DOI：10.13718/j.cnki.xsxb.2021.03.018

分数阶热传导方程侧边值问题的一种分数次 Tikhonov 方法[①]

柏恩鹏，　熊向团

西北师范大学 数学与统计学院，兰州 730070

摘要： 考虑四分之一平面内的分数阶热传导方程的侧边值问题，给出求解该问题的一种分数次 Tikhonov 方法，克服了经典 Tikhonov 方法过度平滑的影响，并讨论该方法先验和后验的正则化参数的选取，使得问题的精确解与近似解之间的误差估计达到了 Hölder 型最优.

关　键　词： 不适定问题；分数阶热传导方程侧边值问题；分数次 Tikhonov 方法；正则化参数选取；误差估计

中图分类号： O241.1　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1000－5471(2021)03－0119－07

在一些工程问题中，人们往往需要确定一个物体的表面温度，但又无法在物体表面直接测量，就必须由物体内部某固定位置的温度来反演表面温度，这就是所谓的逆热传导问题，或称为热传导方程的侧边值问题. 这类问题是严重不适定的，许多学者给出了不同的正则化方法，包括最优滤波法[1]、Fourier 截断法[2]、拟逆法[3]、谱方法[4]等. 近年来，分数阶微分问题广泛应用于数学界和工程界[5-12]，用分数阶微分方程去阐释热传导过程是一种较为成功的途径. 针对分数阶热传导方程的侧边值问题，本文给出一种分数次 Tikhonov 正则化方法，此方法既包含了经典 Tikhonov 方法的优点，又克服了经典 Tikhonov 解的过度光滑性，而且在做误差估计时也体现了该方法的简洁性. 这种分数次 Tikhonnov 方法是文献[13]提出的一种新的正则化方法，文献[14]应用这种方法讨论了 Helmholtz 方程的 Cauchy 问题，文献[15]讨论时间分数阶反扩散问题时也用到此方法. 本文的方法和结果为解决更复杂的问题奠定了基础.

1　问题不适定性

考虑以下不适定问题：

$$\begin{cases} u_{xx} = \dfrac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} & x > 0，t > 0，0 < \alpha < 1 \\ u(x，0) = 0 & x \geqslant 0 \\ u(\overline{x}，t) = g(t) & t \geqslant 0 \\ u(x，t)\big|_{x \to \infty} \text{ 有界} & \end{cases} \tag{1}$$

其中时间分数阶导数 $\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}$ 由文献[16]中 $\alpha(0 < \alpha < 1)$ 阶 Caputo 导数定义.

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{\partial u(x，s)}{\partial s}\frac{\mathrm{d}s}{(t-s)^\alpha} \qquad 0 < \alpha < 1 \tag{2}$$

---

① 收稿日期：2020－04－07
基金项目：国家自然科学基金项目(11661072)；西北师范大学科学计算创新团队资助项目(NWNU-LKQN-17-5).
作者简介：柏恩鹏，硕士研究生，主要从事偏微分方程的研究.
通信作者：熊向团，教授，博士研究生导师.

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}=\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \qquad \alpha=1 \tag{3}$$

注1 当 $\alpha=1$ 时，问题(1)是经典的热传导方程的侧边值问题[17].

实际问题中，我们只能考虑给定在 $x=\overline{x}$ 处的温度测量数据 $g^\delta(t)$，并由它来反演问题(1)在区间 $(0,\overline{x})$ 上的解 $u(x,t)$，其中 $g^\delta(t)\in L^2(\mathbb{R})$ 满足

$$\| g^\delta - g \| \leqslant \delta \tag{4}$$

这里常数 $\delta>0$ 表示测量误差，$\|\cdot\|$ 表示 L^2-范数.

进一步，我们假设先验界如下：

$$\| u(0,\cdot) \| \leqslant N \tag{5}$$

其中 N 是给定的正数.

为了在频域中考虑问题(1)，我们将关于 t 的函数延拓到整个实轴，令 $t<0$ 的部分为零. 定义函数 $f(t)$ 的 Fourier 变换如下：

$$\hat{f}(\xi):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\xi}\,\mathrm{d}t \qquad -\infty<\xi<+\infty \tag{6}$$

相应的函数 $\hat{f}(\xi)$ 的 Fourier 逆变换为：

$$f(t):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\xi}\,\mathrm{d}\xi \tag{7}$$

对问题(1)关于变量 t 作 Fourier 变换：

$$\begin{cases} \hat{u}_{xx}=(\mathrm{i}\xi)^\alpha \hat{u}(x,\xi) & x>0,\ \xi\in\mathbb{R} \\ \hat{u}(\overline{x},\xi)=\hat{g}(\xi) & \xi\in\mathbb{R} \\ \hat{u}(x,\xi)\big|_{x\to\infty} \text{有界} & \end{cases} \tag{8}$$

得到问题(8)的解为

$$\hat{u}(x,\xi)=\mathrm{e}^{(\overline{x}-x)\sqrt{(\mathrm{i}\xi)^\alpha}}\hat{g}(\xi) \tag{9}$$

其中

$$(\mathrm{i}\xi)^\alpha=|\xi|^\alpha\left[\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\ \mathrm{sign}(\xi)\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right] \tag{10}$$

令

$$\eta=\sqrt{(\mathrm{i}\xi)^\alpha} \tag{11}$$

则 η 的实部和虚部分别表示为：

$$a=\mathrm{Re}(\eta) \qquad b=\mathrm{Im}(\eta)$$

因此

$$\eta=a+b\mathrm{i} \tag{12}$$

根据(9)式得问题(1)的精确解为：

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi t}\mathrm{e}^{(\overline{x}-x)\sqrt{(\mathrm{i}\xi)^\alpha}}\hat{g}(\xi)\,\mathrm{d}\xi \tag{13}$$

由 Parseval 等式[18]和条件(5)得：

$$\| u(0,\cdot)\|^2=\|\hat{u}(0,\cdot)\|^2=\int_{-\infty}^{+\infty}|\mathrm{e}^{\overline{x}\sqrt{(\mathrm{i}\xi)^\alpha}}\hat{g}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi<\infty \tag{14}$$

注意到当 $|\xi|\to\infty$ 时 $\mathrm{e}^{\overline{x}\sqrt{(\mathrm{i}\xi)^\alpha}}\to\infty$，(14)式中精确数据 $g(t)$ 的 Fourier 变换 $\hat{g}(\xi)$ 必须是快速衰减的，但测量数据 $g^\delta(\xi)$ 属于 $L^2(\mathbb{R})$，其高频部分衰减的速率不会有这么快，这样 $g(t)$ 的很小扰动就会导致与(9)式对应的 $\hat{u}^\delta(x,\xi)$ 不存在 Fourier 逆变换. 为了得到问题(1)的稳定近似解，下面将给出一种分数次 Tikhonov 正则化方法.

2　先验情况下正则化参数的选择

我们考虑用分数次 Tikhonov 正则化方法来解决不适定问题(1)．由(9)式可知

$$\hat{u}(x,\xi)=e^{(\bar{x}-x)\sqrt{(i\xi)^{\alpha}}}\hat{g}(\xi)$$

令

$$T(x,\xi)=e^{(\bar{x}-x)\sqrt{(i\xi)^{\alpha}}}\tag{15}$$

$$T(0,\xi)=e^{\bar{x}\sqrt{(i\xi)^{\alpha}}}\tag{16}$$

因此，$\hat{u}(x,\xi)$ 可写为

$$\hat{u}(x,\xi)=T(x,\xi)\hat{g}(\xi)\tag{17}$$

在频域空间构造分数次 Tikhonov 正则化解为：

$$\hat{u}_{\mu}^{\delta}(x,\xi)=\frac{T(x,\xi)}{1+\mu\,|T(0,\xi)|^{2\sigma}}\hat{g}^{\delta}(\xi)\qquad \frac{1}{2}\leqslant\sigma\leqslant 1\tag{18}$$

其中：$\mu>0$ 是正则化参数，σ 是分数次参数．

接下来为了使证明简便，给出一个辅助引理．

引理 1[19]　如果常数 $\mu>0$，$0<p<q$，对于变量 $s\geqslant 0$，有如下不等式成立：

$$\sup_{s>0}\frac{e^{sp}}{1+\mu e^{sq}}\leqslant\mu^{-\frac{p}{q}}\tag{19}$$

定理 1　设 $u(x,t)$ 由(13)式给出，且条件(4)和(5)成立，那么当 μ 被选取为

$$\mu=\left(\frac{\delta}{N}\right)^{2\bar{x}\sigma}\qquad \frac{1}{2}\leqslant\sigma\leqslant 1\tag{20}$$

成立如下误差估计式：

$$\|u_{\mu}^{\delta}(x,\cdot)-u(x,\cdot)\|\leqslant\delta^{x}N^{1-x}+\delta^{1-(\bar{x}-x)}N^{\bar{x}-x}\tag{21}$$

并称 $u_{\mu}^{\delta}(x,t)$ 为问题(1)的正则化解．

证　由三角不等式和 Parseval 等式可得

$$\begin{aligned}\|u_{\mu}^{\delta}(x,\cdot)-u(x,\cdot)\|&=\|\hat{u}_{\mu}^{\delta}(x,\cdot)-\hat{u}(x,\cdot)\|=\\&\|\hat{u}_{\mu}^{\delta}(x,\cdot)-\hat{u}_{\mu}(x,\cdot)+\hat{u}_{\mu}(x,\cdot)-\hat{u}(x,\cdot)\|\leqslant\\&\|\hat{u}_{\mu}^{\delta}(x,\cdot)-\hat{u}_{\mu}(x,\cdot)\|+\|\hat{u}_{\mu}(x,\cdot)-\hat{u}(x,\cdot)\|=\\&I_1+I_2\end{aligned}\tag{22}$$

记 $I_1=\|\hat{u}_{\mu}^{\delta}(x,\cdot)-\hat{u}_{\mu}(x,\cdot)\|$，$I_2=\|\hat{u}_{\mu}(x,\cdot)-\hat{u}(x,\cdot)\|$，下面分别估计 I_1，I_2，

$$\begin{aligned}I_1=&\left\|\frac{T(x,\xi)}{1+\mu\,|T(0,\xi)|^{2\sigma}}\hat{g}^{\delta}(\xi)-\frac{T(x,\xi)}{1+\mu\,|T(0,\xi)|^{2\sigma}}\hat{g}(\xi)\right\|=\\&\left\|\frac{T(x,\xi)}{1+\mu\,|T(0,\xi)|^{2\sigma}}(\hat{g}^{\delta}(\xi)-\hat{g}(\xi))\right\|\leqslant\\&\delta\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\left|\frac{T(x,\xi)}{1+\mu\,|T(0,\xi)|^{2\sigma}}\right|\end{aligned}$$

由(15)，(16)式可得：

$$|T(x,\xi)|=e^{(\bar{x}-x)a}\tag{23}$$

$$|T(0,\xi)|=e^{\bar{x}a}\tag{24}$$

因此，

$$\begin{aligned}I_1\leqslant&\delta\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\left|\frac{T(x,\xi)}{1+\mu\,|T(0,\xi)|^{2\sigma}}\right|=\\&\delta\sup_{a\geqslant 0}\left|\frac{e^{(\bar{x}-x)a}}{1+\mu e^{2\bar{x}a\sigma}}\right|\end{aligned}$$

由(19)式可得

$$I_1 \leqslant \delta\mu^{-\frac{\bar{x}-x}{2\bar{x}\sigma}} \tag{25}$$

下面考虑 I_2 的估计，并应用先验界(5)得

$$\begin{aligned} I_2 &= \| \hat{u}_\mu(x,\cdot) - \hat{u}(x,\cdot) \| = \\ &\left\| \frac{T(x,\xi)}{1+\mu\,|T(0,\xi)|^{2\sigma}} \hat{g}(\xi) - T(x,\xi)\hat{g}(\xi) \right\| = \\ &\left\| T(x,\xi)\hat{g}(\xi) \frac{\mu\,|T(0,\xi)|^{2\sigma}}{1+\mu\,|T(0,\xi)|^{2\sigma}} \right\| \leqslant \\ &\mu N \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \left| \frac{T(x,\xi)\,|T(0,\xi)|^{2\sigma-1}}{1+\mu\,|T(0,\xi)|^{2\sigma}} \right| \end{aligned}$$

由(23),(24)式可知

$$I_2 \leqslant \mu N \sup_{a\geqslant 0} \left| \frac{\mathrm{e}^{(2\bar{x}\sigma - x)a}}{1+\mu \mathrm{e}^{2\bar{x}a\sigma}} \right|$$

根据(19)式得

$$I_2 \leqslant N\mu^{\frac{x}{2\bar{x}\sigma}} \tag{26}$$

故由(20),(25),(26)式得到如下 Hölder 型最优误差估计式

$$\| u_\mu^\delta(x,\cdot) - u(x,\cdot) \| \leqslant \delta^x N^{1-x} + \delta^{1-(\bar{x}-x)} N^{\bar{x}-x}$$

3 后验情况下正则化参数的选择

在这一部分将研究后验情况下正则化参数的选择，并且通过 Morozov's 偏差原理[20]确定一个正则化参数 μ 满足如下方程：

$$\left\| \frac{1}{1+\mu\,|T(0,\xi)|^{2\sigma}} \hat{g}^\delta(\xi) - \hat{g}^\delta(\xi) \right\| = \tau\delta \tag{27}$$

其中：$\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant 1$，$\tau > 1$ 是常数，μ 是正则化参数.

下面的结论是明显的.

引理 2 设 $\beta(\mu) = \left\| \frac{1}{1+\mu\,|T(0,\xi)|^{2\sigma}} \hat{g}^\delta(\xi) - \hat{g}^\delta(\xi) \right\|$，并且 $0 < \tau\delta < \| \hat{g}^\delta(\xi) \|$，则

(a) $\beta(\mu)$ 为连续函数；

(b) $\lim\limits_{\mu\to 0}\beta(\mu) = 0$；

(c) $\lim\limits_{\mu\to 0}\beta(\mu) = \| \hat{g}^\delta(\xi) \|_{L^2(\mathbb{R})}$；

(d) $\beta(\mu)$ 为严格单调增函数.

注 2 根据引理 2 可知，若 $0 < \tau\delta < \| \hat{g}^\delta(\xi) \|$，则方程(27)的解存在且唯一.

引理 3 若 μ 满足方程(27)，则有以下不等式成立：

$$\left\| \frac{1}{1+\mu\,|T(0,\xi)|^{2\sigma}} \hat{g}^\delta(\xi) - \hat{g}(\xi) \right\| \leqslant (\tau+1)\delta \tag{28}$$

证 由方程(27)和三角不等式得

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{1+\mu\,|T(0,\xi)|^{2\sigma}} \hat{g}^\delta(\xi) - \hat{g}(\xi) \right\| &= \left\| \frac{1}{1+\mu\,|T(0,\xi)|^{2\sigma}} \hat{g}^\delta(\xi) - \hat{g}^\delta(\xi) + \hat{g}^\delta(\xi) - \hat{g}(\xi) \right\| \leqslant \\ &\left\| \frac{1}{1+\mu\,|T(0,\xi)|^{2\sigma}} \hat{g}^\delta(\xi) - \hat{g}^\delta(\xi) \right\| + \| \hat{g}^\delta(\xi) - \hat{g}(\xi) \| \leqslant \\ &(\tau+1)\delta \end{aligned}$$

引理 4 若 μ 满足方程(27)，则得到以下不等式：

$$\mu^{-\frac{1}{2\sigma}} \leqslant \frac{N}{(\tau-1)\delta} \tag{29}$$

证

$$
\begin{aligned}
\tau\delta = & \left\| \frac{1}{1+\mu\mid T(0,\xi)\mid^{2\sigma}}\hat{g}^{\delta}(\xi)-\hat{g}^{\delta}(\xi)\right\| = \\
& \left\| \frac{\mu\mid T(0,\xi)\mid^{2\sigma}}{1+\mu\mid T(0,\xi)\mid^{2\sigma}}\hat{g}^{\delta}(\xi)\right\| \leqslant \\
& \left\| \frac{\mu\mid T(0,\xi)\mid^{2\sigma}}{1+\mu\mid T(0,\xi)\mid^{2\sigma}}(\hat{g}^{\delta}(\xi)-\hat{g}(\xi))\right\| + \left\| \frac{\mu\mid T(0,\xi)\mid^{2\sigma}}{1+\mu\mid T(0,\xi)\mid^{2\sigma}}\hat{g}(\xi)\right\| \leqslant \\
& \delta + \left\| \frac{\mu\mid T(0,\xi)\mid^{2\sigma-1}}{1+\mu\mid T(0,\xi)\mid^{2\sigma}}\mid T(0,\xi)\mid \hat{g}(\xi)\right\| \leqslant \\
& \delta + \mu N\sup_{a\geqslant 0}\left|\frac{e^{(2\sigma-1)\bar{x}a}}{1+\mu e^{2\sigma\bar{x}a}}\right|
\end{aligned}
$$

根据(19)式可得

$$
\tau\delta \leqslant \delta + \mu^{\frac{1}{2\sigma}}N \tag{30}
$$

故

$$
\mu^{-\frac{1}{2\sigma}} \leqslant \frac{N}{(\tau-1)\delta} \tag{31}
$$

定理 2　设条件(4)和先验界(5)成立，且正则化参数 μ 是通过 Morozov's 偏差原理(27)确定，则有如下误差估计成立：

$$
\| u_{\mu}^{\delta}(x,\cdot)-u(x,\cdot)\| \leqslant cN^{1-\frac{x}{\bar{x}}}\delta^{\frac{x}{\bar{x}}} \tag{32}
$$

其中 $c=\left(\frac{\tau}{\tau-1}\right)^{1-\frac{x}{\bar{x}}}(\tau+1)^{\frac{x}{\bar{x}}}$.

证　令 $I^2=\| u(x,\cdot)-u_{\mu}^{\delta}(x,\cdot)\|^2$，由 Parseval 等式及(28),(29)式可知

$$
\begin{aligned}
I^2 = & \| u(x,\cdot)-u_{\mu}^{\delta}(x,\cdot)\|^2 = \| \hat{u}(x,\cdot)-\hat{u}_{\mu}^{\delta}(x,\cdot)\|^2 = \\
& \left\| T(x,\xi)\hat{g}(\xi)-\frac{T(x,\xi)}{1+\mu\mid T(0,\xi)\mid^{2\sigma}}\hat{g}^{\delta}(\xi)\right\|^2 = \\
& \left\| T(x,\xi)\left(\hat{g}(\xi)-\frac{1}{1+\mu\mid T(0,\xi)\mid^{2\sigma}}\hat{g}^{\delta}(\xi)\right)\right\|^2 = \\
& \int_{\mathbb{R}^2}\left| T(x,\xi)\left(\hat{g}(\xi)-\frac{1}{1+\mu\mid T(0,\xi)\mid^{2\sigma}}\hat{g}^{\delta}(\xi)\right)\right|^2 d\xi
\end{aligned}
$$

由 Hölder 不等式及(23),(24)式可得：

$$
\begin{aligned}
I^2 \leqslant & \int_{\mathbb{R}^2} e^{2(\bar{x}-x)a}\left|\hat{g}(\xi)-\frac{1}{1+\mu e^{2\bar{x}\sigma a}}\hat{g}^{\delta}(\xi)\right|^2 d\xi = \\
& \int_{\mathbb{R}^2} e^{2(\bar{x}-x)a}\left|\hat{g}(\xi)-\frac{1}{1+\mu e^{2\bar{x}\sigma a}}\hat{g}^{\delta}(\xi)\right|^{2(1-\frac{x}{\bar{x}})}\left|\hat{g}(\xi)-\frac{1}{1+\mu e^{2\bar{x}\sigma a}}\hat{g}^{\delta}(\xi)\right|^{\frac{2x}{\bar{x}}} d\xi \leqslant \\
& \left(\int_{\mathbb{R}^2}\left(e^{2(\bar{x}-x)a}\left|\hat{g}(\xi)-\frac{1}{1+\mu e^{2\bar{x}\sigma a}}\hat{g}^{\delta}(\xi)\right|^{2(1-\frac{x}{\bar{x}})}\right)^{\frac{\bar{x}}{\bar{x}-x}} d\xi\right)^{1-\frac{x}{\bar{x}}}\cdot\left(\int_{\mathbb{R}^2}\left(\left|\hat{g}(\xi)-\frac{1}{1+\mu e^{2\bar{x}\sigma a}}\hat{g}^{\delta}(\xi)\right|^{\frac{2x}{\bar{x}}}\right)^{\frac{\bar{x}}{x}} d\xi\right)^{\frac{x}{\bar{x}}} \leqslant \\
& \left(\int_{\mathbb{R}^2} e^{2\bar{x}a}\left|\hat{g}(\xi)-\frac{1}{1+\mu e^{2\bar{x}\sigma a}}\hat{g}^{\delta}(\xi)\right|^2 d\xi\right)^{1-\frac{x}{\bar{x}}}\cdot\left(\int_{\mathbb{R}^2}\left|\hat{g}(\xi)-\frac{1}{1+\mu e^{2\bar{x}\sigma a}}\hat{g}^{\delta}(\xi)\right|^2 d\xi\right)^{\frac{x}{\bar{x}}} = \\
& \left\| T(0,\xi)\left(\hat{g}(\xi)-\frac{1}{1+\mu\mid T(0,\xi)\mid^{2\sigma}}\hat{g}^{\delta}(\xi)\right)\right\|^{2(1-\frac{x}{\bar{x}})}\left\|\hat{g}(\xi)-\frac{1}{1+\mu\mid T(0,\xi)\mid^{2\sigma}}\hat{g}^{\delta}(\xi)\right\|^{\frac{2x}{\bar{x}}} \leqslant \\
& \left(\left\| T(0,\xi)\hat{g}(\xi)\left(1-\frac{1}{1+\mu\mid T(0,\xi)\mid^{2\sigma}}\right)\right\| + \left\|\frac{T(0,\xi)}{1+\mu\mid T(0,\xi)\mid^{2\sigma}}(\hat{g}(\xi)-\hat{g}^{\delta}(\xi))\right\|\right)^{2(1-\frac{x}{\bar{x}})}\cdot((\tau+1)\delta)^{\frac{2x}{\bar{x}}} \leqslant \\
& \left(N+\delta\sup_{a\geqslant 0}\frac{e^{\bar{x}a}}{1+\mu e^{2\bar{x}\sigma a}}\right)^{2(1-\frac{x}{\bar{x}})}\cdot((\tau+1)\delta)^{\frac{2x}{\bar{x}}}
\end{aligned}
$$

由(19)式可得：

$$
\sup_{a\geqslant 0}\frac{e^{\bar{x}a}}{1+\mu e^{2\bar{x}\sigma a}} \leqslant \mu^{-\frac{1}{2\sigma}} \tag{33}
$$

根据引理 4 可得

$$I^2 \leqslant \left(N + \delta \frac{N}{(\tau-1)\delta}\right)^{2\left(1-\frac{x}{\overline{x}}\right)} \cdot ((\tau+1)\delta)^{\frac{2x}{\overline{x}}} =$$

$$\left(\frac{\tau}{\tau-1}\right)^{2\left(1-\frac{x}{\overline{x}}\right)} (\tau+1)^{\frac{2x}{\overline{x}}} N^{2\left(1-\frac{x}{\overline{x}}\right)} \delta^{\frac{2x}{\overline{x}}}$$

因此

$$\| u(x,\cdot) - u_\mu^\delta(x,\cdot) \| \leqslant \left(\frac{\tau}{\tau-1}\right)^{1-\frac{x}{\overline{x}}} (\tau+1)^{\frac{x}{\overline{x}}} N^{1-\frac{x}{\overline{x}}} \delta^{\frac{x}{\overline{x}}}$$

令 $c = \left(\frac{\tau}{\tau-1}\right)^{1-\frac{x}{\overline{x}}} (\tau+1)^{\frac{x}{\overline{x}}}$ 得

$$\| u(x,\cdot) - u_\mu^\delta(x,\cdot) \| \leqslant c N^{1-\frac{x}{\overline{x}}} \delta^{\frac{x}{\overline{x}}}$$

注 3 注意到这里仅考虑问题(1) 在区间$(0, \overline{x})$上的精确解与正则解之间的误差估计，而未涉及边界 $x = 0$ 的情况，但是，我们通过(21) 和(32) 式看出，当 $x = 0$ 时，误差估计式不收敛. 若给出先验界 $\| u(0,\cdot) \|_p \leqslant N$，其中 $p > 0$，$N > 0$，$\| \cdot \|_p$ 表示 H^p -范数，则由文献[21-22] 知收敛速率呈对数型.

4 总　　结

不适定问题的种类有很多，需要我们构建正则化方法来解决此问题，每种正则化方法都有各自的优缺点. 本文使用一种新的分数次 Tikhonv 正则化方法求解分数阶热传导方程的侧边值问题，通过先验和后验的正则化参数的选择得到了 Hölder 型的误差估计，结果证实了该方法的简洁性和有效性. 这种新的分数次 Tikhonov 方法也可能适用于 Laplace 方程的柯西问题等其他不适定问题，这有待于进一步研究.

参考文献：

[1] SEIDMAN T I, ELDEN L. An 'Optimal Filtering' Method for the Sideways Heat Equation [J]. Inverse Problems, 1990, 6(4): 681-696.

[2] XIONG X T, FU C L, LI H F. Fourier Regularization Method of a Sideways Heat Equation for Determining Surface Heat Flux [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2006, 317(1): 331-348.

[3] DORROH J R, RU X P. The Application of the Method of Quasi-Reversibility to the Sideways Heat Equation [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1999, 236(2): 503-519.

[4] TAUTENHAHN U. Optimality for Ill-Posed Problems under General Source Conditions [J]. Numerical Functional Analysis and Optimization, 1998, 19(3-4): 377-398.

[5] CHEN W, YE L J, SUN H G. Fractional Diffusion Equations by the Kansa Method [J]. Computers & Mathematics WithApplications, 2010, 59(5): 1614-1620.

[6] GORENFLO R, MAINARDI F, MORETTI D, et al. Discrete Random Walk Models for Space-Time Fractional Diffusion [J]. Chemical Physics, 2002, 284(1-2): 521-541.

[7] ZASLAVSKY G M. Chaos, Fractional Kinetics, and Anomalous Transport [J]. Physics Reports, 2002, 371(6): 461-580.

[8] SCALAS E, GORENFLO R, MAINARDI F. Fractional Calculus and Continuous-Time Finance [J]. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 2000, 284(1-4): 376-384.

[9] 赵梅姝. 改进的分数阶辅助方程方法及其在非线性空间-时间分数阶微分方程中的应用 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2018, 43(11): 24-29.

[10] LIU F, ANH V, TURNER I. Numerical Solution of the Space Fractional Fokker-Planck Equation [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2004, 166(1): 209-219.

[11] OZALPN, MIZRAK O O. Fractional Laplace Transform Method in the Framework of the CTIT Transformation [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2017, 317: 90-99.

[12] VILELA MENDES R. A Fractional Calculus Interpretation of the Fractional Volatility Model [J]. Nonlinear Dynamics, 2008, 55(4): 395-399.

[13] LI M, XIONG X T. On a Fractional Backward Heat Conduction Problem: Application to Deblurring [J]. Computers &

Mathematics With Applications, 2012, 64(8): 2594-2602.

[14] QIAN Z, FENG X L. A Fractional Tikhonov Method for Solving a Cauchy Problem of Helmholtz Equation [J]. Applicable Analysis, 2017, 96(10): 1656-1668.

[15] 薛雪敏，熊向团，庄　娥，等. 时间分数阶反扩散问题的一种新的分数次 Tikhonov 方法 [J]. 高校应用数学学报 A 辑，2018，33(4)：441-452.

[16] PODLUBNY I. Fractional Differential Equations [M]. San Diego: Academic Press, 1999.

[17] ELDÉN L, BERNTSSON F, REGINSKA T. Wavelet and Fourier Methods for Solving the Sideways Heat Equation [J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2000, 21(6): 2187-2205.

[18] FENG X L, FU C L, CHENG H. A Regularization Method for Solving the Cauchy Problem for the Helmholtz Equation [J]. Applied Mathematical Modelling, 2011, 35(7): 3301-3315.

[19] XIONG X T. A Regularization Method for a Cauchy Problem of the Helmholtz Equation [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2010, 233(8): 1723-1732.

[20] XIONG X T, XUE X M. Fractional Tikhonov Method for an Inverse Time-Fractional Diffusion Problem in 2-Dimensional Space [J]. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 2020, 43(1): 25-38.

[21] 熊向团. 抛物型偏微分方程中几类反问题的正则化理论及算法 [D]. 兰州：兰州大学，2007.

[22] QIAN Z, FU C L. Regularization Strategies for a Two-Dimensional Inverse Heat Conduction Problem [J]. Inverse Problems, 2007, 23(3): 1053-1068.

A Fractional Tikhonov Method for Sideways Fractional Heat Equation

BAI En-peng,　XIONG Xiang-tuan

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China

Abstract: We consider the sideways fractional heat equation in the quarter plane. A new fractional Tikhonovmethod is given to solve the problem. It overcomes the effect of over-smoothing of classical Tikhonov method. We give the selection of prior and posterior regularization parameters of the new method. It makes the error estimation between the exact solution and the approximate solution of the problem reach Hölder optimally.

Key words: ill-posed problem; sideways fractional heat equation; fractional Tikhonov method; regularization parameter selection; error estimate

责任编辑　张　枸