第 46 卷 第 4 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2021 年 4 月
Vol. 46 No. 4 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Apr. 2021

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2021.04.001

最高阶元个数为 $6p^2q$ 的有限群①

谭三标[1], 艾海明[2], 晏燕雄[1]

1. 西南大学 数学与统计学院,重庆 400715;2. 北京开放大学 科学技术学院,北京 100081

摘要: 众所周知,群的算术性质对群的结构有着很重要的影响. 用群的各类数量性质刻画有限群的结构成为群论研究的热点问题. 本文研究了最高阶元素的个数对有限群结构的影响,并证明了最高阶元素个数为 $6p^2q$ 的有限群是可解群,其中 p,q 是素数,且 $q>p>13$.

关 键 词: 有限群;可解群;最高阶元的个数;Thompson 猜想

中图分类号:O152.1 **文献标志码:A** **文章编号:** 1000-5471(2021)04-0001-03

本文所讨论的群均为有限群. $\pi_e(G)$ 表示群 G 中元素阶的集合,k 是 $\pi_e(G)$ 中的最大值,n 为 G 中 k 阶循环子群的个数. 对一个自然数 t,$\pi(t)$ 表示 t 的素因子集合,特别地,$\pi(G)=\pi(|G|)$. $M_t(G)$ 是 G 的 t 阶元素的集合,特别地,$M(G)=M_k(G)$. 设 p 是素数,$p^n \parallel |G|$ 表示 $p^n \mid |G|$,但 $p^{n+1} \nmid |G|$. $\varphi(x)$ 为 x 的欧拉函数. 文中其他未说明的符号和术语都是标准的(见文献[1]).

众所周知,群的数量刻画是群论研究中十分重要的课题. 文献[2]讨论了与最高阶元素有关的几个数量条件对 Conway 单群和 Fischer 单群的结构的影响. 文献[3]用群的阶与群的不可约特征标维数刻画了单群 A_8 和 $L_3(4)$. 文献[4]用不可补子群的个数刻画了单群 A_5. 文献[5]用交换子群的个数刻画了单群 A_5 和 S_5. 本文的研究与下面的 Thompson 猜想有关:

Thompson 猜想 设 G_1 与 G_2 为同阶型群. 如果 G_1 可解,则 G_2 可解.

目前该猜想依然没有被证明. 因此,许多研究者考虑在减弱猜想条件的基础上继续研究. 文献[6]证明了最高阶元的个数分别为 $2p$(p 为素数)、奇数、不大于 4 或为 $\varphi(k)$ 时,G 可解. 文献[7]证明了 $|M(G)|=4p$ 时,G 要么可解,要么同构于 S_5. 文献[8]证明了 $|M(G)|=10p$ 时,G 可解. 文献[9]证明了 $|M(G)|=18p$ 时,G 可解. 文献[10]证明了 $|M(G)|=30$ 时,G 可解. 以上结果显然有助于 Thompson 猜想的解决. 本文继续了这一问题的研究,得到:

定理 1 设 G 是有限群,若 $|M(G)|=6p^2q$,其中 p,q 为素数,且 $q>p>13$,则群 G 可解.

引理 1 设 $|M(G)|=6p^2q$,则 $n,\varphi(k)$ 和 k 的关系如表 1 所示.

定理 1 的证明

由表 1,将定理 1 的证明分为以下 7 种情形讨论:

情形 1 如果 $n=1$,则 $\varphi(k)=6p^2q$. 由文献[6]的定理 1.1 可知 G 超可解.

情形 2 如果 $n=3$,则 $\varphi(k)=2p^2q$. 由表 1 知 $k=r,2r$,其中 $r=2p^2q+1$ 为素数,或 $k=q^2$,且 $q=2p^2+1$ 为素数. 令 a 是 k 阶元,且 $A=\langle a\rangle$,则

$$|G|=|G:N_G(A)||N_G(A):C_G(A)||C_G(A)| \tag{1}$$

① 收稿日期:2020-10-10

基金项目:国家自然科学基金项目(12071376,11971391);中央高校专项基金项目(XDJK2019C116,XDJK2019B030);西南大学教改项目(2018JY061).

作者简介:谭三标,硕士研究生,主要从事有限群的研究.

通信作者:晏燕雄,副教授.

假设 G 不可解，由文献[11]的引理 2.7 可知 $k=2r$. 令 $|C_G(A)|=2^{\alpha}\cdot 3^{\beta}$，$\alpha,\beta$ 为非负整数. 显然 $C_G(A)$ 可解. 事实上 $N_G(A)/C_G(A)\leqslant \mathrm{Aut}(A)$，即 $|N_G(A)/C_G(A)|\,\big|\,\varphi(k)$，因此 $N_G(A)/C_G(A)$ 可解，从而 $N_G(A)$ 可解. 考虑 G 在 $N_G(A)$ 上的陪集置换表示 η，则 $G/\mathrm{Ker}\,\eta \lesssim S_3$. 因为 $\mathrm{Ker}\,\eta \leqslant N_G(A)$ 可解，则 G 可解，矛盾.

表 1　$n,\varphi(k),k$ 之间的关系

n	$\varphi(k)$	k
3	$2p^2q$	(1°) r 或 $2r$，其中 $r=2p^2q+1$ 为素数；(2°) q^2，其中 $q=2p^2+1$ 为素数
p	$6pq$	(1°) r 或 $2r$，其中 $r=6pq+1$ 为素数；(2°) q^2，其中 $q=6p+1$ 为素数
$3p$	$2pq$	(1°) r 或 $2r$，其中 $r=2pq+1$ 为素数；(2°) q^2，其中 $q=2p+1$ 为素数
q	$6p^2$	r 或 $2r$，其中 $r=6p^2+1$ 为素数
$3q$	$2p^2$	r 或 $2r$，其中 $r=2p^2+1$ 为素数
p^2	$6q$	r 或 $2r$，其中 $r=6q+1$ 为素数
$3p^2$	$2q$	r 或 $2r$，其中 $r=2q+1$ 为素数
pq	$6p$	r 或 $2r$，其中 $r=6p+1$ 为素数
$3pq$	$2p$	r 或 $2r$，其中 $r=2p+1$ 为素数
p^2q	6	7，9，14，18
$3p^2q$	2	3，4，6
$6p^2q$	1	2

情形 3　如果 $n=p$，则 $\varphi(k)=6pq$. 由表 1 知 $k=r,2r$，其中 $r=6pq+1$ 为素数或 $k=q^2$，且 $q=6p+1$ 为素数. 假设 G 不可解，由文献[11]的引理 2.7 知 $k=2r$. 和情形 2 同样的讨论知 $N_G(A)$ 可解. 由文献[11]的引理 2.9 有 $i\geqslant 2$，所以存在 i，使得 $p\nmid n_i$. 因此由(1)式知 G 是$\{2,3,q,r\}$-群. 令 $|C_G(A)|=2^{\alpha}\cdot 3^{\beta}$，$\alpha,\beta$ 为非负整数. 从而 $C_G(A)$ 没有 2^2 和 r^2 阶元. 如果 $\beta\geqslant 2$，则 $C_G(A)$ 至少有 r^2-1 个 $2r$ 阶元，由于 $q>p$，有

$$r^2-1=6pq(6pq+2)>6p^2q$$

矛盾. 因此 $\beta=1$. 令 R 是 $C_G(A)$ 的 Sylow r-子群，如果 $R\ntrianglelefteq C_G(A)$，则 $C_G(A)$ 至少有 $r+1$ 个 Sylow r-子群，所以 $C_G(A)$ 至少有 $(r+1)(r-1)=r^2-1$ 个 $2r$ 阶元，矛盾. 所以 $R\trianglelefteq C_G(A)$. 因此 $R\ \mathrm{char}\ C_G(A)\trianglelefteq N_G(A)$，则 $N_G(A)\leqslant N_G(R)$. 因为

$$|G:N_G(A)|=|G:N_G(R)|\,|N_G(R):N_G(A)| \qquad |G:N_G(A)|<p$$

由 Sylow 定理可知 $|G:N_G(A)|=1$，所以 $R\trianglelefteq G$. 因此 G/R 是$\{2,3,q\}$-群. 因为 $q>p>13$，由文献[12]知 G/R 可解，从而 G 可解，矛盾.

情形 4　如果 $n=3p$，则 $\varphi(k)=2pq$. 由表 1 知 $k=r,2r$，其中 $r=2pq+1$ 为素数或 $k=q^2$，且 $q=2p+1$ 为素数. 假设 G 不可解，由文献[11]的引理 2.7 知 $k=2r$. 和情形 2 同样的讨论知 $N_G(A)$ 可解，且 $\pi(G)\subseteq\{2,3,p,q,r\}$. 由文献[11]的引理 2.9 有 $i\geqslant 2$. 如果 $3\nmid(n_1,n_2,\cdots,n_s)$，则存在 i 使得 $3\nmid n_i$. 由于

$$|G|=n_i\,|N_G(A):C_G(A)|\,|C_G(A)|$$

所以 G 是$\{2,p,q,r\}$-群. 但 p,q 是素数且 $q>p>13$，由文献[13]的定理 1 知 G 可解，矛盾. 如果 $3\mid(n_1,n_2,\cdots,n_s)$，因 $n_1+n_2+\cdots+n_s=3p$，则 $3\parallel(n_1,n_2,\cdots,n_s)$. 令 $n_i=2^{\alpha_i}\cdot 3^{\beta_i}\cdot p^{\gamma_i}\cdot q^{\theta_i}\cdot r^{\lambda_i}$，其中 $\alpha_i,\beta_i,\gamma_i,\theta_i,\lambda_i$ 为非负整数. 由于

$$|G|=n_i\,|N_G(A):C_G(A)|\,|C_G(A)| \qquad n_i<3p$$

则存在 i 使得 $\beta_i=1$，$\gamma_i=\theta_i=\lambda_i=0$. 从而 G 是$\{2,3,q,r\}$-群，且 $3\parallel|G|$. 因为 G 不可解，且 $q>p>13$，可知不存在 G 的单截断同构于 K_3-单群，故存在 G 的某截断 W 同构于文献[13]中定理 2 的 K_4-单群之一. 通过简单的计算可知这是不可能的，矛盾.

同理可证，$n\in\{q,3q,p^2,3p^2,pq,3pq\}$ 时，G 可解.

情形 5　如果 $n=p^2q$，则 $\varphi(k)=6$. 由表 1 知 $k=7,9,14,18$. 假设 G 不可解，由文献[11]的引理 2.7 知 $k=14,18$. 若 $k=14$，由于 $n_1+n_2+\cdots+n_s=p^2q$，则存在 i 使得 $3\nmid n_i$，所以 $3^2\nmid|G|$. 因为 p,q 为素数，且 $q>p>13$，从而 G 是$\{2,3,7\}$-群. 由文献[11]的引理 2.7 知 $G\cong E\times L_2(7)$，E 为初等交换

2-群，故 G 有 $(2^a-1)\times 48$ 个 14 阶元．显然 $(2^a-1)\times 48 \neq 6p^2q$，矛盾．若 $k=18$，则 G 为 $\{2,3,p\}$-群或 $\{2,3,q\}$-群．因为 G 不可解，且 $q>p>13$，由文献[12]知 G 是 $\{2,3,p\}$-群且 $p=7$．此时 G 有一截断 W 同构于 $L_2(17)$，从而 $8\in\pi_e(L_2(17))$，矛盾．

情形 6　如果 $n=3p^2q$，则 $\varphi(k)=2$．由表 1 知 $k=3,4,6$．令 a 为 k 阶元，则 $C_G(\langle a\rangle)$ 为 2-群或 $\{2,3\}$-群．因为

$$|N_G(\langle a\rangle):C_G(\langle a\rangle)|\,\Big|\,\varphi(k)=2$$

$k\leqslant 6$ 且 $q>p>13$，所以 G 是 2-群或 $\{2,3\}$-群．因此 G 可解．

情形 7　如果 $n=6p^2q$，则 $\varphi(k)=1$．此时 G 是初等交换 2-群，$|M(G)|=2^m-1$ 为奇数，其中 m 为某正整数，矛盾．

由情形 1 至情形 7 的证明可知定理 1 的结论成立．

参考文献：

[1] WILSON R. Finite Simple Groups [M]. London: Springer, 2012.

[2] 雷　倩，何立官．关于 Conway 单群和 Fischer 单群的刻画 [J]．西南大学学报(自然科学版)，2020，42(10)：96-100.

[3] 刘　鑫，杨　梅，晏燕雄．单群 A_8 与 $L_3(4)$ 的新刻画 [J]．西南师范大学学报(自然科学版)，2020，45(4)：5-8.

[4] 黄　宇，宋科研．用不可补子群个数刻画单群 A_5[J]．西南大学学报(自然科学版)，2018，40(12)：90-93.

[5] 钱　焱，陈贵云．用交换子群的个数刻画 A_5 和 S_5[J]．西南师范大学学报(自然科学版)，2020，45(6)：5-8.

[6] 杨　成．最高阶元素个数不同的有限群 [J]．数学年刊(A 辑)，1993，14(5)：561-567.

[7] 杜祥林，姜友谊．最高阶元个数是 $4p$ 的有限群 [J]．数学年刊(A 辑)，2004，25(5)：607-612.

[8] HE L G, CHEN G Y, YAN Y X. Solvability of Finite Groups with $10p$ Elements of Maximal Order [J]. J Appl Math Computing, 2006, 21(1-2): 431-436.

[9] JIANG Y Y. A Theorem of Finite Groups with $18p$ Elements Having Maximal Order [J]. Algebra Colloquium, 2008, 15(2): 317-329.

[10] CHEN G Y, SHI W J. Finite Groups with 30 Elements of Maximal Order [J]. Appl Categor Struct, 2008, 16(1-2): 239-247.

[11] XU Y, GAO J J, HOU H L. Finite Groups with $6PQ$ Elements of the Largest Order [J]. Ital J Pure Appl Math, 2013, 31(11): 277-284.

[12] HERZOG M. On Finite Simple Groups of Order Divisible by Three Primes Only [J]. J Algebra, 1968, 10(3): 383-388.

[13] 施武杰．关于单 K_4-群 [J]．科学通报，1991，36(7)：1281-1283.

Finite Group With $6p^2q$ Elements of Maximal Order

TAN San-biao[1],　AI Hai-ming[2],　YAN Yan-xiong[1]

1. School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China;

2. School of Science and Technology, Beijing Open University, Beijing 100081, China

Abstract: It is well known that the arithmetic properties of a group have an important influence on the structure of the group. It has become a hot topic to describe the structure of a finite group by using the various quantitative properties of a group. In this article, the influence of the number of elements of maximal order of a finite group on the structure of such group has been studied. It is proved that finite groups with $6p^2q$ maximal order elements are solvable, where p,q are primes with $q>p>13$.

Key words: finite group; solvable group; the number of elements of maximal order; Thompson's conjecture

责任编辑　廖　坤