第 46 卷 第 2 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2021 年 2 月
Vol. 46 No. 2　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Feb. 2021

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2021.02.026

高等代数中关于多项式内容的两处微观处理①

王正攀

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 不同于大部分教材中用较为具体的辗转相除法，本文应用第二数学归纳法更为简洁地证明了两个多项式的最大公因式的存在性定理．提取了一个简单的引理：若一个整系数多项式可以写成一个本原多项式和一个有理数的乘积，则该有理数必为整数；在此基础上更为简洁地将整系数多项式在有理数域上的可约问题归结为它在整数环上的可约问题，更简洁地证明了整系数多项式有理根存在的必要性定理．总之，用较为概括简明的方法处理了两个多项式的最大公因式的存在性问题和涉及本原多项式的相关内容．

关　键　词： 多项式；最大公因式；本原多项式

中图分类号： G642.0；O151.2　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1000-5471(2021)02-0163-03

高等数学相较于初等数学更注重抽象思维的培养，而抽象思维的培养又需要在各门课程(特别是代数课程)的教学中具体体现．本文以高等代数中关于多项式的两个基本教学内容的处理为例来说明这一点．

多项式的基本理论在高等代数课程中是一段相对独立的内容，不同的教材将该部分内容放在不同的阶段(例如，教材[1-3]将这一内容放在课程起始阶段，而教材[4-5]将这一内容安排在课程中期阶段)，本文将以被广泛使用的教材[1]中相关内容的基本框架为基础，针对多项式的最大公因式[6-9]和有理系数多项式[10-12]两方面内容进行微观处理，以便让初步接触高等数学的同学逐步体验、适应和学习代数中的“抽象”．

1　辗转相除法

大部分高等代数教材证明两个多项式的最大公因式的存在性定理时，都充分展现了辗转相除这一过程．在目前高考不要求数学归纳法的大背景下，我们在介绍数学归纳法的前提下，使用第二数学归纳法进行证明，让初学者对照教材上较为具体的辗转相除的过程，体会相对概括、相对抽象的方法．在学习大学数学课程的初期，这不仅有助于同学们从对照中适应初等数学和高等数学的不同，体会到抽象方法的简洁，而且有助于同学们逐步掌握和使用抽象的方法．

下面两个结论由相关的定义直接验证可得：

推论 1　令 $f(x), g(x) \in \mathbb{P}[x]$．若 $f(x) \mid g(x)$，则 $f(x)$ 是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的一个最大公因式．

引理 1　关于 $f(x), g(x), h(x), k(x) \in \mathbb{P}[x]$，若

$$f(x) = h(x)g(x) + k(x)$$

则 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最大公因式与 $g(x)$ 和 $k(x)$ 的最大公因式相同．

现在我们用第二数学归纳法给出以下重要定理的较为简洁的证明．

定理 1　关于任意 $f(x), g(x) \in \mathbb{P}[x]$，存在 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最大公因式 $d(x) \in \mathbb{P}[x]$，且存在 $u(x)$，

① 收稿日期：2019-12-13

基金项目：国家自然科学基金项目(11101336)；西南大学教育教学改革研究重点项目(2020JY067)．

作者简介：王正攀，博士，教授，主要从事半群理论的研究．

$v(x) \in \mathbb{P}[x]$，使得

$$d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$$

证 据推论 1，可假设 $f(x), g(x) \neq 0$，不妨设 $\partial f(x) \leqslant \partial g(x)$. 令 $\min\{\partial f(x), \partial g(x)\} = n$. 以下关于 n 使用第二数学归纳法.

当 $n = 0$ 时，据推论 1，$f(x)$ 即为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的一个最大公因式，且 $f(x) = 1f(x) + 0g(x)$.

现假设 $0 \leqslant n < k$ 时结论成立. 当 $n = k$ 时，由带余除法知，存在 $q(x), r(x) \in \mathbb{P}[x]$，使得

$$\begin{cases} g(x) = q(x)f(x) + r(x) \\ r(x) = 0 \text{ 或 } \partial r(x) < \partial f(x) \end{cases} \tag{1}$$

若 $r(x) = 0$，则根据推论 1，$f(x)$ 是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的一个最大公因式，仍选 $u(x) = 1$，$v(x) = 0$ 即可. 若 $r(x) \neq 0$，由于 $\partial r(x) < k$，据归纳假设，$r(x), f(x)$ 存在最大公因式 $d(x)$，且存在 $u_1(x), v_1(x) \in \mathbb{P}[x]$，使得 $d(x) = u_1(x)r(x) + v_1(x)f(x)$. 据引理 1，$d(x)$ 也是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的一个最大公因式. 结合(1)式可知，$d(x) = (v_1(x) - u_1(x)q(x))f(x) + u_1(x)g(x)$，即只需选 $u(x) = v_1(x) - u_1(x)q(x)$，$v(x) = u_1(x)$.

2 有理多项式

现有诸多教材在处理有理系数多项式涉及本原多项式的相关内容时，通常给出并应用这一结论，而且在多处使用该结论的证明方法：若一个整系数多项式可以写成一个有理系数多项式与一个本原多项式的乘积，则该有理系数多项式必为整系数多项式. 针对于此，我们抽象并提取出了一个简单的引理(下文的引理 2)，以期更为简洁地组织这部分内容. 这一处理手段，是高等数学乃至数学研究中所采用的常用手段：从具有共性的数学对象、数学现象中提取概念、结论，然后加以应用，解决理论或实际问题.

首先不难验证：

推论 2 关于任意 $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$，存在 $r \in \mathbb{Q}$ 和本原多项式 $g(x)$，使得 $f(x) = rg(x)$.

下面引入一个简单的引理：

引理 2 令 $f(x) \in \mathbb{Z}[x] - \{0\}$，$r \in \mathbb{Q}$，$g(x)$ 为一本原多项式. 若 $f(x) = rg(x)$，则 $r \in \mathbb{Z}$.

证 令 $r = \dfrac{n}{m}$，$m, n \in \mathbb{Z}$，且$(m, n) = 1$. 因为 $rg(x) = f(x)$ 为一整系数多项式，且 m, n 互素，所以 m 整除 $g(x)$ 的每一系数，而 $g(x)$ 是本原的，即各系数的最大公因数是 ± 1，因此 $m = \pm 1$，即有 $r \in \mathbb{Z}$.

推论 3 令 $f(x) \in \mathbb{Q}[x] - \{0\}$，且 $f(x) = r_1 g_1(x) = r_2 g_2(x)$，其中，$r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$，$g_1(x), g_2(x)$ 为本原多项式. 则 $r_1 = \pm r_2$.

证 由假设知，$g_1(x) = \dfrac{r_2}{r_1} g_2(x)$. 据引理 2，$\dfrac{r_2}{r_1} \in \mathbb{Z}$，而 $g_2(x)$ 是一本原多项式，因此 $\dfrac{r_2}{r_1} = \pm 1$，即 $r_1 = \pm r_2$.

以下引理 3 的证明各高等代数教材所提供的方法基本相同，此处从略.

引理 3 两个本原多项式的乘积仍是本原多项式.

定理 2 令 $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$，$\partial f(x) \geqslant 1$. 则 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上可约当且仅当 $f(x)$ 在 $\mathbb{Z}$ 上可约.

证 我们仅证必要性部分.

若 $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 在 $\mathbb{Q}$ 上可约，则据定义，存在 $g(x)$，$h(x) \in \mathbb{Q}[x]$，使得 $f(x) = g(x)h(x)$，其中，$\partial g(x) < \partial f(x)$，$\partial h(x) < \partial f(x)$. 据推论 2，存在 $r, s \in \mathbb{Q}$ 和本原多项式 $g_1(x), h_1(x)$，使得 $g(x) = rg_1(x)$，$h(x) = sh_1(x)$. 于是 $f(x) = rsg_1(x)h_1(x)$. 据引理 3，$g_1(x)h_1(x)$ 是本原的，再据引理 2，$rs \in \mathbb{Z}$. 从而易知 $f(x)$ 在 $\mathbb{Z}$ 上可约.

关于 $\mathbb{Z}$ 上多项式的有理根的问题，我们有：

定理 3 令

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$$

且 $\partial f(x) \geqslant 1$. 若 $\dfrac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ 为 $f(x)$ 的一个根，$(r, s) = 1$，则 $s \mid a_n$，$r \mid a_0$.

证　若 $\frac{r}{s}$ 为 $f(x)$ 的一个根，则在 $\mathbb{Q}$ 上有 $\left(x-\frac{r}{s}\right)\Big| f(x)$，从而有 $(sx-r)\mid f(x)$. 因此存在 $g(x)\in\mathbb{Q}[x]$，使得 $f(x)=(sx-r)g(x)$. 由于 $sx-r$ 是本原的，据推论 2，存在 $q\in\mathbb{Q}$ 和本原多项式 $g_1(x)$，使得 $g(x)=qg_1(x)$. 因此 $f(x)=q((sx-r)g_1(x))$. 据引理 3，$(sx-r)g_1(x)$ 是本原的. 由引理 2 知，$q\in\mathbb{Z}$，从而 $g(x)\in\mathbb{Z}[x]$. 不妨设 $g(x)$ 的首项系数和零次方项系数分别为 b_{n-1} 和 b_0. 则通过比较系数，有 $a_n=sb_{n-1}$，$a_0=-rb_0$，即 $s\mid a_n$，$r\mid a_0$.

自笔者在高等代数的教学实践中采用类似处理方式以来，收到了良好的效果，让学生逐步有了“抽象”的意识和能力，也期待该处理方式对同行们的教学或学生们的学习有一定的参考价值.

参考文献：

[1]　北京大学数学系前代数小组编，王萼芳，石生明，修订. 高等代数 [M]. 5 版. 北京：高等教育出版社，2019.

[2]　郭聿琦，岑嘉评，王正攀. 高等代数教程 [M]. 北京：科学出版社，2014.

[3]　张禾瑞，郝鈵新. 高等代数 [M]. 北京：高等教育出版社，1997.

[4]　丘维声. 高等代数 [M]. 北京：科学出版社，2013.

[5]　姚慕生，吴泉水，谢启鸿. 高等代数学 [M]. 3 版. 上海：复旦大学出版社，2014.

[6]　毕成良，李　锐. 两多项式的最大公因式性质的另一证明 [J]. 高等数学研究，2005，8(3)：12-13,15.

[7]　丁双双. 最大公因式的一个性质 [J]. 大学数学，2011，27(6)：77-79.

[8]　汪仲文，官春梅，王和香，等. 多项式最大公因式的启发式教学实践 [J]. 大学数学，2017，33(1)：103-108.

[9]　谢启鸿. 高等代数中若干概念在基域扩张下的不变性 [J]. 大学数学，2015，31(6)：50-55.

[10] 罗永超，畅　敏，张　洪. 关于整系数多项式的不可约性与有理根存在性的新判别法 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2013，38(4)：1-4.

[11] 晏胜华，宋科研. 有理系数多项式的教学难点 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2019，44(8)：149-152.

[12] 张　萍. 关于±1 在多项式不可约性中的应用 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2017，42(3)：34-38.

Micro-Level Treatment of Two Topics Concerning Polynomials in Advanced Algebras

WANG Zheng-pan

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: Differing from usage of the concrete division algorithm in the most textbooks, we prove more briefly the existence theorem of the greatest common divisors of two polynomials in the second induction method. Extract a simple lemma: if a polynomial with integer coefficients is a multiplication of a primitive polynomial and a rational number, then the number must be an integer. Based on the lemma, we reduce more briefly the reducibility of a polynomial with integer coefficients on the field of rational numbers to the reducibility of the polynomial on the ring of integers, and prove more briefly the necessity theorem of rational roots of a polynomial with integer coefficients. In a word, we deal with the existence problem of the greatest common divisors of two polynomials and the related contents concerning primitive polynomials more concisely.

Key words: polynomials; greatest common divisors; primitive polynomials

责任编辑　廖　坤