DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2021.04.007

紧致 h-近 Ricci 孤立子的平凡性结果[①]

魏苗苗，　刘建成

西北师范大学 数学与统计学院，兰州 730070

摘要：主要研究了 h-近 Ricci 孤立子，利用散度定理及 Schur 引理得到了有关紧致 h-近 Ricci 孤立子的平凡性结果，即在适当积分条件下，证明了紧致 h-近 Ricci 孤立子为 Einstein 流形.

关　键　词：紧致 h-近 Ricci 孤立子；Einstein 流形；Killing 向量场

中图分类号：O186.12　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000-5471(2021)04-0029-05

若黎曼流形(M^n, g)上存在光滑向量场 X 满足方程

$$\mathrm{Ric} + \frac{1}{2}\mathscr{L}_X g = \lambda g$$

则称 M^n 为Ricci孤立子，记为(M^n, g, X)，其中Ric为其Ricci张量，$\mathscr{L}_X g$ 表示度量 g 沿 X 方向的Lie导数，X为孤子场，$\lambda \in \mathbb{R}$ 为孤立子常数. 当 $\lambda > 0$($\lambda = 0$，或 $\lambda < 0$)时，称 Ricci 孤立子为收缩的(稳定的，或扩张的). Ricci 孤立子为 Ricci 流的自相似解，也是 Einstein 度量的自然推广(参见文献[1-2]).

当使用新的光滑函数 λ 来替代原来的孤立子常数 λ 时，称 M^n 为近 Ricci 孤立子(参见文献[3]). 同样地，通过改变孤立子方程中的常数项，可得到如下关于 h-近 Ricci 孤立子的推广概念：

若黎曼流形(M^n, g)上存在光滑向量场 X 以及光滑函数 $\lambda, h: M \longrightarrow \mathbb{R}$，使得

$$\mathrm{Ric} + \frac{h}{2}\mathscr{L}_X g = \lambda g \tag{1}$$

则称 M^n 为 h-近 Ricci 孤立子(参见文献[4])，记为(M^n, g, X, h, λ). 特别地，若 λ 为常数，则称 M^n 为 h-Ricci 孤立子. 若向量场 X 为 M^n 上某个光滑函数 $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ 的梯度，则称 M^n 为具有势函数 f 的梯度 h-近 Ricci 孤立子，记为$(M^n, g, \nabla f, h, \lambda)$，此时 $\mathscr{L}_X g = 2\nabla^2 f$，从而(1)式可重新写为

$$\mathrm{Ric} + h\nabla^2 f = \lambda g \tag{2}$$

这里的$\nabla^2 f$ 为 f 的 Hessian 算子. 当 X 为齐性共形向量场时，即对某个常数 c，有 $\mathscr{L}_X g = cg$ 时，称 M^n 为平凡的孤立子，否则为非平凡的.

从以上的定义不难看出，1-Ricci 孤立子即为 Ricci 孤立子，1-近 Ricci 孤立子即为近 Ricci 孤立子. 目前对于孤立子的研究主要致力于其刚性问题，以及平凡性讨论，且这方面已经取得了比较丰富的研究成果. 文献[5]证明了数量曲率 S($S \geqslant 0$ 且 $S \in L^1$)的完备扩张 Ricci 孤立子等距于标准球面. 文献[6]证明了数量曲率可达下界的稳定 Ricci 孤立子为 Ricci 平坦的. 文献[6]证明了满足适当积分条件的紧致梯度近 Ricci 孤立子等距于标准球面 $\mathscr{S}^n$. 文献[4]证明了具有常数量曲率的 h-近 Ricci 孤立子等距于标准球面 $\mathscr{S}^n$. 文献

① 收稿日期：2020-07-08
基金项目：国家自然科学基金项目(11761061).
作者简介：魏苗苗，硕士研究生，主要从事微分几何的研究.
通信作者：刘建成，教授，博士生导师.

[7] 证明了具有非平凡共形向量场的紧致 h-近 Ricci 孤立子等距于欧氏球面 $\mathscr{S}^n$. 文献[8] 证明了紧致扩张(稳定)的 Ricci 孤立子为平凡的. 文献[9] 证明了具有消失共形 Weyl 曲率张量的紧致 Ricci 孤立子为 Einstein 流形. 文献[10] 通过推广文献[6] 中推论 2 的 Ricci 孤立子的结构方程，得出有关近 Ricci 孤立子的结构方程，并由此结构方程得出满足适当积分条件的紧致近 Ricci 孤立子为平凡的. 文献[11] 证明了 Para-Sasakian 流形上具有非零孤子场的梯度 h-近 Ricci 孤立子为 Einstein 流形.

1　主要结果

本文采用文献[10] 中关于紧致近 Ricci 孤立子的平凡性结果的研究思路，在适当的积分条件下，证明了紧致 h-近 Ricci 孤立子的平凡性结果，得到了如下主要结果：

定理 1　设(M^n, g, X, h, λ)为紧致的 h-近 Ricci 孤立子$(n \geqslant 3)$，且光滑函数 h 定号(即在 M 上，或者 $h > 0$，或者 $h < 0$，下同). 若

$$\int_M \left[\mathrm{Ric}\left(X, X - \frac{2}{h^2}\nabla h\right) + \left\langle X, \frac{n-2}{h}\nabla\lambda + \frac{2\lambda}{h^2}\nabla h\right\rangle - X(\ln h)\mathrm{div}\, X\right]\mathrm{d}M \leqslant 0$$

则孤立子场 X 为 Killing 向量场，进而 M^n 为平凡孤立子，即为 Einstein 流形.

定理 2　设$(M^n, g, \nabla f, h, \lambda)$为紧致梯度 h-近 Ricci 孤立子$(n \geqslant 3)$，且光滑函数 h 定号. 若

$$\int_M \frac{1}{2h}[2\langle\nabla\lambda, \nabla f\rangle - \langle\nabla R, \nabla f\rangle - 2\nabla^2 f(\nabla h, \nabla f)]\mathrm{d}M \geqslant 0$$

则 M^n 为平凡孤立子，即为 Einstein 流形.

注 1　当 $h = 1$ 时，定理 1 的积分条件退化为$\int_M [\mathrm{Ric}(X, X) + (n-2)\langle X, \nabla\lambda\rangle]\mathrm{d}M \leqslant 0$，即定理 1 包含文献[10] 的定理 3 作为其特殊情形.

2　预备知识及引理

设 M^n 为一个紧致定向带边的黎曼流形，∂M 为 M^n 的边界，$\boldsymbol{v}$ 为 ∂M 上指向 M^n 内部的单位法向量. 则对于 M^n 上的任意光滑向量场 X，下述积分公式成立：

$$\int_M \mathrm{div}\, X\mathrm{d}M = -\int_{\partial M} g(\boldsymbol{v}, X)\mathrm{d}\partial M$$

其中 $\mathrm{div}\, X$ 为 X 的散度，∂M 具有从 M^n 诱导的定向.

对于 M^n 上的任意光滑函数 f，其梯度向量场的散度即为 Δf. 因此据散度定理可知，对紧致无边的定向黎曼流形，有积分公式$\int_M \Delta f\mathrm{d}M = 0$ 成立.

引理 1[6]　对黎曼流形(M^n, g)上的任意光滑切向量场 X，有

$$\mathrm{div}(\mathscr{L}_X g)(X) = \frac{1}{2}\Delta|X|^2 - |\nabla X|^2 + \mathrm{Ric}(X, X) + \nabla_X \mathrm{div}\, X$$

当 X 是梯度场时，不妨设 $X = \nabla f$，$f \in C^\infty(M)$. Z 为任意光滑向量场时，有

$$\mathrm{div}(\mathscr{L}_{\nabla f} g)(X) = 2\mathrm{Ric}(Z, \nabla f) + 2\nabla_Z \mathrm{div}\,\nabla f$$

引理 2　梯度 h-近 Ricci 孤立子$(M^n, g, \nabla f, h, \lambda)$满足

$$\nabla R = 2(n-1)\nabla\lambda + 2h\cdot\mathrm{Ric}(\nabla f, \cdot) + 2\nabla^2 f(\nabla h, \cdot) - 2\Delta f\cdot\nabla h$$

其中 R 是 M^n 的数量曲率.

证　首先对(2) 式求迹，可得

$$R + h\Delta f = n\lambda \tag{3}$$

对(3) 式求协变微分，有

$$\nabla R + \Delta f\cdot\nabla h + h\nabla\Delta f = n\nabla\lambda \tag{4}$$

另外，对(2)式求散度，得到

$$\mathrm{div}\ \mathrm{Ric}+h\cdot \mathrm{div}\ \nabla^2 f+\nabla^2 f(\nabla h,\cdot)=\nabla\lambda \tag{5}$$

另有缩并的第二 Bianchi 恒等式$\nabla R=2\mathrm{div}\ \mathrm{Ric}$，于是结合(5)式可得

$$\nabla R=2\mathrm{div}\ \mathrm{Ric}=2\nabla\lambda-2h\cdot \mathrm{div}(\nabla^2 f)-2\nabla^2 f(\nabla h,\cdot)$$

再代入 Bochner 公式 $\mathrm{div}(\nabla\nabla f)=\mathrm{Ric}(\nabla f,\cdot)+\nabla\Delta f$，便有

$$\nabla R=2\nabla\lambda-2h\cdot \mathrm{Ric}(\nabla f,\cdot)-2h\nabla\Delta f-2\nabla^2 f(\nabla h,\cdot)$$

代入(4)式，得到

$$\nabla R=2\nabla\lambda-2h\cdot \mathrm{Ric}(\nabla f,\cdot)-2\nabla^2 f(\nabla h,\cdot)-2n\nabla\lambda+2\nabla R+2\Delta f\cdot\nabla h$$

即

$$\nabla R=2(n-1)\nabla\lambda+2h\cdot \mathrm{Ric}(\nabla f,\cdot)+2\nabla^2 f(\nabla h)-2\Delta f\cdot\nabla h$$

引理 2 得证.

3　主要结果的证明

定理 1 的证明　为证紧致 h-近 Ricci 孤立子为平凡的，只需证对 M^n 上的任意光滑向量场 X，有 $\mathscr{L}_X g=0$，即证对 M^n 上的任意光滑切向量场 Y,Z，有

$$(\mathscr{L}_X g)(Y,Z)=\langle\nabla_Y X,Z\rangle+\langle Y,\nabla_Z X\rangle=0$$

由于

$$\nabla_Y X=C_1^1(Y\otimes\nabla X)\qquad \nabla_Z X=C_1^1(Z\otimes\nabla X)$$

则只需证得$\nabla X=0$ 即可.

首先，对(1)式求迹，有

$$R+h\mathrm{div}\ X=n\lambda \tag{6}$$

对(6)式沿 X 的方向求协变微分，可得

$$\nabla_X R+h\cdot\nabla_X \mathrm{div}\ X+\nabla_X h\cdot \mathrm{div}\ X=n\nabla_X\lambda \tag{7}$$

又由引理 1 知

$$\mathrm{div}(\mathscr{L}_X g)(X)=\frac{1}{2}\Delta|X|^2-|\nabla X|^2+\mathrm{Ric}(X,X)+\nabla_X \mathrm{div}\ X \tag{8}$$

于是将(7)式代入(8)式中，可得

$$\mathrm{div}(\mathscr{L}_X g)(X)=\frac{1}{2}\Delta|X|^2-|\nabla X|^2+\mathrm{Ric}(X,X)+\frac{1}{h}(nX(\lambda)-X(h)\cdot \mathrm{div}\ X-X(R)) \tag{9}$$

对(1)式求散度，有

$$2\mathrm{div}\ \mathrm{Ric}+h\cdot \mathrm{div}(\mathscr{L}_X g)+(\mathscr{L}_X g)(\nabla h,\cdot)=2\nabla\lambda \tag{10}$$

从而将(10)式代入(9)式，可得

$$\begin{aligned}h|\nabla X|^2=&\frac{h}{2}\Delta|X|^2+h\cdot \mathrm{Ric}(X,X)+X(n\lambda-2\lambda-R)+2(\mathrm{div}\ \mathrm{Ric})(X)+\\&\mathscr{L}_X g(\nabla h,X)-X(h)\mathrm{div}\ X\end{aligned} \tag{11}$$

结合缩并的第二 Bianchi 恒等式$\nabla R=2\mathrm{div}\ \mathrm{Ric}$ 及(11)式，即可得到

$$|\nabla X|^2=\frac{1}{2}\Delta|X|^2+\mathrm{Ric}(X,X)+\frac{n-2}{h}\langle X,\nabla\lambda\rangle+\frac{1}{h}\mathscr{L}_X g(\nabla h,X)-X(\ln h)\mathrm{div}\ X \tag{12}$$

又由(1)式知

$$\frac{1}{h}\mathscr{L}_X g(\nabla h,X)=\frac{2\lambda}{h^2}\langle\nabla h,X\rangle-\frac{2}{h^2}\mathrm{Ric}(\nabla h,X) \tag{13}$$

将(13)式代入(12)式，可得

$$\frac{1}{2}\Delta\mid X\mid^2=\mid\nabla X\mid^2-\mathrm{Ric}\left(X,\ X-\frac{2}{h^2}\nabla h\right)-\left\langle X,\ \frac{n-2}{h}\nabla\lambda+\frac{2\lambda}{h^2}\nabla h\right\rangle+X(\ln h)\mathrm{div}\ X$$

由于 M^n 紧致，因此对上式两端在 M^n 上积分并应用散度定理，得

$$\int_M\mid\nabla X\mid^2\mathrm{d}M=\int_M\left[\mathrm{Ric}\left(X,\ X-\frac{2}{h^2}\nabla h\right)+\left\langle X,\ \frac{n-2}{h}\nabla\lambda+\frac{2\lambda}{h^2}\nabla h\right\rangle-X(\ln h)\mathrm{div}\ X\right]\mathrm{d}M$$

结合定理 1 的积分条件，得到

$$0\leqslant\int_M\mid\nabla X\mid^2\mathrm{d}M\leqslant 0$$

即 $\nabla X=0$. 进而，对 M^n 上的任意光滑切向量场 Y,Z，有

$$(\mathscr{L}_X g)(Y,\ Z)=\langle\nabla_Y X,\ Z\rangle+\langle Y,\ \nabla_Z X\rangle=0$$

即孤立子场 X 为 Killing 场. 因此，孤立子方程(1) 即为

$$\mathrm{Ric}=\lambda g$$

其中 λ 为 M^n 上的光滑函数，由 Schur 引理知 λ 为常数，从而 M^n 为 Einstein 流形. 定理 1 得证.

定理 2 的证明 不妨设孤立子场 $X=\nabla f$，其中 $f\in C^\infty(M)$. 于是，对 M^n 上的任意光滑切向量场 Y,Z，有

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_X g(Y,\ Z)=&\langle\nabla_Y X,\ Z\rangle+\langle Y,\ \nabla_Z X\rangle=\\&\langle\nabla_Y\nabla f,\ Z\rangle+\langle\nabla_Z\nabla f,\ Y\rangle=\\&2\nabla^2 f(Y,\ Z)\end{aligned}$$

由此，为证紧致梯度 h-近 Ricci 孤立子为平凡的，只需证对 M^n 上的任意光滑切向量场 Y,Z，有 $\nabla^2 f(Y,\ Z)=0$ 即可.

事实上，由(12) 式可得

$$\frac{1}{2}\Delta\mid\nabla f\mid^2=\mid\nabla^2 f\mid^2-\mathrm{Ric}(\nabla f,\ \nabla f)-\frac{n-2}{h}\langle\nabla f,\ \nabla\lambda\rangle-\frac{2\nabla^2 f(\nabla h,\ \nabla f)}{h}+\frac{\nabla f(h)\Delta f}{h}\tag{14}$$

结合引理 2 式及(14) 式，有

$$\frac{1}{2}\Delta\mid\nabla f\mid^2=\mid\nabla^2 f\mid^2+\frac{1}{2h}(2\langle\nabla\lambda,\ \nabla f\rangle-\langle\nabla R,\ \nabla f\rangle-2\nabla^2 f(\nabla h,\ \nabla f))$$

由于 M^n 紧致，因此对上式两端在 M^n 上积分，并应用散度定理，得到

$$\int_M\mid\nabla^2 f\mid^2\mathrm{d}M=-\int_M\frac{1}{2h}[2\langle\nabla\lambda,\ \nabla f\rangle-\langle\nabla R,\ \nabla f\rangle-2\nabla^2 f(\nabla h,\ \nabla f)]\mathrm{d}M$$

结合定理 2 的积分条件，得到

$$0\leqslant\int_M\mid\nabla^2 f\mid^2\mathrm{d}M\leqslant 0$$

即 $\nabla^2 f=0$，从而对 M^n 上的任意光滑切向量场 Y,Z，有

$$(\mathscr{L}_{\nabla f}g)(Y,\ Z)=2\nabla^2 f(Y,\ Z)=0$$

于是，梯度 h- 近 Ricci 孤立子方程即为

$$\mathrm{Ric}=\lambda g$$

其中 λ 为 M^n 上的光滑函数，由 Schur 引理知 λ 为常数，从而 M^n 为 Einstein 流形. 定理 2 得证.

参考文献：

[1] HAMILTON R S. Three-Manifolds with Positive Ricci Curvature [J]. Journal of Differential Geometry, 1982, 17(2): 255-306.

[2] CHOW B, LU P, NI L. Hamilton's Ricci Flow [M]. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2006.

[3] PIGOLA S, RIGOLI M, RIMOLD M, et al. Ricci Almost Solitons [J]. Annali Della Scuola Normale Superiore Di Pisa-Classe Di Scienze, 2011, 10(5): 757-799.

[4] GOMES J N, WANG Q L, XIA C Y. On The h-Almost Ricci Soliton [J]. Journal of Geometry and Physics, 2017, 114: 216-222.

[5] PIGOLA S, RIMOLDI M, SETTI A G. Remarks on Non-Compact Gradient Ricci Solitons [J]. Mathematische Zeitschrift, 2011, 268(3): 777-790.

[6] PETERSEN P, WYLIE W. Rigidity of Gradient Ricci Solitons [J]. Pacific Journal of Mathematics, 2009, 241(2): 329-345.

[7] GHAHREMANIGOL H. Some Results on h-Almost Ricci Solitons [J]. Journal of Geometry and Physics, 2019, 137: 212-216.

[8] EMINENTI M, NAVE G, MANTEGAZZA C. Ricci Solitons: The Equation Point of View [J]. Manuscripta Mathematica, 2008, 127(3): 345-367.

[9] LI F J, ZHOU J. Rigidity Characterization of Compact Ricci Solitons [J]. Journal of the Korean Mathematical Society, 2019, 56(6): 1475-1488.

[10] BARROS A, RIBEIRO E. Some Characterizations for Compact Almost Ricci Solitons [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2012, 140(3): 1033-1040.

[11] NAIK D M, VENKATESHA V. η-Ricci Solitons and Almost η-Ricci Solitons on Para-Sasakian Manifolds [J]. International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 2019, 16(9): 1950134.

The Triviality Results of Compact *h*-Almost Ricci Solitons

WEI Miao-miao, LIU Jian-cheng

School of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China

Abstract: In this paper, we study the h-almost Ricci solitons, by using the Divergence theorem and Schur theorem, we obtain the triviality results for compact h-almost Ricci solitons. In details, we prove that the compact h-almost Ricci solitons, which satisfying a appropriate integral condition are Einstein manifolds.

Key words: compact h-almost Ricci solitons; Einstein manifolds; Killing vector field

责任编辑　廖　坤