的存在性 [J]．西南师范大学学报(自然科学版)，2019，44(10)：23-29.

[3]　FIGUEIREDO G M，IKOMA N，SANTOS J R. Existence and Concentration Result for the Kirchhoff Type Equations

with General Nonlinearities [J]. Arch Ration Mech Anal, 2014, 213(3): 931-979.
[4] 刘晓琪,欧增奇. 一类 Kirchhoff 型分数阶 p-拉普拉斯方程无穷解的存在性 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2017, 39(4): 70-75.
[5] 梁志霞,欧增奇. 分数阶椭圆方程近共振问题解的多重性 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2018, 40(2): 64-69.
[6] HE X M, ZOU W M. Existence and Concentration Behavior of Positive Solutions for a Kirchhoff Equation in $\mathbb{R}^3$ [J]. J Differential Equations, 2012, 252(2): 1813-1834.
[7] HE X M, ZOU W M. Multiplicity of Concentrating Solutions for a Class of Fractional Kirchhoff Equation [J]. Manuscripta Math, 2019, 158(1-2): 159-203.
[8] WANG J, XIAO L. Existence and Concentration of Solutions for a Kirchhoff Type Problem with Poten-Tials [J]. Discrete Contin Dyn Syst, 2016, 36(12): 7137-7168.
[9] ZHANG J, ZOU W M. Multiplicity and Concentration Behavior of Solutions to the Critical Kirchhoff-Type Problem [J]. Z Angew Math Phys, 2017, 68(3): 1-27.
[10] WANG J, TIAN L X, XU J X, et al. Multiplicity and Concentration of Positive Solutions for a Kirchhoff Type Problem with Critical Growth [J]. J Differential Equations, 2012, 253(7): 2314-2351.
[11] DEL PINO M, FELMER P L. Local Mountain Passes for Semilinear Elliptic Problems in Unbounded Domains [J]. Calc Var Partial Differential Equations, 1996, 4(2): 121-137.
[12] EKELAND I. On the Variational Principle [J]. J Math Anal Appl, 1974, 47(2): 324-353.
[13] FELMER P, QUAAS A, TAN J G. Positive Solutions of the Nonlinear Schrödinger Equation with the Fractional Laplacian [J]. Proc Roy Soc Edinburgh, 2012, 142(6): 1237-1262.

Semiclassical Solution for a Fractional Kirchhoff Type Equation

DU Jia-lu, LÜ Ying

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: Under a local condition imposed on the potential function, the existence of semiclassical solution for fractional Kirchhoff type equation with superlinear and subcritical nonlinearity is proved by using the penalization method.

Key words: fractional Kirchhoff equation; penalization method; semiclassical solution

责任编辑 廖 坤