DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2021.02.007

一类耦合非线性 Schrödinger-KdV 系统基态解的存在性①

毕文静[1,2]，　唐春雷[1]，　丁　凌[2]

1. 西南大学 数学与统计学院，重庆 400715；2. 湖北文理学院 数学与统计学院，湖北 襄阳 441053

摘要：研究了一类耦合非线性 Schrödinger-KdV 系统. 在强制位势的条件下，利用变分方法、Nehari-流形和各种分析技巧，对耦合参数的范围进行了讨论，得到了该系统非平凡基态解的存在性结果.

关　键　词：Schrödinger-KdV 系统；变分法；Nehari-流形；基态解

中图分类号：**O176.3**　　**文献标志码**：**A**　　**文章编号**：1000-5471(2021)02-0037-06

本文主要研究用于刻画流体力学中长短色散波相互作用的数学模型[1]，也就是如下形式的 Schrödinger-KdV 系统：

$$\begin{cases} \mathrm{i}f_t + \mathrm{D}^2 f = \beta f g - |f|^2 f \\ g_t + \mathrm{D}^3 g + g\mathrm{D}g = \dfrac{\beta}{2}\mathrm{D}(|f|^2) \end{cases} \tag{1}$$

其中 $f = f(x, t) \in \mathbb{C}$，$g = g(x, t) \in \mathbb{R}$，$(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$，$\mathrm{D} = \dfrac{\partial}{\partial x}$. 基于丰富的物理意义，系统(1) 已经被很多学者广泛研究[2-5]. 本文主要寻求系统(1) 的行波解，即形如

$$f = f(x, t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(wt+kx)} u(x - ct) \qquad g = g(x, t) = v(x - ct)$$

的解，其中 u, v 都是实函数. 令 $c = 2k$，$c^* = k^2 + w$，则 u, v 满足系统

$$\begin{cases} -u'' + \lambda_1 u = u^3 + \beta u v \\ -v'' + \lambda_2 v = \dfrac{1}{2}v^2 + \dfrac{\beta}{2}u^2 \end{cases} \tag{2}$$

这样，求系统(1) 的行波解就转化成求系统(2) 的解. 当 $N = 1$ 时，在文献[6-7] 中，系统(2) 的正束缚态解和正基态解的存在性结果得到了证明. 当 $N = 2, 3$ 时，文献[8] 通过 Nehari-流形的方法证明了系统(2) 的径向对称的束缚态解的存在性. 注意到系统(2) 中的位势是常数位势，如果位势是变化的函数，那么系统(2) 的基态解是否存在？目前这方面问题没人研究. 受到文献[6-9] 和文献[10-11] 的启发，本文考虑变位势的 Schrödinger-KdV 系统

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda_1(x) u = u^3 + \beta u v & u \in H^1(\mathbb{R}^N) \\ -\Delta v + \lambda_2(x) v = \dfrac{1}{2}v^2 + \dfrac{\beta}{2}u^2 & v \in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases} \tag{3}$$

其中 $N = 1, 2, 3$，$\beta \in \mathbb{R}$，$\lambda_i(x)$ 满足下面条件：

① 收稿日期：2020-01-02

基金项目：国家自然科学基金项目(11471267,11926302)；湖北省教育厅科学计划研究项目(B2019142).

作者简介：毕文静，硕士研究生，主要从事非线性泛函分析的研究.

通信作者：丁　凌，教授.

(Λ) $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^N}\lambda_i(x)>0$，$\lim\limits_{|x|\to\infty}\lambda_i(x)=\infty$，$i=1,2$.

下面我们介绍一些常见的记号. 我们约定 Lebesgue 空间 $L^p(\mathbb{R}^N)(1\leqslant p\leqslant\infty)$ 带有标准范数 $|\cdot|_p$，Hilbert空间 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 带有范数 $\|u\|_i=\left(\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2+\lambda_i(x)u^2)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$，其中$\lambda_i(x)$如条件($\Lambda$)所示. H表示乘积空间 $H^1(\mathbb{R}^N)\times H^1(\mathbb{R}^N)$，其上的范数定义为 $\|(u,v)\|_H^2=\|u\|_1^2+\|v\|_2^2$. 当$n\to\infty$时，$o(1)\to 0$.

我们用变分法寻求系统(3)的解，即把系统(3)的解转化为对应的能量泛函 I_β 的临界点，其中 I_β：$H\longrightarrow\mathbb{R}$，定义为

$$I_\beta(u,v)=\frac{1}{2}\|(u,v)\|_H^2-\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N}u^4\mathrm{d}x-\frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}^N}v^3\mathrm{d}x-\frac{\beta}{2}\int_{\mathbb{R}^N}u^2v\mathrm{d}x$$

显然 $I\in C^2(H,\mathbb{R})$. 定义 Nehari-流形

$$\mathcal{N}_\beta=\{(u,v)\in H\backslash\{(0,0)\}\mid J(u,v)=\langle\nabla I_\beta(u,v),(u,v)\rangle=0\}\tag{4}$$

泛函的最小能量值为

$$c_\beta=\inf_{(u,v)\in\mathcal{N}_\beta}I_\beta(u,v)\tag{5}$$

为了得出主要定理，我们需要如下引理：

引理1 (4)式和(5)式中的 $\mathcal{N}_\beta$ 和 c_β 满足如下性质：

(i) $\mathcal{N}_\beta$ 非空；

(ii) $\mathcal{N}_\beta$ 是 C^1 正则流形；

(iii) $c_\beta>0$；

(iv) (u,v) 是 I_β 的非平凡临界点当且仅当(u,v)是 I_β 限制在 $\mathcal{N}_\beta$ 上的临界点.

证 (i) 令

$$\begin{aligned}J(u,v)=&\langle I_\beta'(u,v),(u,v)\rangle=\\&\|(u,v)\|_H^2-\int_{\mathbb{R}^N}u^4\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}v^3\mathrm{d}x-\frac{3\beta}{2}\int_{\mathbb{R}^N}u^2v\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{6}$$

其中$(u,v)\in H\backslash\{(0,0)\}$，并考虑函数

$$J(t(u,v))=t^2\|(u,v)\|_H^2-t^4\int_{\mathbb{R}^N}u^4\mathrm{d}x-\frac{t^3}{2}\int_{\mathbb{R}^N}v^3\mathrm{d}x-\frac{3\beta t^3}{2}\int_{\mathbb{R}^N}u^2v\mathrm{d}x$$

当 $J(t(u,v))=0$ 时，可得

$$\|(u,v)\|_H^2-t^2\int_{\mathbb{R}^N}u^4\mathrm{d}x-\frac{t}{2}\int_{\mathbb{R}^N}v^3\mathrm{d}x-\frac{3\beta t}{2}\int_{\mathbb{R}^N}u^2v\mathrm{d}x=0\tag{7}$$

(7)式是关于t的一元二次方程，由韦达定理知方程(7)有两个异号解. 因此存在$t_0>0$，使得$J(t_0(u,v))=0$，即$(t_0u,t_0v)\in\mathcal{N}_\beta$. 故 $\mathcal{N}_\beta$ 非空.

(ii) 取$(u,v)\in\mathcal{N}_\beta$，根据(4)式和(6)式知 $J(u,v)=0$，且有

$$\|(u,v)\|_H^2=\int_{\mathbb{R}^N}u^4\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}v^3\mathrm{d}x+\frac{3\beta}{2}\int_{\mathbb{R}^N}u^2v\mathrm{d}x\tag{8}$$

由(6)式和(8)式得到

$$\begin{aligned}\langle J'(u,v),(u,v)\rangle=&2\|(u,v)\|_H^2-4\int_{\mathbb{R}^N}u^4\mathrm{d}x-\frac{3}{2}\int_{\mathbb{R}^N}v^3\mathrm{d}x-\frac{9\beta}{2}\int_{\mathbb{R}^N}u^2v\mathrm{d}x=\\&-\|(u,v)\|_H^2-\int_{\mathbb{R}^N}u^4\mathrm{d}x<0\end{aligned}\tag{9}$$

因此，$\mathcal{N}_\beta$ 是 C^1 正则流形.

(iii) 令$(u,v)\in\mathcal{N}_\beta$，则$(u,v)\neq(0,0)$，且 $J(u,v)=0$ 和

$$I_\beta(u,v)=\frac{1}{6}\|(u,v)\|_H^2+\frac{1}{12}\int_{\mathbb{R}^N}u^4\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{6}\|(u,v)\|_H^2$$

结合 $J(u,v)=0$ 和 Sobolev 嵌入不等式，可得

$$\|(u,v)\|_H^2=\int_{\mathbb{R}^N}u^4\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}v^3\mathrm{d}x+\frac{3\beta}{2}\int_{\mathbb{R}^N}u^2v\mathrm{d}x\leqslant$$

$$C_1\|(u,v)\|_H^4+C_2\|(u,v)\|_H^3 \tag{10}$$

其中$(u,v)\neq(0,0)$，$C_i>0(i=1,2)$是常数．由(10)式可知，存在常数$\rho>0$，使得$\|(u,v)\|_H\geqslant\rho$，于是可推出$I_\beta(u,v)\geqslant\dfrac{1}{6}\rho^2>0$．故可得$c_\beta>0$．

(iv) 必要性显然．下证充分性．假设$I'_\beta|_{\mathcal{N}_\beta}(u,v)=0$，由拉格朗日乘数法得

$$I'_\beta(u,v)=I'_\beta|_{\mathcal{N}_\beta}(u,v)+\omega J'(u,v)$$

于是推出$I'_\beta(u,v)-\omega J'(u,v)=0$．又因为$\langle I'_\beta(u,v),(u,v)\rangle=J(u,v)=0$，可得

$$\omega\langle J'(u,v),(u,v)\rangle=0$$

结合(9)式可知$\omega=0$．因此$I'_\beta(u,v)=0$，充分性证毕．

引理 2　若$(u,v)\in\mathcal{N}_\beta$，$c_\beta$如(5)式所示，则$I_\beta(u,v)=c_\beta$且$I'_\beta(u,v)=c_\beta$．

证　若$(u,v)\in\mathcal{N}_\beta$，由(4)式知

$$I_\beta|_{\mathcal{N}_\beta}(u,v)=\frac{1}{6}\|(u,v)\|_H^2+\frac{1}{12}\int_{\mathbb{R}^N}u^4\mathrm{d}x$$

取非负极小化序列$\{(u_n,v_n)_n\}\subset\mathcal{N}_\beta$，使得$I_\beta(u_n,v_n)\to c$且$I'_\beta|_{\mathcal{N}_\beta}(u_n,v_n)\to 0$．由引理1(iv)知$I'_\beta(u_n,v_n)\to 0$．显然，有

$$\begin{aligned}c_\beta+o(1)={}&I_\beta(u_n,v_n)-\frac{1}{3}\langle I'_\beta(u_n,v_n),(u,v)\rangle=\\&\frac{1}{6}\|(u_n,v_n)\|_H^2+\frac{1}{12}\int_{\mathbb{R}^N}u_n^4\mathrm{d}x\geqslant\\&\frac{1}{6}\|(u_n,v_n)\|_H^2\end{aligned}$$

则$\{(u_n,v_n)\}$在H上有界，存在子序列(仍记为$\{(u_n,v_n)\}$)有弱收敛子列，设在H上$(u_n,v_n)\rightharpoonup(u,v)\geqslant(0,0)$．因为$(u,v)\in\mathcal{N}_\beta$，根据极大值原则得到$v(x)>0$．又因为在条件(Λ)下，当$N=1,2$时，对任意$p\in[2,+\infty)$，$H^1(\mathbb{R}^N)\hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$是紧嵌入；当$N=3$时，对任意$p\in[2,2^*]$，$H^1(\mathbb{R}^N)\hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$是紧嵌入．因此在$L^p(\mathbb{R}^N)\times L^p(\mathbb{R}^N)$上$(u_n,v_n)\to(u,v)$．由(6)式知

$$\begin{aligned}\|(u_n,v_n)-(u,v)\|_H^2={}&\langle I'_\beta(u_n,v_n)-I'_\beta(u,v),(u_n,v_n)-(u,v)\rangle+\int_{\mathbb{R}^N}(u_n^3-u^3)(u_n-u)\mathrm{d}x+\\&\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(v_n^2-v^2)(v_n-v)\mathrm{d}x+\beta\int_{\mathbb{R}^N}(u_nv_n-uv)(u_n-u)\mathrm{d}x+\\&\frac{\beta}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(u_n^2-u^2)(v_n-v)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{11}$$

为了证明当$n\to\infty$时，$\|(u_n,v_n)-(u,v)\|_H^2\to 0$成立，对(11)式等号右边每一部分进行计算．显然，当$n\to\infty$时，有

$$\langle I'_\beta(u_n,v_n)-I'_\beta(u,v),(u_n,v_n)-(u,v)\rangle\to 0$$

因为

$$\int_{\mathbb{R}^N}(u_n^3-u^3)(u_n-u)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^N}u_n^3(u_n-u)\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}u^3(u_n-u)\mathrm{d}x$$

由 Hölder 不等式，得到

$$\int_{\mathbb{R}^N}u_n^3(u_n-u)\mathrm{d}x\leqslant|u_n|_4^3|u_n-u|_4$$

又因为在$L^p(\mathbb{R}^N)\times L^p(\mathbb{R}^N)$上$(u_n,v_n)\to(u,v)$，则当$n\to\infty$时，有

$$\int_{\mathbb{R}^N}u_n^3(u_n-u)\mathrm{d}x\to 0\qquad\int_{\mathbb{R}^N}u^3(u_n-u)\mathrm{d}x\to 0$$

因此，当$n\to\infty$时，有

$$\int_{\mathbb{R}^N}(u_n^3-u^3)(u_n-u)\mathrm{d}x\to 0$$

类似地，有

$$\int_{\mathbb{R}^N}(v_n^2-v^2)(v_n-v)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^N}v_n^2(v_n-v)\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}v^2(v_n-v)\mathrm{d}x$$

再由 Hölder 不等式，得到

$$\int_{\mathbb{R}^N}v_n^2(v_n-v)\mathrm{d}x\leqslant|v_n|_4^2|v_n-v|_4\to 0$$

则当 $n\to\infty$ 时，有

$$\int_{\mathbb{R}^N}v_n^2(v_n-v)\mathrm{d}x\to 0\qquad\int_{\mathbb{R}^N}v^2(v_n-v)\mathrm{d}x\to 0$$

故当 $n\to\infty$ 时，有

$$\int_{\mathbb{R}^N}(v_n^2-v^2)(v_n-v)\mathrm{d}x\to 0$$

再次使用 Hölder 不等式，当 $n\to\infty$，得到

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}(u_nv_n-uv)(u_n-u)\mathrm{d}x\leqslant&\int_{\mathbb{R}^N}(u_nv_n-u_nv)(u_n-u)\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^N}(u_nv-uv)(u_n-u)\mathrm{d}x=\\&\int_{\mathbb{R}^N}u_n(v_n-v)(u_n-u)\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^N}v(u_n-u)(u_n-u)\mathrm{d}x\leqslant\\&|u_n|_3|v_n-v|_3|u_n-u|_3+|v|_3|u_n-u|_3^2\to 0\end{aligned}$$

由上述过程可知，当 $n\to\infty$ 时，$\|(u_n,v_n)-(u,v)\|_H^2\to 0$，即在 H 中 $(u_n,v_n)\to(u,v)$. 故得到

$$I_\beta'(u,v)=0\qquad I_\beta(u,v)=c_\beta$$

设 U,V 分别是方程 $-\Delta u+\lambda_1(x)u=u^3$ 和方程 $-\Delta v+\lambda_2(x)v=\frac{1}{2}v^2$ 的正基态解(见文献[12]). 由文献[7]知，在排除半平凡解时，需要排除 $(0,V)$,$(0,-V)$. 但在本文中，由于系统(3)的能量泛函是非奇非偶的，$(0,-V)$ 不是系统(3)的解，因此我们只需排除 $(0,V)$. 为了证明系统(3)的基态解不同于半平凡解 $(0,V)$，令

$$\beta_0=\frac{\|U\|_1^2}{\int_{\mathbb{R}^N}U^2V\mathrm{d}x}>0\tag{12}$$

定义如下 Nehari-流形：

$$\mathcal{N}_0=\left\{u\in H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}\mid\langle I_0'(u),u\rangle=0,\text{其中 }I_0(u)=\frac{1}{2}\|u\|_2^2-\frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}^N}u^3\mathrm{d}x\right\}$$

$$\mathcal{N}_1=\left\{u\in H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}\mid\langle I_1'(u),u\rangle=0,\text{其中 }I_1(u)=\frac{1}{2}\|u\|_1^2-\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N}u^4\mathrm{d}x\right\}$$

引理3 对任意 $t\in[0,1]$，都存在函数 $s(t)\geqslant 0$，使得 $(\sqrt{s(t)}U,tV)\in\mathcal{N}_\beta$. 令 β_0 如(12)式所定义，那么当 $\beta>\beta_0$ 时，存在 $t_0\in(0,1)$，使得 $g(t_0)<\frac{1}{6}\|V\|_2^2$ 成立，其中 $g(t)=I_\beta(\sqrt{s(t)}U,tV)$.

证 显然，$\langle I_0'(V),V\rangle=0$ 且 $\langle I_1'(U),U\rangle=0$. 对任意 $t\in[0,1]$，$s\geqslant 0$，考虑方程

$$\begin{aligned}&\langle I_\beta'(\sqrt{s}U,tV),(\sqrt{s}U,tV)\rangle=\\&s\|U\|_1^2+t^2\|V\|_2^2-s^2\int_{\mathbb{R}^N}U^4\mathrm{d}x-\frac{t^3}{2}\int_{\mathbb{R}^N}V^3\mathrm{d}x-\frac{3}{2}\beta st\int_{\mathbb{R}^N}U^2V\mathrm{d}x=\\&s\|U\|_1^2+t^2\|V\|_2^2-s^2\|U\|_1^2-t^3\|V\|_2^2-\frac{3}{2}\beta st\int_{\mathbb{R}^N}U^2V\mathrm{d}x=0\end{aligned}\tag{13}$$

分析关于 s 的二次方程(13)，由韦达定理知方程(13)有非负解，定义为 $s(t)\geqslant 0$，则 $(\sqrt{s(t)}U,tV)\in\mathcal{N}_\beta$. 由

$$\langle I_\beta'(\sqrt{s(t)}U,tV),(\sqrt{s(t)}U,tV)\rangle=0$$

令 $t=1$，得到

$$s(1)\|U\|_1^2+\|V\|_2^2-s^2(1)\|U\|_1^2-\|V\|_2^2-\frac{3}{2}\beta s(1)\int_{\mathbb{R}^N}U^2V\mathrm{d}x=0$$

则

$$s(1)\left(\|U\|_1^2-s(1)\|U\|_1^2-\frac{3}{2}\beta\int_{\mathbb{R}^N}U^2V\mathrm{d}x\right)=0$$

故当 $\beta>\frac{2}{3}\beta_0$ 时，$s(1)=0$. 接下来对方程

$$\langle I_\beta'(\sqrt{s(t)}U,\ tV),\ (\sqrt{s(t)}U,\ tV)\rangle=0$$

两边对 t 求导，可得

$$s'(1-0)=\frac{\|V\|_2^2}{\|U\|_1^2-\frac{3}{2}\beta\int_{\mathbb{R}^N}U^2V\mathrm{d}x}\tag{14}$$

令

$$g(t)=I_\beta(\sqrt{s(t)}U,\ tV)=I_\beta(\sqrt{s(t)}U,\ tV)-\frac{1}{3}\langle I_\beta'(\sqrt{s(t)}U,\ tV),\ (\sqrt{s(t)}U,\ tV)\rangle=$$

$$\frac{\sqrt{s(t)}}{6}\|U\|_1^2+\frac{t^2}{6}\|V\|_2^2+\frac{s^2(t)}{12}\|U\|_1^2$$

其中 $t\in[0,\ 1]$. 则得到

$$g'(t)=\frac{s'(t)}{6}\|U\|_1^2+\frac{t}{3}\|V\|_2^2+\frac{s(t)s'(t)}{6}\|U\|_1^2$$

再结合(14)式，当 $\beta>\beta_0$ 时可得

$$g'(1-0)=\frac{s'(1)}{6}\|U\|_1^2+\frac{1}{3}\|V\|_2^2=$$

$$\frac{\|U\|_1^2\|V\|_2^2+\|V\|_2^2\left(2\|U\|_1^2-3\beta\int_{\mathbb{R}^N}U^2V\mathrm{d}x\right)}{3\left(2\|U\|_1^2-3\beta\int_{\mathbb{R}^N}U^2V\mathrm{d}x\right)}=$$

$$\frac{\|U\|_1^2\|V\|_2^2-\|V\|_2^2\beta\int_{\mathbb{R}^N}U^2V\mathrm{d}x}{2\|U\|_1^2-3\beta\int_{\mathbb{R}^N}U^2V\mathrm{d}x}=$$

$$\frac{\|V\|_2^2\left(\|U\|_1^2-\beta\int_{\mathbb{R}^N}U^2V\mathrm{d}x\right)}{2\|U\|_1^2-3\beta\int_{\mathbb{R}^N}U^2V\mathrm{d}x}>0$$

因此存在 $t_0\in(0,\ 1)$，使得 $g(t_0)<g(1)=\frac{1}{6}\|V\|_2^2$.

本文的主要结果是：

定理 1　假设 $N=1,2,3$ 且条件(Λ)成立，U,V 分别是方程 $-\Delta u+\lambda_1(x)u=u^3$ 和 $-\Delta u+\lambda_2(x)u=\frac{1}{2}u^2$ 的正基态解. 则存在 $\beta_0=\frac{\|U\|_1^2}{\int_{\mathbb{R}^N}U^2V\mathrm{d}x}$，对任意的 $\beta>\beta_0$，系统(3)有一对非平凡基态解.

证　根据引理1和引理2，可知系统(3)的基态解存在. 接下来需要证明得到的基态解$(u,\ v)$是非平凡的，即 $u\neq 0$ 或 $v\neq 0$. 若 $v=0$，由系统(3)可知 $u=0$. 但根据流形的定义有$(u,\ v)\neq(0,\ 0)$，故矛盾. 若 $u=0$，则 $v=V\in\mathcal{N}_0$. 因为

$$I_\beta(0,\ V)=I_0(V)-\frac{1}{3}\langle I_0'(V),\ V\rangle=\frac{1}{6}\|V\|_2^2$$

由引理 3 可得，当 $\beta>\beta_0$时，

$$I_\beta(\sqrt{s(t_0)}U,\ t_0V)<\frac{1}{6}\|V\|_2^2=I_\beta(0,\ V)$$

这样$(0,\ V)$就从基态解里排除了. 又由引理 2 和引理 3 知

$$I_\beta(u,\ v)<I_\beta(\sqrt{s(t_0)}U,\ t_0V)<I_\beta(0,\ V)\tag{15}$$

但 $I_\beta(u, v) = I_\beta(-u, v) = I_\beta(0, v) = I_\beta(0, V)$，这与(15)式矛盾．因此$(u, v)$和$(-u, v)$是系统(3)的非平凡基态解．

推论 1 根据能量泛函的特点，得到一对能量值相等的解，即(u, v),$(-u, v)$．

参考文献：

[1] FUNAKOSHI M，OIKAWA M. The Resonant Interaction Between a Long Internal Gravity Wave and a Surface Gravity Wave Packet [J]. J Phys Soc Jpn，1983，52(6)：1982-1995.

[2] KAWAHARA T，SUGIMOTO N，KAKUTANI T. Nonlinear Interaction Between Short and Long Capillary-Gravity Waves [J]. J Phys Soc Jpn，1975，39(5)：1379-1386.

[3] MAKHANKOV V G. On Stationary Solutions of the Schrödinger Equation with a Self-Consistent Potential Satisfying Boussinesq′s Equation [J]. Phys Lett A，1974，50(1)：42-44.

[4] NISHIKAWA K，HOJO H，MIMA K，et al. Coupled Nonlinear Electron-Plasma and Ion-Acoustic Waves [J]. Phys Rev Lett，1974，33(3)：148-151.

[5] YAJIMA N，SATSUMA J. Soliton Solutions in a Diatomic Lattice System [J]. Prog Theor Phys，1979，62(2)：370-378.

[6] COLORADO E. Existence of Bound and Ground States for a System of Coupled Nonlinear Schrödinger-KdV Equations [J]. C R Math Acad Sci Paris，2015，353(6)：511-516.

[7] COLORADO E. On the Existence of Bound and Ground States for Some Coupled Nonlinear Schrödinger-Korteweg-de Vries Equations [J]. Advances in Nonlinear Analysis，2017，6(4)：407-426.

[8] LIU C G，ZHENG Y Q. On Soliton Solutions to a Class of Schrödinger-KdV Systems [J]. Proc Amer Math Soc，2013，141(10)：3477-3484.

[9] 陈宵玮，孙建强，王一帆．耦合 Schrödinger-KdV 方程的高阶保能量方法 [J]．西南大学学报(自然科学版)，2018，40(9)：76-83.

[10] 陈 卫，唐春雷．一类超线性分数阶 Schrödinger 方程解的多重性 [J]．西南师范大学学报(自然科学版)，2019，44(4)：26-30.

[11] 魏 娟，朱朝生．非局部非线性 Schrödinger 方程组解的渐近行为 [J]．西南大学学报(自然科学版)，2019，41(2)：60-63.

[12] RABINOWITZ Paul H. On a Class of Nonlinear Schrödinger Equations [J]. Z Angew Math Phys，1992，43(2)：270-291.

The Existence of Ground State Solutions for a Coupled Nonlinear Schrödinger-KdV System

BI Wen-jing[1,2]， TANG Chun-lei[1]， DING Ling[2]

1. School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China；

2. School of Mathematics and Statistics，Hubei University of Arts and Science，Xiangyang Hubei 441053，China

Abstract：A class of coupled nonlinear Schrödinger-KdV system has been studied. Under the coercive potential，the existence result of nontrivial ground state solutions for the coupled nonlinear Schrödinger-KdV system has been obtained in the variational methods，the Nehari manifold and some analysis techniques.

Key words：Schrödinger-KdV system；variational methods；Nehari manifold；ground state solution

责任编辑 廖 坤