DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2021.02.008

L_0 对偶 John 椭球①

吴美霞[1]，　李　晓[1,2]

1. 西南大学 数学与统计学院，重庆 400715；2. 重庆师范大学 数学科学学院，重庆 401131

摘要： 椭球是积分几何与凸几何分析中一个重要的几何研究对象，随着积分几何与凸几何分析的发展，椭球也从经典的椭球发展到 John 椭球、L_p John 椭球、Lewis 椭球、(p,q)-John 椭球等. 在已有结果的基础上，通过求解关于 q-阶对偶曲率测度的对偶极值问题，给出了 L_0 对偶 John 椭球，它是 L_0 John 椭球的推广.

关　键　词： q-阶对偶曲率测度；John 椭球；L_0 对偶 John 椭球

中图分类号：O186.5　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1000-5471(2021)02-0043-05

任给一个欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的凸体 K(有非空内点的紧凸集)，都存在唯一体积最大的椭球 JK 包含在 K 内，椭球 JK 被称为关于 K 的 John 椭球[1]. John 椭球是积分几何、凸几何分析、泛函分析、偏微分方程等学科中应用广泛的几何体[2-6].

文献[7]将经典的 John 椭球推广为 L_p John 椭球(实数 $p>0$)，文献[8]将 L_p John 椭球推广为 Orlicz-John 椭球，文献[9]给出了 L_0 John 椭球($p=0$). 最近，文献[10]引入了(p,q)-阶对偶曲率测度，文献[1]定义了(p,q)-John 椭球($p>0$). 本文在文献[1]的基础上,研究了当 $p=0$ 时，与$(0,q)$-阶对偶曲率测度(也称为 q-阶对偶曲率测度)所对应的 L_0 对偶 John 椭球. 关于凸几何方面的其他信息可参考文献[2,4,10-13].

下面列举了一些关于凸体和星体的基本知识[14]：

令 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ 表示标准内积，其中 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$. 对 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\{o\}$，设 $\langle\boldsymbol{x}\rangle=|\boldsymbol{x}|^{-1}\boldsymbol{x}$，其中 o 为原点. 以原点为中心的单位球用 B^n 来表示，S^{n-1} 表示$(n-1)$维球面. 令 $\mathscr{K}^n$ 和 $\mathscr{E}^n$ 分别表示 $\mathbb{R}^n$ 中所有凸体和关于原点对称的椭球构成的集合，$\mathscr{K}_o^n$ 表示 $\mathscr{K}^n$ 中所有以原点为内点的凸体构成的集合.

设 $K\subset\mathbb{R}^n$ 是凸体，则 K 的支撑函数 $h(K,\cdot)=h_K:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ 定义为

$$h_K(\boldsymbol{x})=\max\{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}:\boldsymbol{y}\in K\}\qquad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$$

很容易得到支撑函数具有一阶正齐次性. 对于 $\boldsymbol{\phi}\in\mathrm{GL}(n)$，令 $\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}$ 表示 $\boldsymbol{\phi}$ 的转置. $\boldsymbol{\phi}K=\{\boldsymbol{\phi x}:\boldsymbol{x}\in K\}$ 的支撑函数满足

$$h_{\boldsymbol{\phi}K}(\boldsymbol{x})=h_K(\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})\qquad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$$

设 $K\subseteq\mathbb{R}^n$ 且 $o\in K$，若原点 o 与 K 中任意一点的连线所形成的线段仍然包含在 K 中，则称集合 K 为关于原点 o 的星形集. 令 K 为(关于原点 o 的)紧星形集，则其径向函数 $\rho_K:\mathbb{R}^n\setminus\{o\}\longrightarrow\mathbb{R}$ 定义为

$$\rho_K(\boldsymbol{x})=\max\{\lambda:\lambda\boldsymbol{x}\in K\}\qquad \boldsymbol{x}\neq o$$

若径向函数 ρ_K 是连续函数，则称 K 为(关于原点 o 的)星体. 用 $\mathscr{S}^n$ 表示欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中所有(关于原点 o 的)

① 收稿日期：2020-07-20
基金项目：重庆师范大学基金项目(20XLB012).
作者简介：吴美霞，硕士研究生，主要从事积分几何与凸几何分析的研究.
通信作者：李　晓，博士研究生.

星体构成的集合,用 $\mathscr{S}_o^n$ 表示 $\mathscr{S}^n$ 中所有以原点 o 为内点的星体构成的集合.

对于 $q\in\mathbb{R}$, $K,Q\in\mathscr{S}_o^n$ 的 q-阶对偶混合体积定义为[15]

$$\widetilde{V}_q(K,Q)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\rho_K^q(\boldsymbol{u})\rho_Q^{n-q}(\boldsymbol{u})\mathrm{d}\boldsymbol{u}$$

对 $\boldsymbol{\phi}\in\mathrm{SL}(n)$,有

$$\widetilde{V}_q(\boldsymbol{\phi}K,\boldsymbol{\phi}Q)=\widetilde{V}_q(K,Q) \tag{1}$$

设 $q\in\mathbb{R}$, $K\in\mathscr{K}_o^n$, $Q\in\mathscr{S}_o^n$,对每个 Borel 集 $\eta\subseteq S^{n-1}$ 定义 q-阶对偶曲率测度为[10]

$$\widetilde{C}_q(K,Q,\eta)=\frac{1}{n}\int_{\alpha_K^*(\eta)}\rho_K^q(\boldsymbol{u})\rho_Q^{n-q}(\boldsymbol{u})\mathrm{d}\boldsymbol{u}$$

其中 $\alpha_K^*(\eta)$ 表示 η 关于凸体 K 的逆径向 Gauss 像.

对于一个在 S^{n-1} 上的有限 Borel 测度 μ,如果对所有的 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\{o\}$,有

$$\int_{S^{n-1}}|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}|^2\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{u})=\frac{|\mu|}{n}|\boldsymbol{x}|^2 \tag{2}$$

则称 μ 是迷向的,其中 $|\mu|$ 表示 μ 的全测度.

设 $p\in\mathbb{R}$, μ 是 S^{n-1} 上的 Borel 测度, $\boldsymbol{\phi}\in\mathrm{SL}(n)$,则 μ 在 $\boldsymbol{\phi}$ 下的 L_p 像 $\boldsymbol{\phi}_{\dashv_p}\mu$ 是一个 Borel 测度,使得对于任意的 Borel 函数 f: $S^{n-1}\longrightarrow\mathbb{R}$ 有[10]

$$\int_{S^{n-1}}f(\boldsymbol{u})\mathrm{d}\boldsymbol{\phi}_{\dashv_p}\mu(\boldsymbol{u})=\int_{S^{n-1}}|\boldsymbol{\phi}^{-1}\boldsymbol{u}|^pf(\langle\boldsymbol{\phi}^{-1}\boldsymbol{u}\rangle)\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{u}) \tag{3}$$

文献[10]给出了 q-阶对偶曲率测度的如下性质,设 $q\in\mathbb{R}$, $\boldsymbol{\phi}\in\mathrm{SL}(n)$,对于每个 Borel 集 $\eta\subseteq S^{n-1}$,有

$$\widetilde{C}_q(\boldsymbol{\phi}K,\boldsymbol{\phi}Q,\eta)=\boldsymbol{\phi}_{\dashv_0}^{\mathrm{T}}\widetilde{C}_q(K,Q,\eta) \tag{4}$$

设 $q\in\mathbb{R}$, $K,L\in\mathscr{K}_o^n$, $Q\in\mathscr{S}_o^n$,定义标准化的 L_0 对偶混合体积

$$\bar{V}_{0,q}(K,L,Q)=\exp\left\{\frac{1}{\widetilde{V}_q(K,Q)}\int_{S^{n-1}}\log\left(\frac{h_L(\boldsymbol{u})}{h_K(\boldsymbol{u})}\right)\mathrm{d}\widetilde{C}_q(K,Q,\boldsymbol{u})\right\} \tag{5}$$

标准化的 L_0 对偶混合体积有如下性质:

$$\bar{V}_{0,q}(rK,sL,tQ)=\frac{s}{r}\bar{V}_{0,q}(K,L,Q)\qquad r,s,t>0 \tag{6}$$

$$\bar{V}_{0,q}(\boldsymbol{\phi}K,\boldsymbol{\phi}L,\boldsymbol{\phi}Q)=\bar{V}_{0,q}(K,L,Q)\qquad \boldsymbol{\phi}\in\mathrm{SL}(n) \tag{7}$$

我们通过以下极值问题引入了 L_0 对偶 John 椭球:

问题1 设 $q\in\mathbb{R}$, $K\in\mathscr{K}_o^n$, $Q\in\mathscr{S}_o^n$,是否存在 $E\in\mathscr{E}^n$,使得 $\max\limits_E V(E)$ 满足 $\bar{V}_{0,q}(K,E,Q)\leqslant 1$?

问题2 设 $q\in\mathbb{R}$, $K\in\mathscr{K}_o^n$, $Q\in\mathscr{S}_o^n$,是否存在 $E\in\mathscr{E}^n$,使得 $\min\limits_E\bar{V}_{0,q}(K,E,Q)$ 满足 $V(E)\geqslant\omega_n$?

引理1 设 $q\in\mathbb{R}$, $K\in\mathscr{K}_o^n$, $Q\in\mathscr{S}_o^n$,

(i) 如果 E_1 是问题1的解,则 $(\omega_n/V(E_1))^{\frac{1}{n}}E_1$ 是问题2的解;

(ii) 如果 E_2 是问题2的解,则 $\bar{V}_{0,q}(K,E_2,Q)^{-1}E_2$ 是问题1的解.

引理2 设 $q\in\mathbb{R}$, $K\in\mathscr{K}_o^n$, $Q\in\mathscr{S}_o^n$,则

(i) $\max\{V(E): E\in\mathscr{E}^n, \bar{V}_{0,q}(K,E,Q)\leqslant 1\}=\max\{V(E): E\in\mathscr{E}^n, \bar{V}_{0,q}(K,E,Q)=1\}$;

(ii) $\min\{\bar{V}_{0,q}(K,E,Q): E\in\mathscr{E}^n, V(E)\geqslant\omega_n\}=\min\{\bar{V}_{0,q}(K,E,Q): E\in\mathscr{E}^n, V(E)=\omega_n\}$.

引理3 设 $q\in\mathbb{R}$, $K\in\mathscr{K}_o^n$, $Q\in\mathscr{S}_o^n$,则下列说法等价:

(i) 单位球 B^n 是问题2的解;

(ii) q-阶对偶曲率测度 $\widetilde{C}_q(K,Q,\cdot)$ 在 S^{n-1} 上是迷向的.

证 假定(i)成立,由引理2,对于所有的 $\boldsymbol{\phi}\in\mathrm{SL}(n)$,我们有

$$\bar{V}_{0,q}(K,B^n,Q)\leqslant\bar{V}_{0,q}(K,\boldsymbol{\phi}B^n,Q)$$

假定 $\boldsymbol{T}\in\mathrm{GL}(n)$,对于充分小的 $\varepsilon_0>0$, $\boldsymbol{I}_n+\varepsilon\boldsymbol{T}\in\mathrm{GL}(n)$ 对所有 $\varepsilon\in(-\varepsilon_0,\varepsilon_0)$ 而言是可逆的,其中 $\boldsymbol{I}_n$ 是单位矩阵. 定义

$$\boldsymbol{T}_\varepsilon=\frac{\boldsymbol{I}_n+\varepsilon\boldsymbol{T}}{\det(\boldsymbol{I}_n+\varepsilon\boldsymbol{T})^{\frac{1}{n}}}\qquad \varepsilon\in(-\varepsilon_0,\varepsilon_0)$$

令椭球 $E_\varepsilon=\boldsymbol{T}_\varepsilon^{\mathrm{T}}B^n$，有 $V(E_\varepsilon)=\omega_n$. 因为 $B^n=E_0$ 是问题 2 的解，则有

$$\bar{V}_{0,q}(K,E_0,Q)\leqslant\bar{V}_{0,q}(K,E_\varepsilon,Q)\qquad \varepsilon\in(-\varepsilon_0,\varepsilon_0)$$

通过(5) 式，有

$$0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}\int_{S^{n-1}}\log h_{E_\varepsilon}(\boldsymbol{u})\mathrm{d}\widetilde{C}_q(K,Q,\boldsymbol{u})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}\int_{S^{n-1}}\log|\boldsymbol{T}_\varepsilon\boldsymbol{u}|\,\mathrm{d}\widetilde{C}_q(K,Q,\boldsymbol{u})$$

对于充分小的 ε，$|\boldsymbol{T}_\varepsilon\boldsymbol{u}|$ 是光滑的，则被积函数 $\log|\boldsymbol{T}_\varepsilon\boldsymbol{u}|$ 也是光滑的. 因此

$$\begin{aligned}0=&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}\int_{S^{n-1}}\log|\boldsymbol{T}_\varepsilon\boldsymbol{u}|\,\mathrm{d}\widetilde{C}_q(K,Q,\boldsymbol{u})=\\&\frac{1}{2}\int_{S^{n-1}}\frac{1}{|\boldsymbol{T}_\varepsilon\boldsymbol{u}|^2}\bigg|_{\varepsilon=0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\left(\frac{|\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{u}+\varepsilon\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}|^2}{\det(\boldsymbol{I}_n+\varepsilon\boldsymbol{T})^{\frac{2}{n}}}\right)\bigg|_{\varepsilon=0}\mathrm{d}\widetilde{C}_q(K,Q,\boldsymbol{u})=\\&\int_{S^{n-1}}\left(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}-\frac{\operatorname{trace}(\boldsymbol{T})}{n}\right)\mathrm{d}\widetilde{C}_q(K,Q,\boldsymbol{u})\end{aligned}$$

那么有

$$\int_{S^{n-1}}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{T}\boldsymbol{u})\mathrm{d}\widetilde{C}_q(K,Q,\boldsymbol{u})=\frac{\operatorname{trace}(\boldsymbol{T})}{n}|\widetilde{C}_q(K,Q,S^{n-1})|$$

对 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$，设 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{x}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中秩为 1 的线性算子，把 $\boldsymbol{y}$ 映成$(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})\boldsymbol{x}$. 那么，可得

$$\operatorname{trace}(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{x})=|\boldsymbol{x}|^2\qquad \boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}=|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}|^2$$

所以

$$\int_{S^{n-1}}|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}|^2\mathrm{d}\widetilde{C}_q(K,Q,\boldsymbol{u})=\frac{|\widetilde{C}_q(K,Q,S^{n-1})|}{n}|\boldsymbol{x}|^2$$

因此，q-阶对偶曲率测度 $\widetilde{C}_q(K,Q,\cdot)$ 是迷向的.

假设(ii) 成立. 设 E 是关于原点对称的椭球，且 $V(E)=\omega_n$. 换句话说，$E=\boldsymbol{T}B^n$，$\boldsymbol{T}\in\mathrm{SL}(n)$. 记 $\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{PDR}$，其中 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{R}$ 是正交矩阵，$\boldsymbol{D}$ 是正定对称矩阵，且有特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 及正交特征向量 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$. 注意到 $\lambda_1\cdots\lambda_n=1$.

通过(1),(3),(4) 式及(5) 式可得

$$\bar{V}_{0,q}(K,E,Q)=\exp\left\{\frac{1}{\widetilde{V}_q(K,Q)}\int_{S^{n-1}}(\log h_{\boldsymbol{T}B^n}(\boldsymbol{u})-\log h_K(\boldsymbol{u}))\mathrm{d}\widetilde{C}_q(K,Q,\boldsymbol{u})\right\}$$

又有

$$\begin{aligned}\exp\left\{\frac{1}{\widetilde{V}_q(K,Q)}\int_{S^{n-1}}\log h_{\boldsymbol{T}B^n}(\boldsymbol{u})\mathrm{d}\widetilde{C}_q(K,Q,\boldsymbol{u})\right\}=&\exp\left\{\frac{1}{\widetilde{V}_q(K,Q)}\int_{S^{n-1}}\log|\boldsymbol{PDRu}|\,\mathrm{d}\widetilde{C}_q(K,Q,\boldsymbol{u})\right\}=\\&\exp\left\{\frac{1}{\widetilde{V}_q(\boldsymbol{R}K,\boldsymbol{R}Q)}\int_{S^{n-1}}\log|\boldsymbol{Du}|\,\mathrm{d}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}_{\dashv_0}\widetilde{C}_q(K,Q,\boldsymbol{u})\right\}=\\&\exp\left\{\frac{1}{\widetilde{V}_q(\boldsymbol{R}K,\boldsymbol{R}Q)}\int_{S^{n-1}}\log|\boldsymbol{Du}|\,\mathrm{d}\widetilde{C}_q(\boldsymbol{R}K,\boldsymbol{R}Q,\boldsymbol{u})\right\}\end{aligned}$$

因为 $\widetilde{C}_q(K,Q,\cdot)$ 是迷向的，由(2) 式和(3) 式知$\dfrac{\widetilde{C}_q(\boldsymbol{R}K,\boldsymbol{R}Q,\cdot)}{\widetilde{V}_q(\boldsymbol{R}K,\boldsymbol{R}Q)}$ 也是迷向的. 注意到

$$|\boldsymbol{Du}|^2=\sum_{i=1}^n\lambda_i^2|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_i|^2$$

由 Jensen 不等式和$\dfrac{\widetilde{C}_q(\boldsymbol{R}K,\boldsymbol{R}Q,\cdot)}{\widetilde{V}_q(\boldsymbol{R}K,\boldsymbol{R}Q)}$ 的迷向性可知

$$\bar{V}_{0,q}(K,E,Q)=\exp\left\{\frac{1}{2\widetilde{V}_q(\boldsymbol{R}K,\boldsymbol{R}Q)}\int_{S^{n-1}}\log\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i^2|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_i|^2\right)\mathrm{d}\widetilde{C}_q(\boldsymbol{R}K,\boldsymbol{R}Q,\boldsymbol{u})\right\}\bar{V}_{0,q}(K,B^n,Q)\geqslant$$

$$\exp\left\{\frac{1}{\widetilde{V}_q(\boldsymbol{R}K,\boldsymbol{R}Q)}\int_{S^{n-1}}\left(\sum_{i=1}^{n}|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_i|^2\log\lambda_i\right)\mathrm{d}\widetilde{C}_q(\boldsymbol{R}K,\boldsymbol{R}Q,\boldsymbol{u})\right\}\bar{V}_{0,q}(K,B^n,Q)=$$
$$\exp\left\{\frac{1}{\widetilde{V}_q(\boldsymbol{R}K,\boldsymbol{R}Q)}\sum_{i=1}^{n}\log\lambda_i\int_{S^{n-1}}|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_i|^2\mathrm{d}\widetilde{C}_q(\boldsymbol{R}K,\boldsymbol{R}Q,\boldsymbol{u})\right\}\bar{V}_{0,q}(K,B^n,Q)=$$
$$\bar{V}_{0,q}(K,B^n,Q)$$

因此，对所有关于原点对称且体积为 ω_n 的椭球 E，有

$$\bar{V}_{0,q}(K,E,Q)\geqslant\bar{V}_{0,q}(K,B^n,Q) \tag{8}$$

故单位球 B^n 是问题2的解. 进一步，等式(8)等号成立当且仅当 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1$，由此可得 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{I}_n$，$\boldsymbol{T}$ 是正交的，并且 $E=B^n$.

定理1 设 $q\in\mathbb{R}$，$K\in\mathscr{K}_o^n$，$Q\in\mathscr{S}_o^n$，若极值问题

$$\min\left\{\int_{S^{n-1}}\log|\boldsymbol{Tu}|\,\mathrm{d}\widetilde{C}_q(K,Q,\boldsymbol{u}):\boldsymbol{T}\in\mathrm{SL}(n)\right\} \tag{9}$$

的解存在，则问题1的解存在且唯一.

证 由引理2和(5)式可得

$$\min\{\bar{V}_{0,q}(K,E,Q):E\in\mathscr{E}^n,V(E)\geqslant\omega_n\}=$$
$$\min\left\{\exp\left\{\frac{1}{\widetilde{V}_q(K,Q)}\int_{S^{n-1}}\log\left(\frac{h_E(\boldsymbol{u})}{h_K(\boldsymbol{u})}\right)\mathrm{d}\widetilde{C}_q(K,Q,\boldsymbol{u})\right\}:E\in\mathscr{E}^n,V(E)=\omega_n\right\}=$$
$$\min\left\{\exp\left\{\frac{1}{\widetilde{V}_q(K,Q)}\int_{S^{n-1}}\log\left(\frac{|\boldsymbol{Tu}|}{h_K(\boldsymbol{u})}\right)\mathrm{d}\widetilde{C}_q(K,Q,\boldsymbol{u})\right\}:\boldsymbol{T}\in\mathrm{SL}(n)\right\}=$$
$$\exp\left\{\frac{1}{\widetilde{V}_q(K,Q)}\min\left\{\int_{S^{n-1}}\log|\boldsymbol{Tu}|\,\mathrm{d}\widetilde{C}_q(K,Q,\boldsymbol{u}):\boldsymbol{T}\in\mathrm{SL}(n)\right\}-\frac{1}{\widetilde{V}_q(K,Q)}\int_{S^{n-1}}\log h_K(\boldsymbol{u})\mathrm{d}\widetilde{C}_q(K,Q,\boldsymbol{u})\right\}$$

因此，由(9)式有解，则问题2的解存在，故问题1的解也存在.

假定 $E_1=\boldsymbol{T}_1B^n\in\mathscr{E}^n$，则 $V(E_1)=\omega_n$ 是问题2的解，那么对于所有关于原点对称的椭球 E，且 $V(E)=\omega_n$，有

$$\bar{V}_{0,q}(K,E_1,Q)\leqslant\bar{V}_{0,q}(K,E,Q)$$

由(7)式可得

$$\bar{V}_{0,q}(\boldsymbol{T}_1^{-1}K,B^n,\boldsymbol{T}_1^{-1}Q)\leqslant\bar{V}_{0,q}(\boldsymbol{T}_1^{-1}K,\boldsymbol{T}_1^{-1}E,\boldsymbol{T}_1^{-1}Q) \tag{10}$$

由引理3可得，$\widetilde{C}_q(\boldsymbol{T}_1^{-1}K,\boldsymbol{T}_1^{-1}Q,\cdot)$ 在 S^{n-1} 上是迷向的.

若 $E_2\in\mathscr{E}^n$ 是问题2的另一个解，即

$$\bar{V}_{0,q}(K,E_1,Q)=\bar{V}_{0,q}(K,E_2,Q)$$

那么

$$\bar{V}_{0,q}(\boldsymbol{T}_1^{-1}K,B^n,\boldsymbol{T}_1^{-1}Q)=\bar{V}_{0,q}(\boldsymbol{T}_1^{-1}K,\boldsymbol{T}_1^{-1}E_2,\boldsymbol{T}_1^{-1}Q)$$

这就意味着 $\boldsymbol{T}_1^{-1}E_2$ 使得(10)式的等号成立. 由引理3知 $\boldsymbol{T}_1^{-1}E_2=B^n$. 因此，$E_2=\boldsymbol{T}_1B^n=E_1$. 即结论得证.

定义1 设 $q\in\mathbb{R}$，$K\in\mathscr{K}_o^n$，$Q\in\mathscr{S}_o^n$. 对于所有关于原点对称的椭球，满足问题1的唯一椭球称为 K 和 Q 的 L_0 对偶John椭球，记作 $E_{0,q}(K,Q)$.

对于所有关于原点对称的椭球，满足问题2的唯一椭球称为 K 和 Q 的标准化的 L_0 对偶John椭球，记作 $\bar{E}_{0,q}(K,Q)$.

参考文献：

[1] 李 晓，王贺军，周家足. (p,q)-John椭球[J/OL]. Science China Mathematics，2020，50：1-22. [2020-06-05]. http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.5837.O1.20200519.1723.002.html.

[2] BALL K. Volume Ratios and a Reverse Isoperimetric Inequality [J]. J of Lond Math Soc，1991，44(2)：351-359.

[3] BALL K. Ellipsoids of Maximal Volume in Convex Bodies [J]. Geom Dedic，1992，41(2)：241-250.

[4] GIANNOPOULOS A A, MILMAN V D. Extremal Problems and Isotropic Positions of Convex Bodies [J]. Israel J Math, 2000, 117(1): 29-60.

[5] GRUBER P M, SCHUSTER F E. An Arithmetic Proof of John's Ellipsoid Theorem [J]. Arch Math, 2005, 85(1): 82-88.

[6] GRUBER P M. John and Loewner Ellipsoids [J]. Discrete Comput Geom, 2011, 46(4): 776-788.

[7] LUTWAK E, YANG D, ZHANG G Y. L_p John Ellipsoids [J]. Proc Lond Math Soc, 2005, 90(2): 497-520.

[8] ZOU D, XIONG G, Orlicz-John Ellipsoids [J]. Adv Math, 2014, 265: 132-168.

[9] HU J Q, XIONG G, The logarithmic John Ellipsoid [J]. Geom Dedic, 2018, 197(1): 33-48.

[10] LUTWAK E, YANG D, ZHANG G Y. L_p Dual Curvature Measures [J]. Adv Math, 2018, 329: 85-132.

[11] 周　媛，张增乐. 平面上的逆 Bonnesen-型 Minkowski 不等式 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2019，41(2)：70-74.

[12] 杨　林，罗　淼，王贺军. L_p 对偶 Brunn-Minkowski 不等式 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2017，39(10)：79-83.

[13] 陶江艳，李　晓. 对偶 L_p 变换法则 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2019，44(12)：31-34.

[14] SCHNEIDER R. Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2014.

[15] LUTWAK E. Dual Mixed Volumes [J]. Pacific J Math, 1975, 58(2): 531-538.

L_0 Dual John Ellipsoid

WU Mei-xia[1],　LI　Xiao[1,2]

1. School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China;

2. School of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401131, China

Abstract: The ellipsoid is an important geometry and convex geometric analysis. With the development of integral geometry and convex geometric analysis, the classical ellipsoid develops to the John ellipsoid, the L_p John ellipsoid, the Lewis ellipsoid, the (p, q)-John ellipsoid and so on. In this paper, the L_0 dual John ellipsoid is introduced by solving a pair of dual optimization problems of the q-th dual curvature measures based on the existing results. The L_0 dual John ellipsoid is a generalization of the L_0 John ellipsoid.

Key words: the q-th dual curvature measures; John ellipsoid; L_0 dual John ellipsoid

责任编辑　廖　坤