DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2021.04.003

Ext-强 W_P-Gorenstein 模①

刘雅娟，　张翠萍

西北师范大学 数学与统计学院，兰州 730070

摘要： 一般情况下，强 W_P-Gorenstein 模关于扩张不封闭，因此强 W_P-Gorenstein 模不是 $P_c(R)$-可解的. 是否 C-投射模和强 W_P-Gorenstein 模之间存在一个 $P_c(R)$-可解类? 引入一个特殊的 $P_c(R)$-可解类，即 Ext-强 W_P-Gorenstein 模，证明了 Ext-强 W_P-Gorenstein 模是 $P_c(R)$-可解类，并且讨论了 Ext-强 W_P-Gorenstein 模的预覆盖.

关 键 词： $P_c(R)$-可解类；强 W_P-Gorenstein 模；Ext-强 W_P-Gorenstein 模；预覆盖

中图分类号： O153.3　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1000-5471(2021)04-0009-06

设 R 是 Noetherian 环，M 是有限生成 R-模. 文献[1]引入了 G-维数为 0 的模. 文献[2]证明了在双边 Noetherian 环上，G-维数为 0 的有限生成模与 Gorenstein 投射模等价. 随后许多学者对这两类模做了深入的研究和推广. 文献[3]将 Gorenstein 投射模的概念推广到强 Gorenstein 投射模，并且证明了 R-模 M 是 Gorenstein 投射模当且仅当 M 是某个强 Gorenstein 投射模的直和项. 一般情况下，M 是强 Gorenstein 投射模关于扩张不封闭，因此，这类模不是投射可解类. 文献[4]引入了 Ext-强 Gorenstein 投射模，给出了 Ext-强 Gorenstein 投射模的相关性质，并且证明了 Ext-强 Gorenstein 投射模是投射可解类. 更多 Gorenstein 同调模的相关性质，请参考文献[5-8].

文献[9]引入了半对偶化 R-模，接着在此基础上引入了 C-投射模，之后学者们从不同角度对此类模做了进一步研究. 文献[10]引入了 W_P-Gorenstein 模的概念，文献[11]引入了强 W_P-Gorenstein 模的概念，并且证明了 R-模 M 是 W_P-Gorenstein 模当且仅当 M 是某个强 W_P-Gorenstein 模的直和项. 文献[12]在投射可解类的基础上定义了 $P_c(R)$-可解类.

受以上工作的启发，本文在前人的研究基础上引入一个新的模类，命名为 Ext-强 W_P-Gorenstein 模，推广了之前的 Ext-Gorenstein 模类，并讨论了这个新模类的性质和刻画. 特别地，将它们与覆盖和包络理论联系起来，证明了 Ext-强 W_P-Gorenstein 模是 $P_c(R)$-可解的.

文中的环均指有单位元的交换环，模均指酉模. 为方便起见，所有的模都指左 R-模，记 R-模范畴为 R-Mod. 用 $P_C(R)$，$P_C(R)$-$pd_R(M)$ 分别表示 C-投射模、M 的 C-投射维数.

由文献[10]知：如果存在 C-投射 R-模的正合序列

$$\xi = \cdots \xrightarrow{f_2} C \otimes_R P_1 \xrightarrow{f_1} C \otimes_R P_0 \xrightarrow{f_0} C \otimes_R P^0 \xrightarrow{f^0} C \otimes_R P^1 \xrightarrow{f^1} \cdots$$

使得 $M \cong \mathrm{Ker} f^0$，且对任意的 $Q \in P_C(R)$，有 $\mathrm{Hom}_R(Q, \xi)$ 和 $\mathrm{Hom}_R(\xi, Q)$ 正合，则左 R-模 M 是 W_P-Gorenstein 模.

定义 1[11]　如果存在 C-投射 R-模的正合序列

$$\xi = \cdots \xrightarrow{f} C \otimes_R P \xrightarrow{f} C \otimes_R P \xrightarrow{f} C \otimes_R P \xrightarrow{f} C \otimes_R P \xrightarrow{f} \cdots$$

① 收稿日期：2020-03-16
基金项目：国家自然科学基金项目(11761060).
作者简介：刘雅娟，硕士研究生，主要从事环的同调理论的研究.

使得 $M \cong \mathrm{Ker} f$，且对任意的 $Q \in P_C(R)$，有 $\mathrm{Hom}_R(Q, \xi)$ 和 $\mathrm{Hom}_R(\xi, Q)$ 正合，则 R-模 M 是强 W_P-Gorenstein 模.

将 W_P-Gorenstein 模和强 W_P-Gorenstein 模类分别记作 $G(W_P)$，$SG(W_P)$.

定义 2　设 χ 是 R-模类，如果 $P_C(R) \subseteq \chi$，并且对任意 R-模的正合序列 $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$，其中 $M'' \in \chi$，有 $M \in \chi$ 当且仅当 $M' \in \chi$，则称 χ 是 $P_C(R)$-可解类.

文献[9]引入了半对偶化 R-模的定义，证明了在交换环上，半对偶化 R-模是忠实的，并且在此基础上引入了 C-投射 R-模的概念.

设 M，N 是 R-模，记 $\mathrm{Ext}(M, N) = \{Y$：任意正合序列 $0 \longrightarrow N \longrightarrow Y \longrightarrow M \longrightarrow 0\}$.

定义 3　设 χ 是 R-模类，定义

$$\mathrm{Ext}(M, \chi) = \bigcup_{N \in \chi} \mathrm{Ext}(M, N) \qquad \mathrm{Ext}(\chi, N) = \bigcup_{M \in \chi} \mathrm{Ext}(M, N)$$

由强 W_P-Gorenstein 模的定义可知 $P_C(R) \subseteq SG(W_P)$. 由文献[11]知，$SG(W_P)$ 不是 $P_C(R)$-可解类. 为了在 $P_C(R)$ 和 $SG(W_P)$ 之间找到一种 $P_C(R)$-可解类. 下面引入 Ext-强 W_P-Gorenstein 模.

定义 4　设 $M \in SG(W_P)$，如果 $\mathrm{Ext}(SG(W_P), M) \subseteq SG(W_P)$(或 $\mathrm{Ext}(M, SG(W_P)) \subseteq SG(W_P)$). 则 R-模 M 是右(左)强 W_P-Gorenstein 模，将右(左)强 W_P-Gorenstein 模类记作 $rSG(W_P)$($lSG(W_P)$). 如果 $M \in rSG(W_P)$(或 $M \in lSG(W_P)$)，则 M 是 Ext-强 W_P-Gorenstein 模.

由文献[11]的定理 3.7 知：

引理 1　设 $0 \longrightarrow K \longrightarrow M \longrightarrow C \otimes_R Q \longrightarrow 0$ 是 R-模的正合序列，其中 Q 是投射 R-模，则 $K \in SG(W_P)$ 当且仅当 $M \in SG(W_P)$.

命题 1　设 $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ 是 R-模的正合序列，其中 $M'' \in SG(W_P)$.

(i) 如果 $M'' \in rSG(W_P)$ 且 $M \in SG(W_P)$，那么 $M' \in SG(W_P)$；

(ii) 如果 $M \in lSG(W_P)$，那么 $M' \in SG(W_P)$.

证　(i) 已知 $M'' \in SG(W_P)$，有正合序列 $0 \longrightarrow M'' \longrightarrow C \otimes_R Q \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$，其中 Q 是投射模

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & M' \arrow[r, equal] \arrow[d] & M' \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M'' \arrow[r] \arrow[d, equal] & T \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M'' \arrow[r] & C \otimes Q \arrow[r] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

由中间行知 $T \in SG(W_P)$，故由中间列和引理 1 知 $M' \in SG(W_P)$.

(ii) 证明方法和(i)类似.

定理 1　设 R 是环，则 $rSG(W_P)$ 和 $lSG(W_P)$ 是 $P_C(R)$-可解类.

证　只证 $rSG(W_P)$ 是 $P_C(R)$-可解类，用同样的方法可证 $lSG(W_P)$ 是 $P_C(R)$-可解类.

设 $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$ 是 R-模的正合序列，其中 $M_3 \in rSG(W_P)$. 下面需证 $M_1 \in rSG(W_P)$ 当且仅当 $M_2 \in rSG(W_P)$.

必要性　假设 $M_1 \in rSG(W_P)$，已知 $M_3 \in rSG(W_P)$，下证 $M_2 \in rSG(W_P)$.

设 $0 \longrightarrow M_2 \longrightarrow K \longrightarrow W \longrightarrow 0$ 是 R-模的正合序列，其中 $W \in SG(W_P)$. 考虑推出图

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & M_2 \arrow[r] \arrow[d] & M_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & W \arrow[r, equal] \arrow[d] & W \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

在最后一列中，因为 $M_3 \in rSG(W_P)$，$W \in SG(W_P)$，所以 $T \in SG(W_P)$. 在中间行中，因为 $T \in SG(W_P)$，$M_1 \in rSG(W_P)$，所以 $K \in SG(W_P)$. 故由中间列得 $M_2 \in rSG(W_P)$.

充分性　假设 $M_2 \in rSG(W_P)$，已知 $M_3 \in rSG(W_P)$，下证 $M_1 \in rSG(W_P)$. 由于 $M_3 \in rSG(W_P) \subseteq SG(W_P)$. 故存在正合序列 $0 \longrightarrow M_3 \longrightarrow C \bigotimes_R P \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$，其中 P 是投射 R -模. 考虑拉回图

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & M_1 \arrow[r, equal] \arrow[d] & M_1 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, equal] & X \arrow[r] \arrow[d] & M_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_3 \arrow[r] & C \otimes_R P \arrow[r] \arrow[d] & M_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

由于 $M_2, M_3 \in rSG(W_P)$，由必要性的证明知 $X \in rSG(W_P)$. 由中间一列和引理 1 知 $M_1 \in SG(W_P)$. 设 $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow L \longrightarrow M_1' \longrightarrow 0$ 是 R -模的正合序列，其中 $M_1' \in SG(W_P)$. 考虑推出图

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & C \otimes_R P \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d] & L \oplus (C \otimes_R P) \arrow[r] \arrow[d] & C \otimes_R P \arrow[r] & 0 \\
 & M_1' \arrow[r, equal] \arrow[d] & M_1' \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

在中间列中，因为 $X \in rSG(W_P)$，$M_1' \in SG(W_P)$，所以 $L \bigoplus (C \bigotimes_R P) \in SG(W_P)$. 对于中间行，由引理 1 知 $L \in SG(W_P)$. 故 $M_1 \in rSG(W_P)$.

命题 2　设 $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$ 是 R -模的正合序列，其中 $M_3 \in G(W_P)$，则以下结论成立：

(i) 若 $M_1 \in SG(W_P)$，$M_2 \in rSG(W_P)$，则 $M_3 \in SG(W_P)$；

(ii) 若 $M_1 \in lSG(W_P)$，$M_2 \in SG(W_P)$，则 $M_3 \in SG(W_P)$；

(iii) 若 $M_1, M_2 \in rSG(W_P)$，则 $M_3 \in rSG(W_P)$；

(iv) 若 $M_1, M_2 \in lSG(W_P)$，则 $M_3 \in lSG(W_P)$.

证　(i) 已知 $M_1 \in SG(W_P)$，存在 R -模的正合序列

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow C \bigotimes_R P \longrightarrow M_1 \longrightarrow 0$$

其中 P 是投射 R-模. 考虑 $M_1 \longrightarrow M_2$ 和 $M_1 \longrightarrow C \bigotimes_R P$ 的推出图

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r] \arrow[d] & M_2 \arrow[r] \arrow[d] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & C \otimes_R P \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & M_3 \arrow[r] & 0 \\
 & M_1 \arrow[r, equal] \arrow[d] & M_1 \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

由中间列知, $M_2 \in rSG(W_P)$, $M_1 \in SG(W_P)$, 故 $X \in SG(W_P)$. 因为 $M_3 \in G(W_P)$, 所以由定义知 $\mathrm{Ext}_R^1(M_3, C \bigotimes_R P) = 0$, 故中间行可裂. 则存在正合序列 $0 \longrightarrow M_3 \longrightarrow X \longrightarrow C \bigotimes_R P \longrightarrow 0$. 引理 1 知 $M_3 \in SG(W_P)$.

(ii) 证明方法和(i) 类似.

(iii) 因为 $M_1, M_2 \in rSG(W_P)$, 由(i) 和上面的证明知 $X \cong M_3 \bigoplus (C \bigotimes_R P)$. 所以存在正合序列 $0 \longrightarrow M_3 \longrightarrow X \longrightarrow C \bigotimes_R P \longrightarrow 0$. 由定理 1 知 $M_3 \in rSG(W_P)$.

(iv) 证明方法和(iii) 类似.

推论 1 设 $M \in G(W_P)$, 存在正合序列

$$0 \longrightarrow L_n \longrightarrow L_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

使得 $L \in rSG(W_P)$(或 $L \in lSG(W_P)$), $0 \leqslant i \leqslant n$, 则 $M \in rSG(W_P)$(或 $M \in lSG(W_P)$).

证 设 $K_i \in \mathrm{Ker}(L_i \longrightarrow L_{i-1})$, $0 \leqslant i \leqslant n$, $L_{-1} = M$. 由文献[10] 的命题 2.7 知, K_i 是 $G(W_P)$, $0 \leqslant i \leqslant n-2$. 则有正合序列

$$0 \longrightarrow L_n \longrightarrow L_{n-1} \longrightarrow K_{n-2} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow K_{n-2} \longrightarrow L_{n-2} \longrightarrow K_{n-3} \longrightarrow 0$$

$$\cdots$$

$$0 \longrightarrow K_1 \longrightarrow L_1 \longrightarrow K_0 \longrightarrow 0$$

由命题 2(iii) 知 $K_i \in rSG(W_P)$(或 $K_i \in lSG(W_P)$). 对于短正合序列 $0 \longrightarrow K_0 \longrightarrow L_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$, 由命题 2(iii) 知 $M \in rSG(W_P)$(或 $M \in lSG(W_P)$).

命题 3 设 R 是环, 则以下结论等价:

(i) $lSG(W_P) = SG(W_P)$;

(ii) $SG(W_P) = G(W_P)$;

(iii) $rSG(W_P) = SG(W_P)$;

(iv) $SG(W_P)$ 关于扩张封闭, $M_3 \in lSG(W_P)$;

(v) $lSG(W_P) \bigcap rSG(W_P) = SG(W_P)$.

证 (i)⇒(ii) 设 $lSG(W_P) = SG(W_P)$. 由定理 1 知, $lSG(W_P)$ 是 $P_c(R)$-可解的. 设 $M \in G(W_P)$. 由文献[11] 的定理 3.6 知, M 是 $SG(W_P)$ 的直和项. 由文献[13] 的命题 1.4 和文献[11] 的命题 3.5 知, $SG(W_P)$ 关于直和项封闭. 因此 $M \in SG(W_P)$, 即 $SG(W_P) = G(W_P)$.

(ii)⇒(i) 设 $M \in G(W_P)$, 已知 $SG(W_P) = G(W_P)$. 下证 $M \in lSG(W_P)$. 由文献[14] 的推论 4.5 知, $\mathrm{Ext}(M, SG(W_P)) = \mathrm{Ext}(M, G(W_P)) \subseteq G(W_P) = SG(W_P)$. 则 $M \in lSG(W_P)$.

(ii)⇒(iii) 证明类似(ii)⇒(i).

(iii)⇒(ii) 证明类似(i)⇒(ii).

(iv)⇒(i) 由定义知.

(i)⇒(iv) 由定理 1 知 $lSG(W_P)$ 是 $P_c(R)$ -可解的，因此 $SG(W_P)$ 关于扩张封闭.

(v)⇒(i) 由已知条件得 $SG(W_P) = lSG(W_P) \cap rSG(W_P) \subseteq SG(W_P)$.

(iv)⇒(v) $SG(W_P)$ 关于扩张封闭，则 $lSG(W_P) = SG(W_P)$，$rSG(W_P) = SG(W_P)$.

设 χ 是 R -模的类. $\dim_\chi M$ 表示 R -模 M 的 χ -分解维数，并且

$\dim_\chi M = \min\{n$：存在正合序列 $0 \longrightarrow X_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$，其中 $X_i \in \chi$，$i = 0, 1, \cdots, n\}$

如果不存在这样的 n，那么规定 $\dim_\chi M = \infty$.

设 χ 是 R -模类. M 是 R -模，若对任意的 $X \in \chi$，

$$\mathrm{Hom}_R(X', X) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(X', M) \longrightarrow 0$$

是正合的，则称 f 是 M 的 χ -预覆盖. 对偶地，有 M 的 χ -预包络的定义.

定理 2　设 M 是 R -模，并且 $M \notin rSG(W_P)$，$n \geqslant 1$，则以下结论等价：

(i) $\dim_{rSG(W_P)} M \leqslant n$；

(ii) M 有一个满的 $rSG(W_P)$ -预覆盖 $f: T \longrightarrow M$，其中 $K = \mathrm{Ker} f$，且 $P_c(R) - pd_R(K) = n - 1$；

(iii) 存在两个正合序列 $0 \longrightarrow K \longrightarrow T \longrightarrow M \longrightarrow 0$，$0 \longrightarrow M \longrightarrow Q \longrightarrow T \longrightarrow 0$，其中 $T \in rSG(W_P)$，$P_c(R) - pd_R(K) = n - 1$，且 $P_c(R) - pd_R(Q) = n$.

证　(i)⇒(ii) 由定理 1 和文献[15] 的命题 3.1(1) 即证.

(ii)⇒(iii) 由(ii) 知，存在正合序列

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow T \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

其中 $T \in rSG(W_P)$，并且 $P_c(R) - pd_R(K) = n - 1$. 因为 $T \in rSG(W_P) \in SG(W_P)$，所以存在正合序列

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow C \otimes_R P \longrightarrow T \longrightarrow 0$$

其中 P 是投射 R -模，考虑 $T \longrightarrow C \otimes_R P$ 和 $T \longrightarrow M$ 的推出图

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, equal] & T \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & C \otimes_R P \arrow[r] \arrow[d] & Q \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & T \arrow[r, equal] \arrow[d] & T \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

由中间行正合知 $P_c(R) - pd_R(Q) = n$. 由最后一列知 $0 \longrightarrow M \longrightarrow Q \longrightarrow T \longrightarrow 0$ 正合.

(iii)⇒(i) 显然.

参考文献：

[1] AUSLAND M, BRIDGER M. Stable Module Theory [M]. Providence, RI: Amer Math Soc, 1969.

[2] ENOCHS E E, JENDA O M G. Gorenstein Injctive and Projective Modules [J]. Mathematische Zeitschrift, 1995, 220(1): 611-633.

[3] BENNIS D, MAHDOU N. Strongly Gorenstein Projective, Injective and Flat Modules [J]. J Pure Appl Algebra, 2007, 210(2): 437-445.

[4] REN J. The Ext-Strongly Gorenstein Projective Modules [J]. Turk J Math, 2015, 39: 54-62.

[5] 魏宝军，于春艳，杨晓燕. Gorenstein 投射复形范畴中的纯正合列 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2020, 45(2): 7-10.

[6] 张健芳，高增辉. Gorenstein FP_n-投射模 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2020, 45(8): 12-17.

[7] 王　兴，杨　刚. Gorenstein AC-投射模的函子伴随性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2020, 42(10): 101-108.

[8] 陈文静，杨晓燕. 强和强泛 Gorenstein FP-内射模 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2014, 36(8): 75-78.

[9] FOXBY H B. Gorenstein Modules and Related Modules [J]. Mathematica Scandinavica, 1972, 31: 267-284.
[10] GENG Y X, DING N Q. *W*-Gorenstein Modules [J]. Journal of Algebra, 2011, 325(1): 132-146.
[11] ZHANG W R, LIU Z K, YANG X Y. Foxby Equivalences Associated to Strongly Gorenstein Modules [J]. Kodai Math J, 2018, 41(2): 397-412.
[12] WANG Z P, GUO S T, MA H Y. Stability of Gorenstein Modules with Respect to a Semidualizing Module [J]. Journal of Mathematics, 2017, 37(6): 1143-1153.
[13] HOLM H. Gorenstein Homological Dimensions [J]. J Pure and Appl Algebra, 2004, 189(1-3): 167-193.
[14] SATHER-WAGSTAFF S, SHARIF T, WHITE D. Stability of Gorenstein Categories [J]. J of Lond Math Soc, 2008, 77(2): 481-502.
[15] ZHU X S. Resolving Resolution Dimensions [J]. Algebras and Representation Theory, 2013, 16(4): 1165-1191.

Ext-Strong W_P-Gorenstein Modules

LIU Ya-juan, ZHANG Cui-ping

School of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China

Abstract: In general, the strongly W_P-Gorenstein modules are not closed under extensions and, therefore, the class of strongly W_P-Gorenstein modules is not $P_c(R)$-resolving. Whether or not there exists a $P_c(R)$-resolving between the class of C-projective and strongly W_P-Gorenstein modules? So a particular $P_c(R)$-resolving class has been introduced, which is called the class of Ext-strongly W_P-Gorenstein module, the class of Ext-strongly W_P-Gorenstein modules is $P_c(R)$-resolving are investigated, and Ext-strongly W_P-Gorensteinprecover are discussed.

Key words: $P_c(R)$-resolving class; strongly W_P-Gorenstein modules; Ext-strongly W_P-Gorenstein modules; precover

责任编辑 廖 坤