DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2021.04.002

半群 $HS_{(n, k)}$ 的秩[①]

黄朝霞, 高荣海, 罗永贵

贵州师范大学 数学科学学院,贵阳 550025

摘要: 设 $X_n=[n]=\{1, 2, \cdots, n\}$, Sing_n 为 X_n 上的奇异变换半群,$H_{(n, k)}$ 为带 k 的局部循环群. 令 $HS_{(n, k)}=\mathrm{Sing}_n \cup H_{(n, k)}$,则 $HS_{(n, k)}$ 对变换的合成构成 X_n 上的一个半群,并称之为带 k 的局部循环变换半群. 通过对半群 $HS_{(n, k)}$ 中的元素进行分析,证明了当 $k \geqslant 2$, $n-k \geqslant 3$ 时,变换半群 $HS_{(n, k)}$ 的秩为 $\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}+n-k+2+\left[\frac{k}{2}\right]$.

关 键 词: 奇异变换半群;带 k 的局部循环群;秩

中图分类号: O152.7 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5471(2021)04-0004-05

设 $X_n=[n]=\{1, 2, \cdots, n\}$, T_n 是 $[n]$ 上的全变换半群,S_n 是 $[n]$ 上的对称群. 称 $\mathrm{Sing}_n=T_n \backslash S_n$ 为奇异变换半群. 设 S 是一个半群,$e \in S$,若 $e^2=e$,则称 e 是 S 的幂等元. 对任意 $\alpha \in T_n$,令

$$\ker(\alpha)=\{(x, y) \in [n] \times [n]: x\alpha=y\alpha\}$$

表示 α 的核类,易知 α 的核类为等价类. 令

$$\mathrm{Im}(\alpha)=\{y \in [n]: \text{存在 } x \in [n], \text{使得 } x\alpha=y\}$$

表示 $[n]$ 在 α 下的象. 设 S 是有限变换半群,P 是 S 的子集,则 $\langle P\rangle$ 为由 P 生成的半群 S 的子半群. 若子集 P 满足 $\langle P\rangle=S$,则称 P 为 S 的一个生成集.

有限半群 S 的秩定义为

$$\mathrm{rank}\, S=\min\{|P|: \varnothing \neq P \subseteq S, \langle P\rangle=S\}$$

其中 $|P|$ 为非空集合 P 的基数. 类似地,为了下文叙述方便,我们把半群的秩推广到半群的一个子集的秩,定义如下:设 S 为半群,B 为半群 S 的非空子集,对 S 的某个子集 A,若满足 $B \subseteq \langle A\rangle$,则称 A 为集合 B 的生成集,集合 B 的秩为 $\mathrm{rank}\, B=\min\{|A|: A \subseteq S, \text{且 } B \subseteq \langle A\rangle\}$.

对于变换半群秩的相关研究,一直都是半群理论研究中的热点研究对象之一. 文献[1]得到了奇异变换半群 Sing_n 的秩及幂等元的秩都为 $\frac{n(n-1)}{2}$. 文献[2]研究了奇异变换半群 Sing_n 的理想的秩和幂等元的秩,并得到 Sing_n 的理想的秩和幂等元的秩均为第二类 Stirling 数 $S(n, r)$. 文献[3]得出了半群 $T_n=S_n \cup \mathrm{Sing}_n$ 的生成元和秩. 文献[4]给出了 Heisenberg 群上次 Laplace 方程的解在满足次线性增长时的 Liouville 型定理. 文献[5]证明了除 $F_{i_{22}}$ 外,所有 Conway 单群和 Fischer 单群都可以由 $ONC_1(G)$ 和 $l_p(G)$ 唯一刻画. 文献[6]得到了半群 $TOP_n(k)$ 的格林关系和星格林关系,并证明了半群 $TOP_n(k)$ 是非正则富足半群. 文献[7-10]分别研究了半群 CPO_n、半群 SPC_n、半群 PCS_n 和半群 $OI_n(k, m)$ 的秩.

---

① 收稿日期:2019-12-05
基金项目:贵州师范大学博士科研项目(GZNUD[2019]23).
作者简介:黄朝霞,硕士研究生,主要从事半群代数理论的研究.
通信作者:高荣海,教授.

设 $g=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & k-1 & k & k+1 & \cdots & n-1 & n\\ 2 & 3 & \cdots & k & 1 & k+1 & \cdots & n-1 & n\end{pmatrix}$，即 $H_{(n,k)}=\langle g\rangle$ 为由 g 生成的带 k 的局部循环群．记半群 $HS_{(n,k)}=\mathrm{Sing}_n\cup H_{(n,k)}$，容易验证 $HS_{(n,k)}$ 是 T_n 的子半群．

本文在文献[11]的基础上继续考虑新半群 $HS_{(n,k)}$ 的秩，并证明了如下结果：

$$\operatorname{rank}HS_{(n,k)}=\begin{cases}\dfrac{n(n-1)}{2}+1 & k=1\\ \dfrac{(n-k)(n-k-1)}{2}+n-k+2+\left[\dfrac{k}{2}\right] & k\geqslant 2,\ n-k\geqslant 3\\ 6+\left[\dfrac{k}{2}\right] & n-k=2\\ 3+\left[\dfrac{k}{2}\right] & n-k=1\\ 1+\left[\dfrac{n}{2}\right] & n=k\end{cases}\tag{1}$$

在本文中，用$\begin{bmatrix}B_1 & B_2 & \cdots & B_{r-1} & B_r\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{r-1} & b_r\end{bmatrix}$表示在半群 $HS_{(n,k)}$ 中满足如下条件的元素 β：

$$B_i\beta=b_i\qquad 1\leqslant i\leqslant r\qquad x\beta=x\qquad x\in X_n\backslash(B_1\cup B_2\cdots\cup B_r)$$

在 $HS_{(n,k)}$ 上，有通常的格林关系：对任意的 $\alpha,\beta\in HS_{(n,k)}$，$\alpha\mathscr{R}\beta$ 当且当 $\ker(\alpha)=\ker(\beta)$；$\alpha\mathscr{L}\beta$ 当且当 $\mathrm{im}(\alpha)=\mathrm{im}(\beta)$；$\alpha\mathscr{J}\beta$ 当且当 $|\mathrm{im}(\alpha)|=|\mathrm{im}(\beta)|$．

令 $\mathscr{H}=\mathscr{L}\cap\mathscr{R}$，易见 $\mathscr{R},\mathscr{L},\mathscr{J}$ 与 $\mathscr{H}$ 都是半群 $HS_{(n,k)}$ 上的等价关系．

记 $\Delta_r=\{\beta\in HS_{(n,k)}:|\mathrm{im}(\beta)|=r\}$，$1\leqslant r\leqslant n$，则 $HS_{(n,k)}=\Delta_n\cup\Delta_{n-1}\cup\cdots\cup\Delta_1$．$\Delta_{n-1}$ 中的幂等元表示为 $e_{i\to j}=\begin{bmatrix}i\\ j\end{bmatrix}$，$1\leqslant i,j\leqslant n$ 且 $i\neq j$．

当 $k\geqslant 2$，$n-k\geqslant 3$ 时，令：

$$E_{n-1}^{\Delta}=\{e_{i\to j}:1\leqslant i\leqslant k,\ 1\leqslant j\leqslant k,\ i\neq j\}$$

$$E_{n-1}^{A}=\left\{e_{i\to 1}:2\leqslant i\leqslant\left[\frac{k}{2}\right]+1\right\}$$

$$E_{n-1}^{\Phi}=\{e_{i\to j}:k+1\leqslant i\leqslant n,\ k+1\leqslant j\leqslant n,\ i\neq j\}$$

$$E_{n-1}^{B}=\{e_{i\to j}:i<j,\ k+1\leqslant i,j\leqslant n\}\backslash(\{e_{k+1\to n}\}\cup\{e_{n\to k+1}\})$$

$$E_{n-1}^{\Gamma}=\{e_{i\to j}:k+1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant k\}$$

$$E_{n-1}^{C}=\{e_{i\to 1}:k+1\leqslant i\leqslant n\}$$

$$E_{n-1}^{\Lambda}=\{e_{i\to j}:1\leqslant i\leqslant k,\ k+1\leqslant j\leqslant n\}$$

$E(\Delta_{n-1})$ 为 Δ_{n-1} 中所有幂等元的集合，$E(\Delta_{n-1})=E_{n-1}^{\Delta}\cup E_{n-1}^{\Phi}\cup E_{n-1}^{\Gamma}\cup E_{n-1}^{\Lambda}$，且 $E_{n-1}^{\Delta}\cap E_{n-1}^{\Phi}\cap E_{n-1}^{\Gamma}\cap E_{n-1}^{\Lambda}=\varnothing$．

注意，为方便起见，在本文中，凡是整数的加法运算，均是在模 n 的剩余类环中进行的．例如，$e_{n+i\to j}=e_{i\to j}$，$e_{i\to n+j}=e_{i\to j}$，$n+i=i$ 等．

引理 1　设 $k+1\leqslant i\leqslant n$，$1\leqslant j\leqslant k$，则 $E_{n-1}^{\Gamma}\subseteq\langle\{g\}\cup E_{n-1}^{C}\rangle$．

证　任取 $i\in\{k+1,k+2,\cdots,n\}$，$j\in\{1,2,\cdots,k\}$．则 $e_{i\to 1}\in E_{n-1}^{C}$．易验证

$$g^{-j}e_{i\to 1}g^{j}=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & k & k+1 & \cdots & n\\ 2 & 3 & \cdots & 1 & k+1 & \cdots & n\end{pmatrix}^{-j}\begin{bmatrix}i\\ 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & k & k+1 & \cdots & n\\ 2 & 3 & \cdots & 1 & k+1 & \cdots & n\end{pmatrix}^{j}=e_{i\to j+1}$$

由 i,j 的取值范围及 $E_{n-1}^{C},E_{n-1}^{\Gamma}$ 的定义可知，$e_{i\to 1}\in E_{n-1}^{C}$，$e_{i\to j+1}\in E_{n-1}^{\Gamma}$，从而 $e_{i\to j+1}\in\langle\{g\}\cup E_{n-1}^{C}\rangle$，则 $E_{n-1}^{\Gamma}\subseteq\langle\{g\}\cup E_{n-1}^{C}\rangle$．

在 Δ_{n-1} 上引入关系 $\sim$：$\alpha\sim\beta$ 当且当存在 $m\in\mathbb{Z}$，使得 $\ker(\alpha)=\ker(g^{m}\beta)$．

注意 $g^{k}=1_{X_n}$（1_{X_n} 为 X_n 上的恒等变换）．易验证 $\sim$ 是 Δ_{n-1} 上的等价关系．对任意 $\alpha\in\Delta_{n-1}$，记

$$[\alpha]=\{\beta\in\Delta_{n-1}:\beta\sim\alpha\}\qquad\hat{\Delta}_{n-1}=\{[\alpha]:\alpha\in\Delta_{n-1}\}$$

则$\hat{\Delta}_{n-1}$是$\sim$在Δ_{n-1}上所决定的分类，$[\alpha]$是α所在的等价类.

引理 2 设$k+1\leqslant i,j\leqslant n$，当$i\neq j$时，有$[e_{i\to 1}]\cap[e_{j\to 1}]=\varnothing$.

证 采用反证法证明. 假设$[e_{i\to 1}]\cap[e_{j\to 1}]\neq\varnothing$，则存在$\alpha\in[e_{i\to 1}]\cap[e_{j\to 1}]$，从而$\alpha\sim e_{i\to 1}$且$\alpha\sim e_{j\to 1}$，由等价关系的传递性得$e_{i\to 1}\sim e_{j\to 1}$，于是存在$m\in\mathbb{Z}$，使得$\ker(e_{i\to 1})=\ker(g^m e_{j\to 1})$. 由于$\{1, i\}$是$e_{i\to 1}$的唯一非单点核类，则$\{1, i\}$也是$g^m e_{j\to 1}$的唯一非单点核类. 从而

$$(1+m)e_{j\to 1}=1g^m e_{j\to 1}=ig^m e_{j\to 1}=(i+m)e_{j\to 1}$$

即$\{1+m, i+m\}$是$e_{j\to 1}$的非单点核类. 再由$\{1, j\}$是$e_{j\to 1}$的唯一非单点核类，可得$\{1, j\}=\{1+m, i+m\}$.

若$1=i+m$且$j=1+m$，则$m=1-i$且$m=j-1$，于是$i+j=2$. 这与$2k+3\leqslant i+j\leqslant 2n-1$矛盾.（由$k+1\leqslant i,j\leqslant n$且$i\neq j$，可得$2k+3\leqslant i+j\leqslant 2n-1$).

若$1=1+m$且$j=i+m$，则$i=j$，这与$i\neq j$矛盾.

综上可知，假设不成立，从而$[e_{i\to 1}]\cap[e_{j\to 1}]=\varnothing$.

引理 3 设$k+1\leqslant i\leqslant n$，集合$M\subseteq E_{n-1}^{\Gamma}\cup H_{(n,k)}$，且$E_{n-1}^{\Gamma}\subseteq\langle M\rangle$，则$M\cap[e_{i\to 1}]\neq\varnothing$.

证 由$M\subseteq E_{n-1}^{\Gamma}\cup H_{(n,k)}$，$E_{n-1}^{\Gamma}\subseteq\langle M\rangle$及$e_{i\to 1}\in E_{n-1}^{\Gamma}$可知，存在$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m\in M$，使得$e_{i\to 1}=\beta_1\beta_2\cdots\beta_m$. 由$|\operatorname{im}(e_{i\to 1})|=n-1$可得

$$|\operatorname{im}(\beta_j)|\geqslant n-1 \qquad 1\leqslant j\leqslant m$$

从而$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m\in\Delta_{n-1}\cup H_{(n,k)}$. 再由$|\operatorname{im}(e_{i\to 1})|=n-1$可知，存在$s\in\{1, 2, \cdots, m\}$，使得$|\operatorname{im}(\beta_s)|=n-1$. 若$|\operatorname{im}(\beta_j)|=n$，则$\beta_j\in H_{(n,k)}$，从而$\beta_j=g^{t_j}$，$1\leqslant t_j\leqslant k$. 令

$$h=\min\{s: |\operatorname{im}(\beta_s)|=n-1, 1\leqslant s\leqslant m\}$$

于是$|\operatorname{im}(\beta_1)|=n$，$|\operatorname{im}(\beta_2)|=n$，$\cdots$，$|\operatorname{im}(\beta_{h-1})|=n$，且$\beta_1=g^{t_1}$，$\cdots$，$\beta_{h-1}=g^{t_{h-1}}$，$1\leqslant t_1,\cdots,t_{h-1}\leqslant k$. 从而

$$e_{i\to 1}=\beta_1\beta_2\cdots\beta_{h-1}\beta_h\cdots\beta_m=g^l\beta_h\cdots\beta_m \qquad l=t_1+t_2+\cdots+t_{h-1}$$

从而有$\ker(e_{i\to 1})\supseteq\ker(g^l\beta_h)$. 注意到$|\operatorname{im}(g^l\beta_h)|=|\operatorname{im}(\beta_h)|=n-1$. 设$g^l\beta_h$的唯一非单点核类为$\{x, y\}$，则$xg^l\beta_h=yg^l\beta_h$. 于是$xg^l\beta_h\cdots\beta_m=yg^l\beta_h\cdots\beta_m$. 即$xe_{i\to 1}=ye_{i\to 1}$，从而$\{x, y\}$是$e_{i\to 1}$的非单点核类. 由$\{1, i\}$是$e_{i\to 1}$的唯一非单点核类可得$\{x, y\}=\{1, i\}$，于是$\ker(e_{i\to 1})=\ker(g^l\beta_h)$，即$e_{i\to 1}\sim\beta_h$. 则$\beta_h\in M\cap[e_{i\to 1}]$，从而$M\cap[e_{i\to 1}]\neq\varnothing$.

定理 1 设$k\geqslant 2$，$n-k\geqslant 3$，则$\operatorname{rank} E_{n-1}^{\Gamma}=n-k+1$.

证 由引理1可知$E_{n-1}^{\Gamma}\subseteq\langle\{g\}\cup E_{n-1}^{C}\rangle$，从而

$$\operatorname{rank} E_{n-1}^{\Gamma}\leqslant|\{g\}\cup E_{n-1}^{C}|=n-k+1$$

再由引理2及引理3可得，E_{n-1}^{Γ}的任意生成集必含$e_{i\to 1}$及$H_{(n,k)}$中的元素，$k+1\leqslant i\leqslant n$. 从而$\operatorname{rank} E_{n-1}^{\Gamma}\geqslant n-k+1$. 因此$\operatorname{rank} E_{n-1}^{\Gamma}=n-k+1$.

定理 2 在E_{n-1}^{Φ}中，有$E_{n-1}^{\Phi}\subseteq\langle E_{n-1}^{B}\rangle$，且$\operatorname{rank} E_{n-1}^{\Phi}=\dfrac{(n-k)(n-k-1)}{2}$.

证 由文献[12]的定理1可得，E_{n-1}^{B}是E_{n-1}^{Φ}的极小幂等元生成集. 又由元素g的结构及E_{n-1}^{B}中i,j的取值范围，对任意的$e_{i\to j},e_{l\to p}\in E_{n-1}^{B}$($i\neq l$或者$j\neq p$)，与引理2的证明类似，容易得到$[e_{i\to j}]\cap[e_{l\to p}]=\varnothing$，因此有$E_{n-1}^{\Phi}\subseteq\langle E_{n-1}^{B}\rangle$，且$\operatorname{rank} E_{n-1}^{\Phi}=\dfrac{(n-k)(n-k-1)}{2}$.

定理 3 在E_{n-1}^{Δ}中，有$E_{n-1}^{\Delta}\subseteq\langle\{g\}\cup E_{n-1}^{A}\rangle$，$\operatorname{rank} E_{n-1}^{\Delta}=\left[\dfrac{k}{2}\right]+1$.

证 根据文献[11]的引理3及定理6，类似地可得到$E_{n-1}^{\Delta}\subseteq\langle\{g\}\cup E_{n-1}^{A}\rangle$，$\operatorname{rank} E_{n-1}^{\Delta}=\left[\dfrac{k}{2}\right]+1$.

定理 4 设$1\leqslant i\leqslant k$，$k+1\leqslant j\leqslant n$，记$M=\{e_{1\to k+1}, g\}\cup E_{n-1}^{A}\cup E_{n-1}^{B}\cup E_{n-1}^{C}$，则$E_{n-1}^{A}\subseteq\langle M\rangle$.

证 对任意$e_{i\to j}\in E_{n-1}^{A}$，$i\in\{1, 2, \cdots, k\}$，$j\in\{k+1, k+2, \cdots, n\}$，若$i=1$且$j=k+1$，显然有$e_{i\to j}\in\langle M\rangle$. 若$i,j$不满足此情形，由于$e_{j\to i}\in E_{n-1}^{\Gamma}$，有$e_{j\to i}\in\langle\{g\}\cup E_{n-1}^{C}\rangle\subseteq\langle M\rangle$. 于是存在$e_{k+1\to j}\in$

$E_{n-1}^{\Phi} \subseteq \langle E_{n-1}^{B} \rangle \subseteq \langle M \rangle$，$e_{i\to 1} \in E_{n-1}^{\Delta} \subseteq \langle \{g\} \cup E_{n-1}^{A} \rangle \subseteq \langle M \rangle$，有 $e_{i\to j} = (e_{j\to i} e_{k+1\to j} e_{1\to k+1} e_{i\to 1})^3$，从而有 $e_{i\to j} \in \langle M \rangle$，即 $E_{n-1}^{A} \subseteq \langle M \rangle$.

定理 5 在 E_{n-1}^{A} 中，记 $T = \langle \{g\} \cup E_{n-1}^{A} \cup E_{n-1}^{B} \cup E_{n-1}^{C} \rangle$，则 $e_{1\to k+1} \notin \langle T \rangle$.

证 采用反证法证明. 若 $e_{1\to k+1} \in \langle T \rangle$，由文献[12]的引理 5 知，存在幂等元 $e_{k+1\to 1}, e_{l_1\to k+1}, e_{l_2\to l_1}, e_{l_3\to l_2}, \cdots, e_{l_m\to l_{m-1}}, e_{1\to l_m} \in \langle T \rangle$，有

$$e_{1\to k+1} = (e_{k+1\to 1} e_{l_1\to k+1} e_{l_2\to l_1} e_{l_3\to l_2} \cdots e_{l_m\to l_{m-1}} e_{1\to l_m})^{m+1}$$

由 $e_{l_1\to k+1} \in \langle T \rangle$ 知 $l_1 \in \{k+1, k+2, \cdots, n\}$，即 $e_{l_1\to k+1} \in E_{n-1}^{\Phi}$. 同理可推出 $l_2, l_3, \cdots, l_{m-1}, l_m \in \{k+1, k+2, \cdots, n\}$，即 $e_{l_i\to l_{i-1}} \in E_{n-1}^{\Phi} (i = 1, 2, \cdots, m)$，从而 $e_{1\to l_m} \notin E_{n-1}^{\Delta} \cup E_{n-1}^{\Phi} \cup E_{n-1}^{\Gamma}$，这与假设矛盾，故 $e_{1\to k+1} \notin \langle T \rangle$.

定理 6 设 $k \geqslant 2$，$n-k \geqslant 3$，则 $\operatorname{rank} HS_{(n,k)} = \dfrac{(n-k)(n-k-1)}{2} + n - k + 2 + \left[\dfrac{k}{2}\right]$.

证 $HS_{(n,k)} = \mathrm{Sing}_n \cup H_{(n,k)}$，$H_{(n,k)} = \langle g \rangle$. 由文献[1]知 $\mathrm{Sing}_n = \langle E(\Delta_{n-1}) \rangle$，又因

$$E(\Delta_{n-1}) = E_{n-1}^{\Delta} \cup E_{n-1}^{\Phi} \cup E_{n-1}^{\Gamma} \cup E_{n-1}^{\Lambda} \qquad E_{n-1}^{\Delta} \cap E_{n-1}^{\Phi} \cap E_{n-1}^{\Gamma} \cap E_{n-1}^{\Lambda} = \varnothing$$

由引理 1 及定理 1 知 $E_{n-1}^{\Gamma} \subseteq \langle \{g\} \cup E_{n-1}^{C} \rangle$，$\operatorname{rank} E_{n-1}^{\Gamma} = n-k+1$. 由定理 2 知

$$E_{n-1}^{\Phi} \subseteq \langle E_{n-1}^{B} \rangle \qquad \operatorname{rank} E_{n-1}^{\Phi} = \frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$$

由定理 3 知

$$E_{n-1}^{\Delta} \subseteq \langle \{g\} \cup E_{n-1}^{A} \rangle \qquad \operatorname{rank} E_{n-1}^{\Delta} = \left[\frac{k}{2}\right] + 1$$

由定理 5 知 $E_{n-1}^{\Lambda} \subseteq \langle \{e_{1\to k+1}, g\} \cup E_{n-1}^{A} \cup E_{n-1}^{B} \cup E_{n-1}^{C} \rangle$. 因此

$$E(\Delta_{n-1}) \subseteq \langle E_{n-1}^{C} \cup E_{n-1}^{B} \cup E_{n-1}^{A} \cup \{e_{1\to k+1}\} \cup \{g\} \rangle$$

则 $HS_{(n,k)} = \langle \{e_{1\to k+1}, g\} \cup E_{n-1}^{A} \cup E_{n-1}^{B} \cup E_{n-1}^{C} \rangle$. 从而

$$\operatorname{rank} HS_{(n,k)} \leqslant 1 + 1 + \left[\frac{k}{2}\right] + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2} + n - k = \frac{(n-k)(n-k-1)}{2} + n - k + 2 + \left[\frac{k}{2}\right]$$

反之，设 A 是半群 $HS_{(n,k)}$ 的生成集，从而半群 $HS_{(n,k)}$ 的生成集 A 必含 $H_{(n,k)}$ 中的元素. 由文献[12]知，Sing_n 由幂等元生成，则 $A \cap E_{n-1}^{\Delta} \neq \varnothing$，$A \cap E_{n-1}^{\Phi} \neq \varnothing$，$A \cap E_{n-1}^{\Gamma} \neq \varnothing$，$A \cap E_{n-1}^{\Lambda} \neq \varnothing$. 显然

$$\operatorname{rank} HS_{(n,k)} \geqslant \frac{(n-k)(n-k-1)}{2} + n - k + 2 + \left[\frac{k}{2}\right]$$

因此

$$\operatorname{rank} HS_{(n,k)} = \frac{(n-k)(n-k-1)}{2} + n - k + 2 + \left[\frac{k}{2}\right]$$

特别地，当 $k=1$ 时，$\operatorname{rank} HS_{(n,k)} = \dfrac{n(n-1)}{2} + 1$；

当 $n-k=2$ 时，$\operatorname{rank} HS_{(n,k)} = \left[\dfrac{k}{2}\right] + 6$，此时 $E_{n-1}^{A} = \left\{ e_{i\to 1} : 2 \leqslant i \leqslant \left[\dfrac{k}{2}\right] + 1 \right\}$，$E_{n-1}^{B} = \{e_{k+1\to k+2}, e_{k+2\to k+1}\}$，$E_{n-1}^{C} = \{e_{k+1\to 1}, e_{k+2\to 1}\}$，$E_{n-1}^{\Lambda} \subseteq \langle \{e_{1\to k+1}, g\} \cup E_{n-1}^{A} \cup E_{n-1}^{B} \cup E_{n-1}^{C} \rangle$，从而 $\operatorname{rank} HS_{(n,k)} = \left[\dfrac{k}{2}\right] + 6$；

当 $n-k=1$ 时，$\operatorname{rank} HS_{(n,k)} = \left[\dfrac{k}{2}\right] + 3$；

当 $n=k$ 时，$\operatorname{rank} HS_{(n,k)} = \left[\dfrac{n}{2}\right] + 1$.

综上所述，可得(1)式成立，则定理 6 得证.

参考文献：

[1] GOMES G M S, HOWIE J M. On the Ranks of Certain Finite Semigroups of Transformations [J]. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1987, 101(3): 395-403.

[2] HOWIE J M, MCFADDEN R B. Idempotent Rank in Finite Full Transformation Semigroups [J]. Proceedings of the

Royal Society of Edinburgh(Section A Mathematics), 1990, 114(3-4): 161-167.

[3] AYIK G, AYIK H, HOWIE J M. On Factorisations and Generators in Transformation Semigroups [J]. Semigroup Forum, 2005, 70(2): 225-237.

[4] 王新敬，张姗姗. Heisenberg 群上次 Laplace 方程在次线性增长下的 Liouville 定理 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2020, 42(8): 97-101.

[5] 雷　倩，何立官. 关于 Conway 单群和 Fischer 单群的刻画 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2020, 42(10): 96-100.

[6] 张前滔，赵　平，罗永贵. 半群 $TOP_n(k)$ 的格林(星)关系及富足性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2020, 45(6): 9-15.

[7] 赵　平，游泰杰，徐　波. 半群 CPO_n 的秩 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2011, 33(6): 106-110.

[8] 田应信，游泰杰，赵　平. 半群 SPC_n 的秩 [J]. 东北师大学报(自然科学版), 2016, 48(3): 9-13.

[9] 李亚雷，罗永贵，徐　波. 半群 PCS_n 的秩 [J]. 河北师范大学学报(自然科学版), 2019, 43(6): 461-464.

[10] 易　林，游泰杰，赵　平. 半群 $OI_n(k, m)$ 的秩 [J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2018, 41(1): 19-23.

[11] 张　钱，赵　平. 半群 CS_n 的秩 [J]. 数学的实践与认识, 2018, 48(11): 241-246.

[12] HOWIE J M. Idempotent Generators in Finite Full Transformation Semigroups [J]. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh(Section A Mathematics), 1978, 81(3-4): 317-323.

On Rank of Semigroup $HS_{(n,k)}$

HUANG Zhao-xia, GAO Rong-hai, LUO Yong-gui

School of Mathematics and Sciences, Guizhou Normal University, Guiyang 550025, China

Abstract: Let $X_n=[n]=\{1, 2, \cdots, n\}$, Sing_n is the singular transformation semigroup on X_n, and $H_{(n,k)}$ is the local cyclic group with k. $HS_{(n,k)}=\mathrm{Sing}_n \cup H_{(n,k)}$, then $HS_{(n,k)}$ forms a semigroup of composition of transformation on X_n, which is called the local cyclic transformation semigroup with k. By analyzing the elements of the semigroup $HS_{(n,k)}$, it is shown that for $k\geqslant 2$, $n-k\geqslant 3$, the rank of the transformation semigroup $HS_{(n,k)}$ is equal to $\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}+n-k+2+\left[\frac{k}{2}\right]$.

Key words: singular transformation semigroup; local cyclic group with k; rank

责任编辑　廖　坤