DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2021.02.009

一类具有阶段结构种群传染病模型的定性分析①

杨 鑫， 李冠强， 谭宏武

陕西科技大学 文理学院，西安 710029

摘要：建立一类具有阶段结构的种群传染病模型，主要考虑疾病仅在成年个体间传播. 基于成年个体之间的种内竞争和疾病传播现象，研究了疾病传播对于种群的影响. 一方面，讨论了种群持久的条件；另一方面，在种群持久的条件下，研究了无病平衡点和多个地方病平衡点的存在性和稳定性. 结果表明仅在成年阶段传播的疾病可能会引起后向分支现象的发生.

关 键 词：年龄结构；传染病模型；平衡点；后向分支；阈值

中图分类号：O175　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000－5471(2021)02－0048－08

在现实生活中，传染病广泛存在，基于疾病的传播机理，建立合理的传染病模型能够帮助人们更好地理解传染病的传播规律，以便制定相应有效的控制策略遏制疾病的传播[1-2]. 医学研究显示不同年龄阶段的个体有其不同的疾病传播模式[3]. 有些疾病多发于个体的幼年阶段，比如麻疹、水痘等[4-5]，而有些疾病的易感群体却是成年个体，比如斑疹伤寒、血吸虫病、白喉、钩端螺旋体病、流行性脑脊髓炎等[6-7]. 因此考虑具有年龄阶段的传染病模型有着重要的实际应用意义[8-11]. 本文主要研究疾病在一类存在种内竞争的生物种群中传播的动力学模型.

1 模　　型

假设某个种群中的个体在其生命历程中，只有成年阶段的个体会被某类病菌感染成为染病者. 因此可以将整个种群划分为 3 类：分别是处于幼年阶段的易感者个体，处于成年阶段的易感者个体以及染病者个体. 令 $x(t)$ 表示 t 时刻处于幼年阶段的易感者个体的数量；$y(t)$ 表示 t 时刻处于成年阶段的易感者个体的数量；$z(t)$ 表示 t 时刻感染者个体的数量.

假设成年阶段的易感者和染病者都可以生育下一代，且不考虑垂直传播，即成年阶段的易感者和染病者生育的下一代都是易感者. 基于以上假设，一类具有阶段结构的种群传染病模型可借助微分方程表示为如下的形式：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = b(y+\sigma z) - d_1 x - \mu x \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \mu x - \delta y^2 - d_2 y - kyz + rz \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = kyz - \eta z^2 - d_3 z - rz \end{cases} \tag{1}$$

其中：b 表示成年阶段易感者的生育率，$b\sigma$ 表示成年阶段的染病者的生育率，$0<\sigma<1$ 表示生育率降低因子；μ 表示幼年阶段的易感者个体成长为成年阶段的易感者个体的比例；δ 和 η 分别表示成年阶段的易感者

---

① 收稿日期：2019－09－23

基金项目：国家自然科学基金面上项目(12071268)；国家自然科学基金青年项目(11405100)；陕西省教育厅专项项目(18JK0092).

作者简介：杨 鑫，硕士研究生，主要从事生物数学研究

个体和染病者个体的种内竞争系数；k 表示成年阶段的易感者接触染病者后被成功感染的概率；r 表示染病者的自我恢复系数；d_1,d_2,d_3 分别表示处于幼年阶段的易感个体、成年阶段的易感者个体以及染病者个体的自然死亡率．自然地，染病者个体的死亡率 d_3 大于易感者个体的死亡率 d_2，也就是 $d_3>d_2$．另外，考虑到模型的生物意义，模型中涉及到的参数都非负，并且给定模型的初值 $x(0)>0,y(0)>0,z(0)\geqslant 0$.

2　种群持久存在的条件

定理 1　对于系统(1)，下列结论成立：

(i) 种群灭绝平衡点 $E_0=(0,0,0)$ 恒存在；

(ii) 记

$$R_1=\frac{\mu b}{d_2(d_1+\mu)}$$

当 $R_1\leqslant 1$ 时，种群灭绝平衡点 E_0 是全局渐近稳定的；当 $R_1>1$ 时，种群灭绝平衡点 E_0 是不稳定的.

证　直接计算可知，E_0 总能同时满足系统(1)中的3个方程．也就是，系统(1)总存在种群灭绝平衡点 E_0.

接下来讨论 E_0 的稳定性．为此，给出系统(1)在 E_0 处的 Jacobian 矩阵：

$$\boldsymbol{J}_{E_0}=\begin{bmatrix}-d_1-\mu & b & b\sigma\\ \mu & -d_2 & r\\ 0 & 0 & -d_3-r\end{bmatrix}$$

相应地，$\boldsymbol{J}_{E_0}$ 的特征方程为：

$$(\lambda+d_3+r)[\lambda^2+(d_1+d_2+\mu)\lambda+d_2(d_1+\mu)(1-R_1)]=0 \tag{2}$$

显然 $\lambda=-d_3-r<0$ 是方程(2)的一个根，且方程(2)的其他根满足下面的方程：

$$\lambda^2+(d_1+d_2+\mu)\lambda+d_2(d_1+\mu)(1-R_1)=0 \tag{3}$$

由于 $d_1+d_2+\mu>0$，$d_2(d_1+\mu)>0$，因此，当 $R_1<1$ 时，方程(3)的两个根具有负实部．由 Hurwitz 判据可知，E_0 是局部渐近稳定的；而当 $R_1>1$ 时，方程(3)的两个特征根中有一个实部大于 0，这说明 E_0 是不稳定的.

在 $R_1<1$ 的前提下，定义下面的 Lyapunov 函数来验证种群灭绝平衡点 $E_0(0,0,0)$ 的全局稳定性，

$$V_1=\mu x+(d_1+\mu)(y+z)$$

直接计算可得，

$$\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}t}=d_2(d_1+\mu)(R_1-1)+[b\sigma\mu-d_3(d_1+\mu)]z-(d_1+\mu)(\delta y^2+\eta z^2)$$

当 $R_1\leqslant 1$ 时，可知 $\mu b\leqslant d_2(d_1+\mu)$．由于 $0<\sigma<1$，$d_2<d_3$，因此有

$$\sigma\mu b<\mu b\leqslant d_2(d_1+\mu)<d_3(d_1+\mu)$$

这意味着 $R_1\leqslant 1$ 时，$\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}t}\leqslant 0$．此外，使得$\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}t}=0$的解只有$(x,y,z)=(0,0,0)$．利用 LaSalle 不变集定理可知，$E_0$ 在 $\mathbb{R}_3^+$ 中是全局渐近稳定的．证明结束.

事实上，定理1说明 R_1 是种群灭绝与否的阈值．当 $R_1\leqslant 1$ 时，E_0 是全局渐近稳定的，这说明随着时间趋于无穷该种群将趋于灭绝；而当 $R_1>1$ 时，种群灭绝平衡点 E_0 是不稳定的，这说明随着时间趋于无穷种群不会灭绝，也就是种群会持久存在.

3　种群持久存在时系统平衡点的存在性和稳定性

本小节主要研究种群持续存在的条件下，也即当 $R_1>1$ 时，系统(1)的平衡点的存在性和稳定性．为了表示简洁，引入如下的变量：

$$R_2=\frac{\mu b}{\left(\frac{\delta(d_3+r)}{k}+d_2\right)(d_1+\mu)}\qquad C=\frac{(d_3+r)(\delta d_3+kd_2+\delta r)}{k^2}(1-R_2)$$

$$A=\frac{\eta(\delta\eta+k^2)}{k^2}\qquad B=\frac{\mu b\sigma}{d_1+\mu}-\frac{d_3+r}{\eta}A-\frac{\eta}{d_3+r}C+r$$

$$R^*=\frac{\eta(\delta\eta+k^2)(\delta d_3+kd_2+\delta r)-\left(\sqrt{\dfrac{k^2[\mu b\sigma+r(d_1+\mu)]}{d_1+\mu}}-\sqrt{(d_3+r)(\delta\eta+k^2)}\right)^2}{\eta(\delta\eta+k^2)(\delta d_3+kd_2+\delta r)}$$

由于所有的参数都是非负的，易知 $R_1>R_2>0$，$A>0$.

3.1　平衡点的存在性

定理 2　在种群持久存在，即 $R_1>1$ 的前提下，对于系统(1)，下列结论成立

(i) 系统(1) 存在唯一一个无病平衡点 $E_1=(x_1,y_1,0)$，其中：

$$x_1=\frac{by_1}{d_1+\mu}\qquad y_1=\frac{d_2(R_1-1)}{\delta}$$

(ii) 系统(1) 地方病平衡点的存在性有以下 4 种情况：

1) 当 $R_2>1$ 时，除去无病平衡点以外，系统(1) 还存在一个地方病平衡点 $E_2=(x_2,y_2,z_2)$，其中：

$$x_2=\frac{b}{d_1+\mu}\left(\frac{\eta z_2+d_3+r}{k}+\sigma z_2\right)\qquad y_2=\frac{\eta z_2+d_3+r}{k}\qquad z_2=\frac{B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$$

2) 当 $R_2=1$，$(d_3+r)\delta(k\sigma-\eta)>(d_3-\sigma d_2)k^2$，$k\sigma>\eta$ 时，除去无病平衡点以外，系统(1) 也存在唯一一个地方病平衡点 $E_3=(x_3,y_3,z_3)$，其中：

$$x_3=\frac{b}{d_1+\mu}\left(\frac{\eta z_3+d_3+r}{k}+\sigma z_3\right)\qquad y_3=\frac{\eta z_3+d_3+r}{k}\qquad z_3=\frac{B}{A}$$

3) 当 $R^*=R_2<1$ 时，系统(1) 存在唯一一个地方病平衡点 $E_4=(x_4,y_4,z_4)$，其中：

$$x_4=\frac{b}{d_1+\mu}\left(\frac{\eta z_4+d_3+r}{k}+\sigma z_4\right)\qquad y_4=\frac{\eta z_4+d_3+r}{k}\qquad z_4=\frac{B}{2A}$$

4) 当 $R^*<R_2<1$ 时，系统(1) 存在两个地方病平衡点 $E_i=(x_i,y_i,z_i)$，$i=5,6$，其中：

$$x_i=\frac{b}{d_1+\mu}\left(\frac{\eta z_i+d_3+r}{k}+\sigma z_i\right)\qquad y_i=\frac{\eta z_i+d_3+r}{k}\qquad z_i=\frac{B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}\qquad i=5,6$$

证　为了得到系统(1) 的平衡点，需要求解下面的方程组：

$$\begin{cases}b(y+\sigma z)-d_1x-\mu x=0\\ \mu x-\delta y^2-d_2y-kyz+rz=0\\ kyz-\eta z^2-d_3z-rz=0\end{cases}\tag{4}$$

(i) 当 $z=0$ 时，可以得到下面的方程组：

$$\begin{cases}by=(d_1+\mu)x\\ \mu x=(\delta y+d_2)y\end{cases}\tag{5}$$

由(5) 式中的第一个方程可以得到 $x=\dfrac{b}{d_1+\mu}y$，将其代入(5) 式中第二个方程可以得到

$$\frac{d_2(d_1+\mu)}{b}x\left[R_1-1-\frac{\delta(d_1+\mu)}{bd_2}x\right]=0\tag{6}$$

当 $R_1\leqslant 1$ 时，只有 $x=0$ 是(6) 式的解，这对应于系统(1) 的种群灭绝平衡点 E_0. 而当 $R_1>1$ 时，(6) 式除去零解外，还有正解

$$x_1=\frac{b[\mu b-d_2(d_1+\mu)]}{\delta(d_1+\mu)^2}$$

这对应于系统(1) 的边界平衡点，即无病平衡点 $E_1=(x_1,y_1,0)$，其中：

$$x_1=\frac{b[\mu b-d_2(d_1+\mu)]}{\delta(d_1+\mu)^2}\qquad y_1=\frac{\mu b-d_2(d_1+\mu)}{\delta(d_1+\mu)}\qquad z_1=0$$

(ii) 当 $z\neq 0$ 时，利用(4) 式中的第 3 个方程可得

$$y=\frac{\eta z+d_3+r}{k}$$

将其代入(4)式中第一个方程可得

$$x = \frac{b}{d_1 + \mu}\left(\frac{\eta z + d_3 + r}{k} + \sigma z\right) \tag{7}$$

把(7)式和 $y = \dfrac{\eta z + d_3 + r}{k}$ 代入(4)式中的第 2 个方程可得

$$Az^2 - Bz + C = 0 \tag{8}$$

其中：

$$A = \frac{\eta(\delta\eta + k^2)}{k^2} \qquad B = \frac{\mu b\sigma}{d_1 + \mu} - \frac{d_3 + r}{\eta}A - \frac{\eta}{d_3 + r}C + r$$

$$C = \frac{(d_3 + r)(\delta d_3 + kd_2 + \delta r)}{k^2}(1 - R_2)$$

1) 显然，$A > 0$. 当 $R_2 > 1$ 时，$C < 0$. 因此方程(8)存在唯一的正解

$$z = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

此正解对应系统(1)的一个地方病平衡点 $E_2 = (x_2, y_2, z_2)$，其中：

$$x_2 = \frac{b}{d_1 + \mu}\left(\frac{\eta z_2 + d_3 + r}{k}\right) \qquad y_2 = \frac{\eta z_2 + d_3 + r}{k}$$

这说明当 $R_2 > 1$ 时，系统(1)除去无病平衡点以外，还存在唯一一个地方病平衡点 E_2.

2) 当 $R_2 = 1$ 时，$C = 0$. 此时方程(8)存在正解的充分必要条件为 $B > 0$，即 $(d_3 + r)\delta(k\sigma - \eta) > (d_3 - \sigma d_2)k^2$，$k\sigma > \eta$，在这种情况下，方程存在唯一正解

$$z = \frac{B}{A}$$

这说明系统(1)除去无病平衡点以外，也存在唯一一个地方病平衡点 $E_3 = (x_3, y_3, z_3)$，其中：

$$x_3 = \frac{b}{d_1 + \mu}\left(\frac{\eta z_3 + d_3 + r}{k} + \sigma z_3\right) \qquad y_3 = \frac{\eta z_3 + d_3 + r}{k} \qquad z_3 = \frac{B}{A}$$

3) 当 $R_2 < 1$ 时，$C > 0$. 为了使得 $\Delta = B^2 - 4AC = 0$ 成立，可得

$$\sigma = \frac{d_1 + \mu}{\mu b}\left[\left(\sqrt{\frac{\eta}{d_3 + r}C} + \sqrt{\frac{d_3 + r}{\eta}A}\right)^2 - r\right] \tag{9}$$

进一步，如果(9)式成立，有 $B > 0$，这保证了方程(8)存在正解，将 A,C 的值代入(9)式中，重新整理可得 $R_2 = R^*$. 所以，当 $R_2 = R^* < 1$ 时，方程(8)有一个二重的正根

$$z = \frac{B}{2A}$$

也即系统(1)存在一个地方病平衡点 $E_4 = (x_4, y_4, z_4)$，其中：

$$x_4 = \frac{b}{d_1 + \mu}\left(\frac{\eta z_4 + d_3 + r}{k} + \sigma z_4\right) \qquad y_4 = \frac{\eta z_4 + d_3 + r}{k} \qquad z_4 = \frac{B}{2A}$$

4) 类似的，当 $R^* < R_2 < 1$ 时，可知 $\Delta = B^2 - 4AC > 0$，$C > 0$，$B > 0$. 这说明方程(8)有两个正根，分别是

$$z_5 = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \qquad z_6 = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

也即系统(1)存在两个地方病平衡点，分别是 $E_5 = (x_5, y_5, z_5)$ 和 $E_6 = (x_6, y_6, z_6)$，其中：

$$x_i = \frac{b}{d_1 + \mu}\left(\frac{\eta z_i + d_3 + r}{k} + \sigma z_i\right) \qquad y_i = \frac{\eta z_i + d_3 + r}{k} \qquad z_i = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \qquad i = 5,6$$

证毕.

3.2　平衡点的稳定性

下面将利用 Hurwitz 判据和构造 Lyapunov 函数的方法来讨论系统(1)的无病平衡点和多个地方病存在时的稳定性.

定理3 (i) 如果 $R_1 > 1$，$R_2 < 1$，则无病平衡点 E_1 是局部渐近稳定的；如果 $R_1 > 1$，$R_2 > 1$，无病平衡点是不稳定的.

(ii) 如果 $R_1 > 1$，$R_2 < 1$，$\frac{by_1}{\mu x_1}(ky_1 - d_3) + b\sigma \leqslant 0$，则无病平衡点 E_1 是全局渐近稳定的.

证 先来讨论 E_1 的局部稳定性. 为此给出系统(1) 在 E_1 处的 Jacobian 矩阵：

$$\boldsymbol{J}_{E_1} = \begin{bmatrix} -d_1 - \mu & b & b\sigma \\ \mu & -2\delta y_1 - d_2 & -ky_1 + r \\ 0 & 0 & ky_1 - d_3 - r \end{bmatrix}$$

相应地，可以得到 $\boldsymbol{J}_{E_1}$ 的特征方程为：

$$(\lambda + d_3 + r - ky_1)[\lambda^2 + (2\delta y_1 + d_1 + \mu)\lambda + d_2(d_1 + \mu)(R_1 - 1)] = 0 \tag{10}$$

显然 $\lambda = ky_1 - d_3 - r$ 是(10) 式的根，并且其余的根满足下面的方程：

$$\lambda^2 + (2\delta y_1 + d_1 + \mu)\lambda + d_2(d_1 + \mu)(R_1 - 1) = 0 \tag{11}$$

由于 $R_1 > 1$，$2\delta y_1 + d_1 + \mu > 0$，故方程(11) 的两个根具有负实部. 因此当 $\lambda_1 = -d_3 - r + ky_1 < 0$ 时，即 $R_2 < 1$ 时，由 Hurwitz 判据可知，E_1 是局部渐近稳定的. 而如果 $R_2 > 1$，则方程(11) 中的一个根实部非负，这也就意味着 E_1 是不稳定的.

为了讨论 E_1 的全局稳定，定义如下的 Lyapunov 函数

$$V_2 = \left(x - x_1 - x_1 \ln \frac{x}{x_1}\right) + \frac{by_1}{\mu x_1}\left(y - y_1 - y_1 \ln \frac{y}{y_1}\right) + \frac{by_1}{\mu x_1} z$$

进而可得

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}V_2}{\mathrm{d}t} =& b(x - x_1)\left[\left(\frac{y}{x} - \frac{y_1}{x_1}\right) + \frac{\sigma z}{x}\right] + \\ & \frac{by_1}{\mu x_1}(y - y_1)\left[\mu\left(\frac{x}{y} - \frac{x_1}{y_1}\right) - \delta(y - y_1) - kz + \frac{rz}{y}\right] + \\ & \frac{by_1}{\mu x_1}(kyz - \eta z^2 - d_3 z - rz) = by_1\left(2 - \frac{x_1 y}{x y_1} - \frac{x y_1}{x_1 y}\right) - \frac{b\delta y_1}{\mu x_1}(y - y_1)^2 - b\sigma x_1 \frac{z}{x} - \frac{by_1}{\mu x_1}\eta z^2 + \\ & \left[\frac{by_1}{\mu x_1}(ky_1 - d_3) + b\sigma\right]z - \frac{by_1}{\mu x_1} \cdot \frac{rz}{y} y_1 \end{aligned}$$

因此，如果

$$\frac{by_1}{\mu x_1}(ky_1 - d_3) + b\sigma \leqslant 0$$

则

$$\frac{\mathrm{d}V_2}{\mathrm{d}t} \leqslant 0$$

进一步，当且仅当$(x(t), y(t), z(t)) = (x, y, 0)$ 时，可得

$$\frac{\mathrm{d}V_2}{\mathrm{d}t} = 0$$

因此，由 LaSalle 不变集定理可知，当 $R_1 > 1$，$R_2 < 1$ 时，E_1 在 $\mathbb{R}_+^3$ 中是全局渐近稳定的.

证毕.

接下来，为了讨论几个地方病平衡点的稳定性，首先给出系统(1) 在地方病平衡点处的 Jacobian 矩阵. 为此，假设地方病平衡点 $\bar{E} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$，则系统(1) 在 $\bar{E}$ 处的 Jacobian 矩阵为

$$\boldsymbol{J}_{\bar{E}} = \begin{bmatrix} -d_1 - \mu & b & b\sigma \\ \mu & -2\delta\bar{y} - d_2 - k\bar{z} & -k\bar{y} + r \\ 0 & k\bar{z} & k\bar{y} - 2\eta\bar{z} - d_3 - r \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{J}_{\bar{E}}$ 的特征方程为：

$$\lambda^3 + c_1\lambda^2 + c_2\lambda + c_3 = 0 \tag{12}$$

其中：

$$c_1=\frac{\mu\bar{x}}{\bar{y}}+\delta\bar{y}+\frac{r\bar{z}}{\bar{y}}+d_1+\mu+\eta\bar{z}$$

$$c_2=\left(\frac{\mu\bar{x}}{\bar{y}}+\delta\bar{y}+\frac{r\bar{z}}{\bar{y}}\right)(d_1+\mu+\eta\bar{z})+(d_1+\mu)\eta\bar{z}+k\bar{z}(d_3+\eta\bar{z})-\mu b$$

$$c_3=\left(\frac{\mu\bar{x}}{\bar{y}}+\delta\bar{y}+\frac{r\bar{z}}{\bar{y}}\right)(d_1+\mu)\eta\bar{z}+k\bar{z}(d_3+\eta\bar{z})(d_1+\mu)-\mu b\eta\bar{z}-\mu bk\bar{z}\sigma$$

显然，$c_1>0$. 由于系统(1)的任意一个地方病平衡点 $\bar{E}=(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ 存在时，一定满足方程组(4)，因此可得

$$\begin{aligned}\mu b=&\frac{(d_1+\mu)(d_2+\delta\bar{y}+k\bar{z}-\frac{r\bar{z}}{\bar{y}})\bar{y}}{\bar{y}+\sigma\bar{z}}\leqslant\\&(d_1+\mu)\left(d_2+\delta\bar{y}+k\bar{z}-\frac{r\bar{z}}{\bar{y}}\right)=\\&(d_1+\mu)\frac{\mu\bar{x}}{\bar{y}}\end{aligned}$$

也即

$$\begin{aligned}c_2=&\left(\frac{\mu\bar{x}}{\bar{y}}+\delta\bar{y}+\frac{r\bar{z}}{\bar{y}}\right)(d_1+\mu+\eta\bar{z})+(d_1+\mu)\eta\bar{z}+k\bar{z}(d_3+\eta\bar{z})-\mu b\geqslant\\&\left(\frac{\mu\bar{x}}{\bar{y}}+\delta\bar{y}+\frac{r\bar{z}}{\bar{y}}\right)(d_1+\mu+\eta\bar{z})+(d_1+\mu)\eta\bar{z}+k\bar{z}(d_3+\eta\bar{z})-(d_1+\mu)\frac{\mu\bar{x}}{\bar{y}}>0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_3=&\left(\frac{\mu\bar{x}}{\bar{y}}+\delta\bar{y}+\frac{r\bar{z}}{\bar{y}}\right)(d_1+\mu)\eta\bar{z}+k\bar{z}(d_3+\eta\bar{z})(d_1+\mu)-\mu b\eta\bar{z}-\mu bk\bar{z}\sigma=\\&2A(d_1+\mu)k\bar{z}\left(\bar{z}-\frac{B}{2A}\right)\end{aligned}$$

下面讨论地方病平衡点 $E_i=(x_i,y_i,z_i)(i=2,3,4,5,6)$ 存在时的稳定性.

定理 4　当系统(1)的地方病平衡点 E_2,E_3 存在时，E_2,E_3 是局部渐近稳定的.

证　当 E_2 存在时，有 $\bar{E}=E_2$. 显然，$c_1>0$，$c_2>0$. 另外，

$$c_3=2A(d_1+\mu)kz_2\left(z_2-\frac{B}{2A}\right)=2A(d_1+\mu)kz_2\left(\frac{B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}-\frac{B}{2A}\right)>0$$

$$\begin{aligned}c_1c_2-c_3>&\left(\frac{\mu x_2}{y_2}+\delta y_2+\frac{rz_2}{y_2}+d_1+\mu+\eta z_2\right)\left[\eta z_2\left(\frac{\mu x_2}{y_2}+\delta y_2+\frac{rz_2}{y_2}+d_1+\mu\right)+\right.\\&\left.(d_1+\mu)\left(\frac{rz_2}{y_2}+\delta y_2\right)+kz_2(d_3+\eta z_2)\right]-\left(\frac{\mu x_2}{y_2}+\delta y_2+\frac{rz_2}{y_2}\right)(d_1+\mu)\eta z_2-\\&kz_2(d_3+\eta z_2)(d_1+\mu)+\mu b\eta z_2+\mu bkz_2\sigma>0\end{aligned}$$

利用 Hurwitz 判据可知，地方病平衡点 E_2 存在时是局部渐近稳定的. 类似地，当 E_3 存在时，有 $c_1>0$，$c_2>0$，以及

$$c_3=2A(d_1+\mu)kz_3\left(z_3-\frac{B}{2A}\right)=2A(d_1+\mu)kz_3\left(\frac{B}{A}-\frac{B}{2A}\right)=(d_1+\mu)kz_3B>0$$

$$\begin{aligned}c_1c_2-c_3>&\left(\frac{\mu x_3}{y_3}+\delta y_3+\frac{rz_3}{y_3}+d_1+\mu+\eta z_3\right)\left[\eta z_3\left(\frac{\mu x_3}{y_3}+\delta y_3+\frac{rz_3}{y_3}+d_1+\mu\right)+\right.\\&\left.(d_1+\mu)\left(\frac{rz_3}{y_3}+\delta y_3\right)+kz_3(d_3+\eta z_3)\right]-\left(\frac{\mu x_3}{y_3}+\delta y_3+\frac{rz_3}{y_3}\right)(d_1+\mu)\eta z_3-\\&kz_3(d_3+\eta z_3)(d_1+\mu)+\mu b\eta z_3+\mu bkz_3\sigma>0\end{aligned}$$

同样，由 Hurwitz 判据可知，地方病平衡点 E_3 存在时是局部渐近稳定的.

定理 5　若地方病平衡点 E_4 存在，则 E_4 是一个高阶奇点.

证 当 E_4 存在时，有 $\bar{E}=E_4$. 显然，$c_1>0$，$c_2>0$. 直接计算可得，

$$c_3=2A(d_1+\mu)kz_4\left(z_4-\frac{B}{2A}\right)=2A(d_1+\mu)kz_4\left(\frac{B}{2A}-\frac{B}{2A}\right)=0$$

这说明0是方程(12)的根，也即 E_4 存在时是一个高阶奇点.

证毕.

定理6 当地方病平衡点 E_5,E_6 存在时，E_5 是局部渐近稳定的，E_6 是不稳定的.

证 当 E_5 存在时，有 $\bar{E}=E_5$. 显然，$c_1>0$，$c_2>0$. 另外，

$$c_3=2A(d_1+\mu)kz_5\left(z_5-\frac{B}{2A}\right)=2A(d_1+\mu)kz_5\left(\frac{B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}-\frac{B}{2A}\right)>0$$

$$\begin{aligned}c_1c_2-c_3>&\left(\frac{\mu x_5}{y_5}+\delta y_5+\frac{rz_5}{y_5}+d_1+\mu+\eta z_5\right)\left[\eta z_5\left(\frac{\mu x_5}{y_5}+\delta y_5+\frac{rz_5}{y_5}+d_1+\mu\right)+\right.\\&\left.(d_1+\mu)\left(\frac{rz_5}{y_5}+\delta y_5\right)+kz_5(d_3+\eta z_5)\right]-\left(\frac{\mu x_5}{y_5}+\delta y_5+\frac{rz_5}{y_5}\right)(d_1+\mu)\eta z_5-\\&kz_5(d_3+\eta z_5)(d_1+\mu)+\mu b\eta z_5+\mu bkz_5\sigma>0\end{aligned}$$

由 Hurwitz 判据可知地方病平衡点 E_5 存在时是局部渐近稳定的.

当 E_6 存在时，有 $\bar{E}=E_6$. 显然，$c_1>0$，$c_2>0$，而

$$c_3=2A(d_1+\mu)kz_6\left(z_6-\frac{B}{2A}\right)=2A(d_1+\mu)kz_6\left(\frac{B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}-\frac{B}{2A}\right)<0$$

这意味着 E_6 是不稳定的.

证毕.

定理5和定理6说明正平衡点 E_4 是一个鞍结点，并且系统(1)在一定条件下可能发生后向分支. 即，当 $R_2<1$ 时，可能疾病并不会消亡. 只有疾病发生的初始状态位于无病平衡点 E_1 的吸引域内时，在 $R_2<1$ 的情况下疾病才会消亡，否则疾病会在种群内持久存在.

4 结 论

在本篇文章中，考虑了一类具有阶段结构的种群传染病模型. 首先，研究了种群持久存在的条件. 也即当 $R_1>1$ 时，种群才能存在. 接着，在种群持久存在的条件下讨论了无病平衡点 E_1 的存在性和稳定性. 即当 $R_1>1>R_2$ 时，E_1 局部渐近稳定；而当 $R_1>R_2\geqslant 1$ 时，E_1 是不稳定的，并且存在局部渐近稳定的地方病平衡点 $E_2(R_2>1)$ 和 $E_3(R_2=1)$.

另外，当 $R_1>1>R_2=R^*$ 时，系统(1)存在一个地方病平衡点 E_4，它是一个鞍结点. 进而，当 $R_1>1>R^*>R_2$ 时，系统(1)存在两个地方病平衡点 E_5 和 E_6，其中 E_5 是稳定的，而 E_6 是不稳定的. 研究结果表明，仅在成年阶段传播的疾病可能会引起后向分支现象的发生.

参考文献：

[1] CHA Y, IANNELLI M, MILNER F A. Existence and Uniqueness of Endemic States for the Age-Structured S-I-R Epidemic Model [J]. Mathematical Biosciences, 1998, 150(2): 177-190.

[2] GUO Z Y, HUANG L H, ZOU X F. Impact of Discontinuous Treatments on Disease Dynamics in an SIR Epidemic Model [J]. Mathematical Biosciences and Engineering, 2012, 9(1): 97-110.

[3] MA Z E, LIU J P, LI J. Stability Analysis for Differential Infectivity Epidemic Models [J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2003, 4(5): 841-856.

[4] 石瑞青，陈兰荪. 具有阶段结构和时滞的幼年染病单种群模型研究[J]. 大连理工大学学报，2010，50(2)：304-308.

[5] ZHANG T L, LIU J L, TENG Z D. Bifurcation Analysis of a Delayed SIS Epidemic Model with Stage Structure [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2009, 40(2): 563-576.

[6] WU C F, WENG P X. Stability Analysis of a Stage Structured SIS Model with General Incidence Rate [J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2010, 11(3): 1826-1834.

[7] 原存德，胡宝安. 具有阶段结构的SI传染病模型[J]. 应用数学学报，2002，25(2)：193-203.

［8］ LLIBRE J，VIDAL C. Hopf Periodic Orbits for a Ratio—Dependent Predator—Prey Model with Stage Structure［J］. Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B，2016，21(6)：1859-1867.
［9］ XIAO Y N，CHEN L S. Global Stability of a Predator-Prey System with Stage Structure for the Predator［J］. Acta Mathematica Sinica，English Series，2004，20(1)：63-70.
［10］ BANASIAK J，PHONGI E K，LACHOWICZ M. A Singularly Perturbed SIS Model with Age Structure［J］. Mathematical Biosciences and Engineering，2013，10(3)：499-521.
［11］ 杜燕飞，肖　鹏，曹　慧. 具有阶段结构的 SEI 传染病模型的全局分析［J］. 西南师范大学学报(自然科学版)，2018，43(9)：6-10.

Qualitative Analysis of a Class of Infectious Disease Model with Stage Structure

YANG　Xin，　LI Guan-qiang，　TAN Hong-wu
College of Arts and Sciences，Shaanxi University of Science and Technology，Xi'an 710029，China

Abstract：In this paper，a class of population disease models with stage structure has been established，mainly considering that the disease is only transmitted among adult individuals. Based on intraspecific competition and disease transmission among adult individuals，the effects of disease transmission on populations have been studied. On the one hand，the conditions for persistent populations have been discussed. And on the other hand，under the conditions for persistent populations，the existence and stability of the disease-free equilibrium and multiple endemic equilibrium points been studied. The results show that the disease transmitted only in adult stage may cause the phenomenon of backward bifurcation.
Key words：age structure；epidemic model；equilibrium point；backward branch；threshold

责任编辑　张　构