第 46 卷 第 3 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2021 年 3 月
Vol. 46 No. 3 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Mar. 2021

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2021.03.015

抽象凸度量空间上的 R-KKM 引理及其应用①

夏顺友[1]， 王常春[2]， 杨彦龙[3]， 陈治友[4]

1. 贵州师范学院 数学与大数据学院，贵阳 550018；2. 遵义师范学院 数学学院. 贵州 遵义 563006；
3. 贵州大学 数统学院，贵阳 550025；4. 贵阳学院 数学与信息科学学院，贵阳 550005

摘要：证明了满足广义 KKM 映射条件与 H0 条件的抽象凸度量空间的任意两个邻近对子集之间的集值映射的有限交性质. 进一步，在紧性假设条件下，得到了该类集值映射的无限交性质. 最后，证明了满足 H0 条件的抽象凸度量空间的任意两个邻近对子集之间的集值映射的最佳邻近点的存在性.

关 键 词：抽象凸度量空间；广义 KKM 映射；邻近对；最佳邻近点

中图分类号：O177.91 **文献标志码**：A **文章编号**：1000-5471(2021)03-0096-05

非线性分析中的许多问题都可以通过一些子集族的非空交来解决，文献[1] 的 KKM 引理给出了集合族非空交性质这一重要结论，随后得到了推广[2-23].

空间的凸性在 KKM 理论中起着十分重要的作用，利用公理化方法建立凸空间理论以及非线性分析相应结果的推广成为一个热门研究领域，产生了很多重要成果[4-25]. 文献[26] 引入度量空间中的超凸概念之后，在超凸度量空间中得到了 KKM 引理以及非线性分析中许多重要结果.

本文将在不具线性结构的抽象凸度量空间中建立一个广义 KKM 定理，并进一步得到最佳邻近点存在定理，该定理作为 Brouwer 不动点定理和 Fan-Browder 不动点定理对非自映射在抽象凸度量空间中的推广.

1 预备知识

设 (X, d) 是度量空间，X 的一切子集构成的集族记为 2^X，X 的一切非空有限子集构成的集族记为 $\langle X\rangle$，对任意 $A \in \langle X\rangle$ 的元素个数记为 $|A|$. 下面介绍最佳邻近点问题[29].

设 A 是度量空间 (X, d) 的非空子集，映射 $f: A \longrightarrow X$ 有不动点 $x \in A$，即满足 $f(x) = x$，等价地，可描述为 $d(x, f(x)) = 0$. 所以若 f 在 A 上有不动点，则 $f(A) \cap A \neq \varnothing$. 但是反之未必成立. 显然如果不动点方程 $f(x) = x$ 无解，则对任意 $x \in A$，都有 $d(x, f(x)) > 0$. 此时求解使得 $d(x, f(x))$ 最小的点 $x \in A$ 的问题称为最佳邻近点问题，也就是一个极小化优化问题，即求解 $\min\limits_{x\in A} d(x, f(x))$. 一般地，设 A, B 是度量空间 (X, d) 的两个非空子集，映射 $f: A \longrightarrow B$ 决定了一个最佳邻近点问题是求 $x^* \in A$，使得 $d(x^*, f(x^*)) = \min\limits_{x\in A} d(x, f(x))$，等价地，可以描述为 $d(x^*, f(x^*)) = d(A, B)$. 特别地，当 $d(A, B) = 0$ 时，$x^* \in A$ 为 f 在 A 上的不动点. 本文将研究抽象凸度量空间 (X, d) 的两个非空邻近对子集 A, B 之间的集值映射 $F: A \longrightarrow 2^B$ 决定的最佳邻近点问题：求 $x^* \in A$，使得 $d(x^*, F(x^*)) = d(A, B)$.

---

① 收稿日期：2019-09-09

基金项目：国家自然科学基金项目(11561013,11761023,71961003)；贵州师范学院博士基金项目(2018BS005)；贵州省科技厅联合基金项目(黔科合 LH 字[2016]7031，[2017]7223 号).

作者简介：夏顺友，教授，博士，主要从事非线性分析与对策论研究.

下面回顾抽象凸空间的相关概念[6-7,24-25].

定义 1　若度量空间(X, d)的子集族$C \subset 2^X$满足条件：

① $\varnothing, X \in C$；

② 对任意子集族$D \subset C$，都有$\bigcap_{A \in D} A \subset C$；

③ 对任意$A \in C$，$\varepsilon > 0$，都有$\{x \in X: d(x, A) < \varepsilon\} \in C$，则称度量空间$(X, d)$为抽象凸度量空间，记为$(X, d, C)$；则$C$称为度量空间$(X, d)$上的一个抽象凸结构，$C$中的元称为抽象凸集.

注 1　对可缩集代替线性凸集的情形，文献[6-7]将抽象凸度量空间称之为$l.c.$空间. 当且仅当$co_C A = A$时，任意$A \subset X$为抽象凸集，其中$co_C A = \bigcap_{A \subset B}\{B: B \in C\}$表示集合$A \subset X$的抽象凸包.

定义 2　如果对任意$A = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \in \langle X \rangle$，存在连续映射$f: \Delta_N \to co_C A$(其中$N = \{0,1,\cdots, n\}$)，使得对任意$J \subset N$，都有$f(\Delta_J) \subset co_C\{x_j: j \in J\}$成立. 其中$\Delta_N$表示$n+1$维欧氏空间中的标准$n$单纯形. 此时称抽象凸度量空间$(X, d, C)$满足 H0 条件，或称$(X, d, C)$为满足 H0 条件的抽象凸度量空间.

2　关于两抽象凸度量空间上非自映射的 KKM 定理

下面两个定义在文献[27-29]的基础上改进得来.

定义 3　设P, Q是抽象凸度量空间(X, d, C)的两非空子集，如果对任意$(x, y) \in P \times Q$，都存在$(x', y') \in P \times Q$，使得$d(x, y') = d(x', y) = d(P, Q)$成立，则称$(P, Q)$为邻近对. 进而若$P, Q$还是抽象凸集，则称$(P, Q)$为抽象凸邻近对.

定义 4　设P, Q是抽象凸度量空间(X, d, C)的两非空子集，且(P, Q)为邻近对，称非自映射$F: P \longrightarrow 2^Q$是 R-KKM 映射，如果对任意$\{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \in \langle P \rangle$，都存在$\{y_0, y_1, \cdots, y_n\} \in \langle Q \rangle$满足条件：

$$d(x_j, y_j) = d(P, Q), \ \forall j \in N = \{0, 1, \cdots, n\}$$

使得对任意非空子集$J \subset N$都有：$co_C\{y_j: j \in J\} \subset F(\{x_j: j \in J\})$.

注 2　R-KKM 映射的名称沿用自文献[29]. 显然当映射$F: P \longrightarrow 2^Q$是 R-KKM 映射时，对任意$x \in P$，都有$d(x, F(x)) = d(P, Q)$，而且当$P = Q$时，R-KKM 映射就是 KKM 映射.

定理 1　设P, Q是满足 H0 条件的抽象凸度量空间(X, d, C)的两非空子集，且(P, Q)为邻近对，非自映射$F: P \longrightarrow 2^Q$是非空闭值 R-KKM 映射，则$\{F(x): x \in P\}$有有限交性质.

证　用反证法. 假设$\{F(x): x \in P\}$没有有限交性质，则存在$\{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \in \langle P \rangle$，使得$\bigcap_{i=0}^{n} F(x_i) = \varnothing$.

因为F是 R-KKM 映射，对$\{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \in \langle P \rangle$，存在$\{y_0, y_1, \cdots, y_n\} \in \langle Q \rangle$满足条件：

$$d(x_j, y_j) = d(P, Q), \ \forall j \in N = \{0, 1, \cdots, n\}$$

使得对任意非空子集$J \subset N$，都有$co_C\{y_j: j \in J\} \subset F(\{x_j: j \in J\})$.

记$Y = co_C\{y_0, y_1, \cdots y_n\}$，定义函数$\beta: Y \longrightarrow [0, 1]$为$\beta_i(y) = \dfrac{d(y, F(x_i) \cap Y)}{\sum_{i=0}^{n} d(y, F(x_i) \cap Y)}$，$i = 0,1,\cdots, n$，$\forall y \in Y$.

由于$\bigcap_{i=0}^{n} F(x_i) = \varnothing$，所以有$\sum_{i=0}^{n} d(y, F(x_i) \cap Y) > 0$，$\forall y \in Y$，且$\beta_i(y) \geqslant 0$，$i = 0,1,\cdots,n$，$\forall y \in Y$，以及$\sum_{i=0}^{n} \beta_i(y) = 1$. 于是定义映射$g: Y \longrightarrow \Delta_n$为$g(y) = \sum_{i=0}^{n} \beta_i(y) \boldsymbol{e}^i$，$\forall y \in Y$，其中$\boldsymbol{e}^i$表示第$i$个坐标分量为 1 而其它坐标分量为 0 的$n+1$维单位向量.

由 H0 条件知存在连续映射$h: \Delta_n \longrightarrow Y$，使得对任意$J \subset N$，都有$h(\Delta_J) \subset co_C\{y_j: j \in J\}$.

于是连续复合映射$g \circ h: \Delta_n \longrightarrow \Delta_n$存在不动点，即存在$\boldsymbol{e} \in \Delta_n$，使得$\boldsymbol{e} = g \circ h(\boldsymbol{e})$. 也即存在点$y^* = h(\boldsymbol{e})$，使得$\boldsymbol{e} = g(y^*) = \sum_{i=0}^{n} \beta_i(y^*) \boldsymbol{e}^i$.

记$I(y^*) = \{i: \beta_i(y^*) > 0, i = 0,1,\cdots,n\} = \{i: d(y, F(x_i) \cap Y) > 0, i = 0,1,\cdots,n\}$. 从而对任

意 $i \in I(y^*)$，都有 $d(y, F(x_i) \cap Y) > 0$，因此对任意 $i \in I(y^*)$，都有 $y^* \notin F(x_i) \cap Y$，即 $y^* \notin \bigcup_{i \in I(y^*)} (F(x_i) \cap Y)$.

另一方面有 $y^* = h(\boldsymbol{e}) = h(g(y^*)) = h(\sum_{i=0}^{n} \beta_i(y^*) \boldsymbol{e}^i) = h(\sum_{i \in I(y^*)} \beta_i(y^*) \boldsymbol{e}^i) \subset co_C\{y_i : i \in I(y^*)\}$.

因此 $y^* = h(\boldsymbol{e}) \subset co_C\{y_i : i \in I(y^*)\} \subset \bigcup_{i \in I(y^*)} (F(x_i) \cap Y)$. 这就导致了矛盾. 定理得证.

定理2 设 P, Q 是满足H0条件的抽象凸度量空间 (X, d, C) 的两非空子集，且 (P, Q) 为邻近对，非自映射 $F: P \longrightarrow 2^Q$ 是非空闭值R-KKM映射，且存在 $x \in P$，使得 $F(x)$ 是紧集(或者存在某些 $x \in P$，使得 $F(x)$ 的交是紧集)，则 $\{F(x) : x \in P\}$ 有任意交性质.

3 最佳邻近点存在性的应用

定义5 设 (P, Q) 是抽象凸度量空间 (X, d, C) 的两非空抽象凸邻近对，若

$$d(x_i, y_i) = d(P, Q), \ \forall i \in N$$

其中 $x_i \in P$，$y_i \in Q$，$N = \{0, 1, \cdots, n\}$ 则有 $(co_C\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}, co_C\{y_0, y_1, \cdots, y_n\})$ 也是邻近对. 那么称该性质为抽象凸邻近对性质，简记为CPP性质.

注3 由CPP性质，显然有 $d(co_C\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}, co_C\{y_0, y_1, \cdots, y_n\}) = d(P, Q)$.

定理3 设 P, Q 是满足H0条件的抽象凸度量空间 (X, d, C) 的两非空紧抽象凸子集，且 (P, Q) 为满足CPP性质的邻近对，非自映射 $F: P \longrightarrow 2^Q$ 是非空抽象凸值、非空开逆值R-KKM映射，则一定存在 $x^* \in P$，使得 $d(x^*, F(x^*)) = d(P, Q)$ 成立.

证 定义集值映射 $G: Q \longrightarrow 2^P$ 为 $G(y) = P \backslash F^{-1}(y)$，$\forall y \in Q$.

若存在 $y_0 \in Q_0$，使得 $G(y_0) = \varnothing$，则 $F^{-1}(y_0) \supset P$，于是对任意 $x \in P$，都有 $y_0 \in F(x)$. 由 $y_0 \in Q$ 及邻近对条件可知存在 $x_0 \in P$，使得 $d(x_0, y_0) = d(P, Q)$.

特殊地，当 $y_0 \in F(x_0)$ 时，$d(P, Q) \leqslant d(x_0, F(x_0)) \leqslant d(x_0, y_0) = d(P, Q)$，即 x_0 是 P 上的最佳邻近点.

若对任意 $y \in Q$，都有 $G(y) \neq \varnothing$，则由 F 满足的条件有 G 为非空闭值集值映射.

又因为 $\bigcup_{y \in Q} F^{-1}(y)$ 是 P 的开覆盖，所以有

$$\bigcap_{y \in Q} G(y) = \bigcap_{y \in Q} (A \backslash F^{-1}(y)) = A \backslash (\bigcup_{y \in Q} F^{-1}(y)) = \varnothing$$

由定理2知 G 不是R-KKM映射，则存在 $\{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \in \langle P \rangle$，对任意 $\{y_0, y_1, \cdots, y_n\} \in \langle Q \rangle$，满足条件 $d(x_j, y_j) = d(P, Q)$，$\forall j \in N = \{0, 1, \cdots, n\}$，都存在非空子集 $J \subset N$，使得

$$co_C\{x_j : j \in J\} \not\subset G(\{y_j : j \in J\})$$

为了叙述方便，不妨设 $J = N$，使得 $co_C\{x_j : j \in N\} \not\subset G(\{y_j : j \in N\}) = \bigcup_{i=0}^{n} G(y_i)$.

于是存在 $x^* \in co_C\{x_i : i \in N\}$，但是 $x^* \notin \bigcup_{i \in N} G(y_i)$，从而 $x^* \in \bigcap_{i \in N} F^{-1}(y_i)$. 所以对任意 $i \in N$，都有 $y_i \in F(x^*)$. 由 $F(x^*)$ 是抽象凸，有 $co_C\{y_i : i \in N\} \subset F(x^*)$. 由CPP性质可知，存在点 $y^* \in co_C\{y_i : i \in N\}$ 使得 $d(x^*, y^*) = d(P, Q)$.

因此 $d(P, Q) \leqslant d(x^*, F(x^*)) \leqslant d(x^*, y^*) = d(P, Q)$，即 $d(x^*, F(x^*)) = d(P, Q)$. 得证.

定理4 设 P 是满足H0条件的抽象凸度量空间 (X, d, C) 的两个非空紧抽象凸子集，且 (P, Q) 为满足CPP性质的邻近对，映射 $F: P \longrightarrow 2^P$ 是非空抽象凸值、开逆值的，则一定存在 $x^* \in P$，使得 $d(x^*, F(x^*)) = 0$ 成立，即 F 存在不动点 $x^* \in P$.

注4 本文在满足H0条件的抽象凸度量空间中建立了邻近对上的非自映射的KKM引理，作为应用证明了最佳邻近点的存在性. 该文将文献[29]的结论推广到了抽象凸度量空间.

参考文献：

[1] KNASTER B, KURATOWSKI C, MAZURKIEWICZ S. Ein Beweis des Fixpunktsatzes Für N-dimensionale Simplexe [J].

Fundamenta Mathematicae，1929，14：132-137.

[2] FAN K. A Generalization of Tychonoff's Fixed Point Theorem [J]. Mathematische Annalen，1961，142(3)：305-310.

[3] PARK S. Some Coincidence Theorems on Acyclic Multifunctions and Applications to KKM Theory [M]. River Edge：World Scientific，1992.

[4] LASSONDE M. Fixed Points for Kakutani Factorizable Multifunctions [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，1990，152(1)：46-60.

[5] HORVATH C D. Some Results on Multi-Valued Mappings and Inequalities Without Convexity[M]//LIN B L，SIMONS S. Nonlinear and Convex Analysis. Lecture Notes in Pure and Applied Math. New York：Dekker，1987：99-106.

[6] HORVATH C D. Contractibility and Generalized Convexity [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，1991，156(2)：341-357.

[7] HORVATH C D. Extension and Selection Theorems in Topological Spaces with a Generalized Convexity Structure [J]. Annales De La Faculté Des Sciences De Toulouse Mathématiques，1993，2(2)：253-269.

[8] 夏顺友. 集值 Sperner 组合引理与抽象凸空间中的 KKMS 引理 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2013，38(6)：25-29.

[9] 孟　雪，邓　磊. GFC-空间中的参数型 KKM 定理及其应用(英文) [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2011，36(5)：52-55.

[10] 王　彤，邓　磊. G-凸空间中的广义 KKM 定理及极小极大定理 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2005，30(3)：397-400.

[11] PARK S，KIM H. Foundations of the KKM Theory on Generalized Convex Spaces [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，1997，209(2)：551-571.

[12] 文开庭. FC-度量空间中的 R-KKM 定理及其对抽象经济的应用 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2010，35(01)：45-49.

[13] DING X P. Generalized KKM Type Theorems in FC-Spaces with Applications (I) [J]. Journal of Global Optimization，2006，36(4)：581-596.

[14] ZHOU L W，HUANG N J. Generalized KKM Theorems on Hadamard Manifolds with Applications [EB/OL]. (2009-08-16) [2019-01-15]. http：//www. paper. edu. cn/index. php/default/releasepaper/ content/200906-669.

[15] PARK S. Riemannian Manifolds are KKM Spaces [J]. Advances in the Theory of Nonlinear Analysis and Its Application，2019：18-27.

[16] PARK S. Generalizations of some KKM Type Results on Hyperbolic Spaces [J]. Nonlinear Funct Anal Appl，2018，23 (4) ：805-818.

[17] ZHOU L W，HUANG N J. A Revision on Geodesic Pseudo-Convex Combination and Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz Theorem on Hadamard Manifolds [J]. Journal of Optimization Theory and Applications，2019，182(3)：1186-1198.

[18] LEE W. Remarks on the Kkm Theory of Hadamard Manifolds and Hyperbolic Spaces [EB/OL]. Nonlinear Funct Anal Appl，2015，20(4)：579-593.

[19] CHAIPUNYA P，KUMAM P. Nonself KKM Maps and Corresponding Theorems in Hadamard Manifolds [J]. Applied General Topology，2015，16(1)：37.

[20] RAHIMI R，FARAJZADEH A P，VARZPOUR S M. A New Extension of Fan-KKM Theory and Equilibrium Theory on Hadamard Manifolds [J]. Azerbaijan Journal of Mathematics，2017，7(2)：88-112.

[21] 郑　莲. 弱 FC-KKM 映射与聚合不动点定理 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2007，32(5)：10-13.

[22] 汪达成. 广义区间空间中参数型非紧 KKM 定理及其应用 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2004，29(5)：734-738.

[23] 刘学文. SKKM 型定理的推广及其应用 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2003，28(3)：362-366.

[24] XIANG S W，XIA S Y. A Further Characteristic of Abstract Convexity Structures on Topological Spaces [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2007，335(1)：716-723.

[25] XIANG S W，XIA S Y，CHEN J. KKM Lemmas and Minimax Inequality Theorems in Abstract Convexity Spaces [J]. Fixed Point Theory and Applications，2013，2013：209.

[26] ARONSZAJN N，PANITCHPAKDI P. Extension of Uniformly Continuous Transformations and Hyperconvex Metric

Spaces [J]. Pacific Journal of Mathematics, 1956, 6(3): 405-439.
[27] ELDRED A A, KIRK W A, VEERAMANI P. Proximal Normal Structure and Relatively Nonexpansive Mappings [J]. Studia Mathematica, 2005, 171(3): 283-293.
[28] CHANG S S, ZHANG Y. Generalized KKM Theorem and Variational Inequalities [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1991, 159(1): 208-223.
[29] SANKAR RAJ V, SOMASUNDARAM S. KKM-type Theorems for Best Proximity Points [J]. Applied Mathematics Letters, 2012, 25(3): 496-499.

R-KKM Lemma with an Application in Abstract Convexity Metric Spaces

XIA Shun-you[1], WANG Chang-chun[2],
YANG yan-long[3], CHEN Zhi-you[4]

1. School of Mathematics and Big Data, Guizhou Education University, Guiyang 550018, China;
2. Department of Mathematics, Zunyi Normal College, Zunyi Guizhou 563006, China;
3. School of Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang 550025, China;
4. College of Mathematics and Information Science, Guiyang University, Guiyang 550005, China

Abstract: We prove that each set-valued mapping between two proximity pairs subsets in abstract convexity metric spaces with condition of generalized KKM mappings and H_0 has the finite intersection property. Furthermore, the infinite intersection property is derived with compact conditions. Finally, existence of best proximity points is proved for every set-valued mappings between two proximity pairs subsets in abstract convexity metric spaces with H_0 condition.

Key words: abstract convexity metric spaces; generalized KKM mappings; proximity pairs; best proximity points

责任编辑 张 枸