第 46 卷　第 4 期　西南师范大学学报(自然科学版)　2021 年 4 月
Vol. 46　No. 4　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　Apr.　2021

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2021.04.006

黎曼流形中的近 Yamabe 孤立子[①]

吴玉婷，　刘建成

西北师范大学 数学与统计学院，兰州 730070

摘要： 主要研究了黎曼流形中的等距浸入近 Yamabe 孤立子. 使用 Hopf 极大值原理及子流形的基本方程，得到了近 Yamabe 孤立子是全测地或全脐的充分条件. 对欧氏单位球面 $\mathscr{S}^{n+1}$ 中的非平凡紧致极小梯度近 Yamabe 孤立子 (M^n, g, f, ρ)，证明了若 M^n 的数量曲率 $S \geqslant n(n-2)$，则 M^n 等距于欧氏球面.

关　键　词： 近 Yamabe 孤立子；极小浸入；全测地；全脐

中图分类号：O186.12　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1000-5471(2021)04-0025-04

设 (M^n, g) 为 n 维黎曼流形，g 为黎曼度量. 记 Ric 为 M^n 的 Ricci 曲率张量，S 为 M^n 的数量曲率，$\mathscr{L}_V g$ 为度量 g 沿 M^n 的切向量场 V 的 Lie 导数.

若存在 M^n 上的光滑向量场 V 和光滑函数 ρ：$M^n \longrightarrow \mathbb{R}$，使得

$$\mathrm{Ric} + \frac{1}{2}\mathscr{L}_V g = \rho g$$

则称 M^n 为近 Ricci 孤立子[1-2]. 特别地，当光滑函数 ρ 为常数时，M^n 称为 Ricci 孤立子.

若存在 (M^n, g) 上的光滑向量场 V 和光滑函数 ρ：$M^n \longrightarrow \mathbb{R}$，使得

$$(S-\rho)g = \frac{1}{2}\mathscr{L}_V g \tag{1}$$

则称 M^n 为近 Yamabe 孤立子[3-4]，记为 (M^n, g, V, ρ). 若向量场 V 是 M^n 上光滑函数 f：$M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ 的梯度，则称 M^n 为梯度近 Yamabe 孤立子，记为 (M^n, g, f, ρ). 特别地，当光滑函数 ρ 为常数时，M^n 称为 Yamabe 孤立子[5-6]，梯度近 Yamabe 孤立子即为梯度 Yamabe 孤立子.

当 $n=2$ 时，Ricci 孤立子等价于 Yamabe 孤立子[7].

近年来，对 Yamabe 孤立子的刚性分类性结果的研究已经取得了一系列重要进展. 文献[3]证明了完备非紧梯度非平凡近 Yamabe 孤立子等距于欧氏空间. 文献[6]证明了具有正 Ricci 曲率的完备非平凡梯度 Yamabe 孤立子是旋转对称的. 文献[4]给出了欧氏空间中的近 Yamabe 孤立子的分类结果.

本文考虑近 Yamabe 孤立子到黎曼流形中的等距浸入问题. 研究思想基于文献[8]的关于近 Ricci 孤立子到黎曼流形中的等距浸入问题，文献[8]通过推广文献[9]中 Ricci 孤立子的结构方程，得出有关近 Ricci 孤立子的结构方程，并由此结构方程得出黎曼流形 $\overline{M}^{n+p}$ 上的近 Ricci 孤立子是全测地的，以及子流形是全脐的.

为叙述方便，先给出本文需要用到的一些符号.

设 φ：$M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+p}$ 为定向子流形 M^n 到黎曼流形 $\overline{M}^{n+p}$ 的等距浸入，$\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 为 TM 的局部标准正交基，则子流形 M^n 上的平均曲率向量场 H 定义为

---

① 收稿日期：2020-07-20

基金项目：国家自然科学基金项目(11761061).

作者简介：吴玉婷，硕士研究生，主要从事微分几何的研究.

通信作者：刘建成，博士，教授，博士生导师.

$$H = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i)$$

其中 h 表示 M^n 的第二基本形式. 若 M^n 的平均曲率向量场 H 处处为0, 则称 M^n 是极小子流形. 如果 M^n 的第二基本形式 $h=0$, 那么称 M^n 是全测地子流形. 若对 M^n 上的任意光滑向量场 X, Y 都有 $h(X, Y) = g(X, Y)H$, 则称 M^n 为全脐子流形.

记 $R, \bar{R}$ 分别为 $M^n, \bar{M}^{n+p}$ 的黎曼曲率张量, X, Y, Z, W 为 M^n 上的任意光滑向量场. M^n 的 Gauss 方程为

$$\langle R(X, Y)Z, W\rangle = \langle \bar{R}(X, Y)Z, W\rangle + \langle h(X, W), h(Y, Z)\rangle - \langle h(X, Z), h(Y, W)\rangle \tag{2}$$

对(2)式求迹, 得

$$\mathrm{Ric}(X, Y) = c(n-1)\langle X, Y\rangle + nH\langle AX, Y\rangle - \langle AX, AY\rangle \tag{3}$$

其中 A 为 M^n 上的形状算子. 若 $AX = HX$, 进一步有

$$\mathrm{Ric}(X, Y) = (n-1)(c + |H|^2)\langle X, Y\rangle \tag{4}$$

由(2)式可知, M^n 的数量曲率为

$$S = \sum_{i,j}^{n} \langle \bar{S}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_i\rangle + n^2 |H|^2 - \sum_{i,j}^{n} |h(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)|^2 \tag{5}$$

当 $p=1$, 且 $\bar{M}^{n+1}$ 是截面曲率为 c 的空间型时, M^n 的数量曲率可表示为

$$S = n(n-1)c + n^2 |H|^2 - |A|^2 \tag{6}$$

用 I 表示 TM 上的单位算子, 并令 $\Phi = A - HI$, 则有 $\mathrm{tr}\,\Phi = 0$. 从而有

$$|\Phi|^2 = \mathrm{tr}(\Phi)^2 = |A|^2 - n|H|^2 \geqslant 0 \tag{7}$$

等式成立当且仅当 M^n 是全脐的.

文献[10]归纳了完备非紧黎曼流形关于次调和函数的Hopf极大值原理. 文献[11]借助文献[10]的结论, 将次调和函数的梯度推广到任意向量场 X, 即为引理1.

引理1[11] 设完备非紧定向黎曼流形 M^n 存在光滑向量场 V, 使得 $\mathrm{div}\,V$ 在 M^n 上不改变符号. 若 $|V| \in L^1(M^n)$, 则 $\mathrm{div}\,V = 0$ 恒成立.

定理1 设 $\varphi: M^n \longrightarrow \bar{M}^{n+p}$ 为近 Yamabe 孤立子 (M^n, g, V, ρ) 到截面曲率为 $\bar{K}$ 的黎曼流形 $\bar{M}^{n+p}$ 中的等距浸入, $L^1(M^n)$ 为 M^n 上的 Lebesgue 可积函数空间. 则下列结论成立:

(i) 若 $|V| \in L^1(M^n)$, $\bar{K} \leqslant 0$ 且 $\rho > 0$, 则 φ 不可能是极小的;

(ii) 若 $|V| \in L^1(M^n)$, $\bar{K} < 0$ 且 $\rho \geqslant 0$, 则 φ 不可能是极小的;

(iii) 若 $|V| \in L^1(M^n)$, $\bar{K} \leqslant 0$, $\rho \geqslant 0$, 且 φ 是极小的, 则 M^n 是全测地的.

证 利用反证法证明 φ 不可能是极小的.

(i) 设 $\varphi: M^n \longrightarrow \bar{M}^{n+p}$ 为近 Yamabe 孤立子到截面曲率为 $\bar{K}$ 的黎曼流形的极小浸入. 由于 $\bar{K} \leqslant 0$, 根据(5)式知

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i,j}^{n} \langle \bar{S}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_i\rangle + n^2 |H|^2 - \sum_{i,j}^{n} |h(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)|^2 = \\ &\sum_{i,j}^{n} \langle \bar{S}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_i\rangle - \sum_{i,j}^{n} |h(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)|^2 \leqslant 0 \end{aligned} \tag{8}$$

另一方面, 对方程(1)求迹, 可得

$$n(S - \rho) = \mathrm{div}\,V \tag{9}$$

再结合(8), (9)式及定理1(i)中的条件 $\rho > 0$ 可得

$$\mathrm{div}\,V = n(S - \rho) < 0 \tag{10}$$

而 $|V| \in L^1(M^n)$, 由引理1知, $\mathrm{div}\,V = 0$, 与(10)式矛盾. 故 φ 不可能是极小的.

(ii) 若 $\bar{K} < 0$, 类似(8)式有 $S < 0$. 结合(9)式及定理1(ii)中的条件 $\rho \geqslant 0$, 可得

$$\mathrm{div}\,V = n(S - \rho) < 0 \tag{11}$$

由于 $|V| \in L^1(M^n)$, 因此(11)式同样与引理1矛盾. 所以 φ 不可能是极小的.

(iii) 要证 M^n 是全测地的, 只需证 M^n 的第二基本形式为0. 由于 $\bar{M}^{n+p}$ 的截面曲率 $\bar{K} \leqslant 0$, 且浸入是极小的, 由(8)式知 $S \leqslant 0$. 结合(9)式及定理1(iii)中的条件 $\rho \geqslant 0$, 可得 $\mathrm{div}\,V = n(S - \rho) \leqslant 0$. 而 $|V| \in$

$L^1(M^n)$，由引理 1 知 $\operatorname{div} V = 0$，于是有 $0 \leqslant \rho = S \leqslant 0$，即 $S = \rho = 0$. 对任意 $i, j = 1, \cdots, n$，根据(8) 式得

$$\overline{K}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = |h(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)| = 0$$

则 $\overline{M}^{n+p}$ 是欧氏空间，且 M^n 是全测地的. 进而根据 Gauss 方程(2) 知，M^n 等距于 $\mathbb{R}^n$.

若黎曼流形 $\overline{M}^{n+p}$ 的截面曲率为常数 c，我们有：

定理 2　设(M^n, g, V, ρ)为到截面曲率为常数 c 的黎曼流形 $\overline{M}^{n+p}$ 中的等距浸入近 Yamabe 孤立子，则有以下结论：

(i) 若 $|V| \in L^1(M^n)$，且 $\rho \geqslant n(n-1)c + n^2|H|^2$，则 M^n 是全测地的，此时 $\rho = n(n-1)c$，数量曲率 $S = n(n-1)c$，其中 H 表示 M^n 的平均曲率向量场；

(ii) 若 $|V| \in L^1(M^n)$，$p = 1$，且 $\rho \geqslant n(n-1)(c+|H|^2)$，则 M^n 是全脐的. 进而数量曲率 $S = n(n-1)(c+|H|^2)$ 是常数.

证　(i) 要证 M^n 是全测地的，只需证 M^n 的第二基本形式为 0. 由于 $\overline{M}^{n+p}$ 的截面曲率为常数 c，根据(5) 式可知

$$\begin{aligned} S = &\sum_{i,j}^{n} \langle \overline{S}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_i \rangle + n^2|H|^2 - \sum_{i,j}^{n} |h(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)|^2 = \\ &n(n-1)c + n^2|H|^2 - \sum_{i,j}^{n} |h(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)|^2 \end{aligned} \tag{12}$$

将(12) 式代入(9) 式，有

$$\begin{aligned} \operatorname{div} V = &n(S-\rho) = \\ &\Big[n(n-1)c + n^2|H|^2 - \sum_{i,j}^{n} |h(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)|^2 - \rho\Big]n = \\ &n[n(n-1)c + n^2|H|^2 - \rho] - n\sum_{i,j}^{n} |h(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)|^2 \end{aligned} \tag{13}$$

结合(13) 式和定理 2(i) 中的条件 $\rho \geqslant n(n-1)c + n^2|H|^2$，可得 $\operatorname{div} V \leqslant 0$. 而 $|V| \in L^1(M^n)$，由引理 1 可知 $\operatorname{div} V = 0$. 再结合(13) 式可知

$$\rho = n(n-1)c + n^2|H|^2 \qquad |h(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)| = 0$$

从而 M^n 是全测地的. 因此 $|H| = 0$，进而 $\rho = n(n-1)c$. 将 $|H| = 0$ 代入(12) 式得 $S = n(n-1)c$.

(ii) 要证 M^n 是全脐的，只需证 $|\Phi|^2 = 0$. 由(7) 式知

$$|A|^2 = |\Phi|^2 + n|H|^2 \tag{14}$$

将(14) 式代入(6) 式，有

$$\begin{aligned} S = &n(n-1)c + n^2|H|^2 - |A|^2 = \\ &n(n-1)c + n(n-1)|H|^2 - |\Phi|^2 = \\ &n(n-1)(c+|H|^2) - |\Phi|^2 \end{aligned} \tag{15}$$

再将(15) 式代入(9) 式，可得

$$\operatorname{div} V = n(S-\rho) = n[n(n-1)(c+|H|^2) - \rho] - n|\Phi|^2 \tag{16}$$

结合(16) 式和定理 2(ii) 中的条件 $\rho \geqslant n(n-1)(c+|H|^2)$，有 $\operatorname{div} V \leqslant 0$. 由于 $|V| \in L^1(M^n)$，因此由引理 1 知 $\operatorname{div} V = 0$. 从而由(16) 式可得

$$\rho = n(n-1)(c+|H|^2) \qquad |\Phi|^2 = 0$$

即 M^n 是全脐的. 此时由(15) 式知 $S = n(n-1)(c+|H|^2)$. 根据 Gauss 公式(2) 知，M^n 等距于欧氏球面，且截面曲率为 $c+|H|^2$.

文献[3]证明了：具有常数量曲率 S 的非平凡紧致梯度近 Yamabe 孤立子 M^n 等距于欧氏球面. 同样地，本文考虑近 Yamabe 孤立子的等距浸入，有如下结果：

定理 3　设非平凡紧致梯度近 Yamabe 孤立子(M^n, g, f, ρ)为欧氏单位球面 $\mathscr{S}^{n+1}$ 的极小子流形. 若数量曲率 $S \geqslant n(n-2)$，则 M^n 等距于欧氏球面.

证 要证M^n等距于欧氏球面，根据文献[3]，只需证数量曲率S为常数．由于浸入是极小的，由(6)式知

$$S = n(n-1) + n^2 \mid H \mid^2 - \mid A \mid^2 = n(n-1) - \mid A \mid^2 \tag{17}$$

结合(17)式及定理3中的条件$S \geqslant n(n-2)$，可得$\mid A \mid^2 \leqslant n$．由文献[12]的推论5可知$\mid A \mid^2 = 0$，或者$\mid A \mid^2 = n$．从而(17)式为$S = n(n-1)$，或者$S = n(n-2)$．由此$S$为常数，则$M^n$等距于欧氏球面．根据Gauss方程(2)知，$M^n$的截面曲率为$1 + \mid H \mid^2$．定理3得证．

参考文献：

[1] PIGOLA S, RIGOLI M, RIMOLDI M, et al. Ricci Almost Solitons [J]. Annali Della Scuola Normale Superiore Di Pisa-Classe Di Scienze, 2011, 10(4): 757-799.

[2] BARROS A, RIBEIRO E. Some Characterizations for Compact Almost Ricci Solitons [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2012, 140(3): 1033-1040.

[3] BARBOSA E, RIBEIRO E. On Conformal Solutions of the Yamabe Flow [J]. Archiv Der Mathematik, 2013, 101(1): 79-89.

[4] SEKO T, MAETA S. Classification of Almost Yamabe Solitons in Euclidean Spaces [J]. Journal of Geometry and Physics, 2019, 136: 97-103.

[5] DESHMUKH S, CHEN B Y. A Note on Yamabe Solitons [J]. Balkan Journal of Geometry and Its Applications, 2018, 23(1): 37-43.

[6] CAO H D, SUN X F, ZHANG Y Y. On the Structure of Gradient Yamabe Solitons [J]. Mathematical Research Letters, 2012, 19(4): 767-774.

[7] 高 翔. 几何分析中若干问题的研究 [D]. 上海：华东师范大学，2011.

[8] BARROS A, GOMES J N, RIBEIRO E. Immersion of Almost Ricci Solitons into a Riemannian Manifold [J]. Matemática Contemporânea, 2011, 40: 91-102.

[9] MASTROLIA P, RIGOLI M, RIMOLDI M. Some Geometric Analysis on Generic Ricci Solitons [J]. Communications in Contemporary Mathematics, 2013, 15(3): 1250058.

[10] YAU S T. Some Function-Theoretic Properties of Complete Riemannian Manifolds and Their Applications to Geometry [J]. Indiana University Mathematics Journal, 1976, 25(7): 659-670.

[11] CAMINHA A, SOUZA P, CAMARGO F. Complete Foliations of Space Forms by Hypersurfaces [J]. Bulletin of the Brazilian Mathematical Society (New Series), 2010, 41(3): 339-353.

[12] SIMONS J. Minimal Varieties in Riemannian Manifolds [J]. The Annals of Mathematics, 1968, 88(1): 62-105.

Almost Yamabe Solitons in Riemannian Manifolds

WU Yu-ting, LIU Jian-cheng

School of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China

Abstract: In this paper, we study isometrical immersion of almost Yamabe solitons in a Riemannian manifold. By using Hopf's maximum principles and the basic equations of the submanifold, we obtain the sufficient conditions for submanifold to be totally geodesic, or totally umbilical. For a compact minimal gradient almost Yamabe solitons (M^n, g, f, ρ) in Euclidean sphere $\mathscr{S}^{n+1}$, we prove that M^n isometrics to Euclidean sphere if its scalar curvature $S \geqslant n(n-2)$.

Key words: almost Yamabe solitons; minimally immersion; totally geodesic; totally umbilical

责任编辑 廖 坤