第 46 卷 第 4 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2021 年 4 月
Vol. 46 No. 4 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Apr. 2021

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2021.04.008

一个关于混合锥体积测度的子空间集中不等式①

罗 杰[1], 李 晓[2]

1. 西南大学 数学与统计学院,重庆 400715;2. 重庆师范大学 数学科学学院,重庆 401131

摘要: 子空间集中不等式是关于测度的一个重要不等式,在凸几何分析中有很多的运用. 本文研究了关于测度的子空间集中不等式,主要利用函数 $f_{K,\xi}$ 通过 Lipschitz 区域中 Lipschitz 向量场的 Gauss-Green 散度定理得到了一个关于混合锥体积测度的等式,进而通过这个等式得到了混合锥体积测度的子空间集中不等式.

关 键 词: 测度;混合锥体积测度;子空间集中不等式

中图分类号: O186.5 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5471(2021)04-0034-04

欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中具有非空内点的紧凸集称为凸体. 我们记 $\mathscr{K}^n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中所有凸体构成的集合,$\mathscr{K}_o^n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中所有以原点为内点的凸体构成的集合,$\mathscr{S}^{n-1}$ 为 $(n-1)$-维的单位球面,令 $\langle x, y\rangle$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中 x 与 y 的标准内积.

设 μ 为单位球面 $\mathscr{S}^{n-1}$ 上有限的正 Borel 测度,如果对于任意的线性子空间 $\xi \subseteq \mathbb{R}^n$,有

$$\mu(\xi \cap \mathscr{S}^{n-1}) \leqslant \frac{\dim \xi}{n}\mu(\mathscr{S}^{n-1}) \tag{1}$$

则称测度 μ 满足子空间集中不等式[1].

设 ω 为单位球面 $\mathscr{S}^{n-1}$ 上的任意 Borel 子集,则凸体 $K \in \mathscr{K}_o^n$ 的锥体积测度 V_K 定义为[2]

$$V_K(\omega) = \frac{1}{n}\int_{\omega} h_K(u)\mathrm{d}S(K, u) = \frac{1}{n}\int_{\upsilon_K^{-1}(\omega)} \langle x, \upsilon_K(x)\rangle \mathrm{d}\mathscr{H}_{n-1}(x) \tag{2}$$

其中 $h_K: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ 是凸体 K 的支撑函数,定义为

$$h_K(y) = \max\{\langle x, y\rangle : x \in K\} \qquad y \in \mathbb{R}^n \tag{3}$$

$S(K, u)$ 表示凸体 K 的经典表面积测度,$\upsilon_K: \partial' K \longrightarrow \mathscr{S}^{n-1}$ 表示 Gauss 映射,$\partial' K$ 表示边界 ∂K 中仅有一个外单位法向量的点构成的集合,$\mathscr{H}_{n-1}$ 表示 $(n-1)$-维 Hausdorff 测度.

锥体积测度具有直观的几何意义,是研究对数 Minkowski 问题的重要工具. 文献[1]证明了锥体积测度满足子空间集中不等式,关于锥体积测度的其他结论可参见文献[2-10].

文献[10]引入了混合锥体积测度:设 ω 为单位球面 $\mathscr{S}^{n-1}$ 上的任意 Borel 子集,则凸体 $K \in \mathscr{K}^n$ 和凸体 $Q \in \mathscr{K}_o^n$ 的混合锥体积测度是单位球面 $\mathscr{S}^{n-1}$ 上的 Borel 测度,定义为

$$V_{K,Q}(\omega) = \frac{1}{n}\int_{\omega} h_Q(u)\mathrm{d}S(K, u) = \frac{1}{n}\int_{\upsilon_K^{-1}(\omega)} h_Q(\upsilon_K(x))\mathrm{d}\mathscr{H}_{n-1}(x) \tag{4}$$

其中,当 $Q = K$ 时,$V_{K,Q} = V_K$.

本文主要在凸体 K,Q 都是原点对称的,且 Q 与 K 是位似的条件下,得到了凸体 K 和凸体 Q 的混合锥体积测度满足子空间集中不等式. 当 $K = Q$ 时,该结论就是文献[1]中的结论.

---

① 收稿日期:2020-07-20

基金项目:重庆师范大学基金项目(20XLB012).

作者简介:罗 杰,硕士研究生,主要从理积分几何与凸几何分析的研究.

通信作者:李 晓,博士研究生.

1　预备知识

对于凸体 $K,Q \in \mathscr{K}^n$，若存在常数 $t>0$ 与 $x_0 \in \mathbb{R}^n$，使得 $Q = x_0 + tK$，则称 Q 与 K 互为位似．$\operatorname{int}(K)$ 表示 K 的内点，∇ 表示梯度．

假设 ξ 是在 $\mathbb{R}^n$ 中的 $j\,(1 \leqslant j \leqslant n-1)$ 维子空间，$\xi^{\perp}$ 是 ξ 的正交补空间，当 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ 时，$X\,|\,\xi$ 表示 X 在 ξ 上的正交投影集．函数 $f_{K,\xi}$：$\xi \longrightarrow (0,\infty)$ 定义为[2]

$$f_{K,\xi}:\ x \longmapsto \mathscr{H}_{n-j}(K \cap (x+\xi^{\perp})) \tag{5}$$

其中，$\mathscr{H}_{n-j}$ 表示$(n-j)$-维 Hausdorff 测度．$f_{K,\xi}$ 是在 $K|\xi$ 上的 log-concave 函数并且在 $K|\xi$ 内部是正值函数．

性质 1[2]　(i) $f_{K,\xi}$ 在 $\operatorname{int}(K)\,|\,\xi$ 上是连续的，且 $f_{K,\xi}$ 在 $\operatorname{int}(K)\,|\,\xi$ 的任何紧子集上是 Lipschitz 的；

(ii) $f_{K,\xi}$ 在 $\operatorname{int}(K)\,|\,\xi$ 上几乎处处可微，也就是说，在 $\operatorname{int}(K)\,|\,\xi$ 中存在一个稠密的子集 D，且在 D 上 $\nabla f_{K,\xi}$ 存在．

引理 1[2]　设 $K \in \mathscr{K}^n$，则：

(i) $f_{K,\xi}$：$K\,|\,\xi \longrightarrow (0,\infty)$ 是上半连续的；

(ii) 若 $K \in \mathscr{K}^n_o$ 并且 $x \in K\,|\,\xi$，则 $\lim\limits_{m\to\infty} f_{K,\xi}(\mathrm{e}^{\frac{-1}{m}}x) = f_{K,\xi}(x)$．

引理 2[2]　设 $K \in \mathscr{K}^n$，则 $\int_{K|\xi} \langle \nabla f_{K,\xi}(x),\, x\rangle \mathrm{d}x$ 存在．

2　主要结果

定理 1　设 $K,Q \in \mathscr{K}^n_o$，且存在常数 $t>0$ 与 $x_0 \in \mathbb{R}^n$，使得 $Q = x_0 + tK$．若 ξ 是在 $\mathbb{R}^n$ 中的 $j\,(1 \leqslant j \leqslant n-1)$ 维子空间，$x_0' = x_0\,|\,\xi$，则

$$nV_{K,Q}(\xi \cap \mathscr{S}^{n-1}) = jV_1(K,Q) + \int_{K|\xi} \langle \nabla f_{K,\xi}(x),\, x_0' + tx\rangle \mathrm{d}\mathscr{H}_j(x)$$

证　根据支撑函数的定义可知，若 $z \in \partial K$，有

$$h_K(\upsilon_K(z)) = \langle z,\, \upsilon_K(z)\rangle$$

又因为 $Q = x_0 + tK$，所以对于任意的 $u \in \mathscr{S}^{n-1}$，有

$$h_Q(u) = \langle x_0,\, u\rangle + th_K(u)$$

设 $f(x) = f_{K,\xi}(x)$，$g(x) = x_0' + tx$，令 $F = f(x)g(x)$：$K\,|\,\xi \longrightarrow \xi$，则 F 是向量场．由性质 1(i) 可得 F 在 $\operatorname{int}(K)\,|\,\xi$ 上的任何一个紧子集上是 Lipschitz 向量场．假设 m 是正整数，则集合 $E_m = \mathrm{e}^{-\frac{1}{m}}K\,|\,\xi \subset \operatorname{int}(K)\,|\,\xi$ 是紧的 Lipschitz 区域．

文献[11-12] 给出了下面关于 Lipschitz 区域中 Lipschitz 向量场的 Gauss-Green 散度定理：

$$\int_{E_m} \operatorname{div} F(x)\mathrm{d}\mathscr{H}_j(x) = \int_{\partial E_m} \langle F(x),\, \mu_{E_m}(x)\rangle \mathrm{d}\mathscr{H}_{j-1}(x) \tag{6}$$

当 $y \in \partial(K\,|\,\xi)$ 时，可得 $\upsilon_{K|\xi}(y) = \upsilon_{E_m}(\mathrm{e}^{-\frac{1}{m}}y)$，则

$$\int_{\partial E_m} \langle F(x),\, \upsilon_{E_m}(x)\rangle \mathrm{d}\mathscr{H}_{j-1}(x) = \mathrm{e}^{-\frac{j-1}{m}} \int_{\partial(K|\xi)} \langle F(\mathrm{e}^{-\frac{1}{m}}y),\, \upsilon_{K|\xi}(y)\rangle \mathrm{d}\mathscr{H}_{j-1}(y) =$$

$$\mathrm{e}^{-\frac{j-1}{m}} \int_{\partial(K|\xi)} f(\mathrm{e}^{-\frac{1}{m}}y)\langle g(\mathrm{e}^{-\frac{1}{m}}y),\, \upsilon_{K|\xi}(y)\rangle \mathrm{d}\mathscr{H}_{j-1}(y)$$

由引理 1(ii) 和 Lebesgue 控制收敛定理，有

$$\lim_{m\to\infty} \int_{\partial E_m} \langle F(x),\, \upsilon_{E_m}(x)\rangle \mathrm{d}\mathscr{H}_{j-1}(x) = \int_{\partial(K|\xi)} f(y)\langle g(y),\, \upsilon_{K|\xi}(y)\rangle \mathrm{d}\mathscr{H}_{j-1}(y) \tag{7}$$

为了计算(7) 式，假设 $M = \partial K \cap (\xi^{\perp} + \partial(K\,|\,\xi))$，则 $\partial' K \cap M$ 与 $\upsilon_K^{-1}(\xi \cap \mathscr{S}^{n-1})$ 上点的集合是一致的．若 $z \in \partial' K \cap M$，则 $\upsilon_{K|\xi}(z\,|\,\xi) = \upsilon_K(z)$．因此

$$\lim_{m\to\infty} \int_{\partial E_m} \langle F(x),\, \upsilon_{E_m}(x)\rangle \mathrm{d}\mathscr{H}_{j-1}(x) = \int_{\partial(K|\xi)} f(y)\langle x_0' + ty,\, \upsilon_{K|\xi}(y)\rangle \mathrm{d}\mathscr{H}_{j-1}(y) =$$

$$\int_{\partial(K|\xi)} \langle x_0 + tz, \upsilon_K(z)\rangle \mathrm{d}\mathscr{H}_{n-1}(z) = nV_{K,Q}(\xi \cap \mathscr{S}^{n-1})$$

如果 $\nabla f(x)$ 在 $x \in \mathrm{int}(K)|\xi$ 上存在，则

$$\mathrm{div}\, F(x) = tjf(x) + \langle x_0' + tx, \nabla f(x)\rangle \tag{8}$$

根据性质 1(ii)，我们有

$$\int_{E_m} \mathrm{div}\, F(x)\mathrm{d}\mathscr{H}_j(x) = tj\int_{E_m} f(x)\mathrm{d}\mathscr{H}_j(x) + \int_{E_m} \langle x_0' + tx, \nabla f(x)\rangle \mathrm{d}\mathscr{H}_j(x) \tag{9}$$

因为$\int_{K|\xi} f(x)\mathrm{d}\mathscr{H}_j(x) = V(K)$，故 $t\int_{K|\xi} f(x)\mathrm{d}\mathscr{H}_j(x) = V_1(K, Q)$. 通过引理 2，我们有

$$\lim_{m\to\infty}\int_{E_m} \mathrm{div}\, F(x)\mathrm{d}\mathscr{H}_j(x) = jV_1(K, Q) + \int_{K|\xi} \langle x_0' + tx, \nabla f(x)\rangle \mathrm{d}\mathscr{H}_j(x) \tag{10}$$

结合(6),(9),(10) 式，定理 1 得证.

定理 2　设 $K, Q \in \mathscr{K}_o^n$，K 关于原点对称，且 Q 与 K 是位似的，则混合锥体积测度(4) 满足子空间集中不等式.

证　因为 Q 与 K 是位似的，所以存在常数 $t > 0$ 与 $x_0 \in \mathbb{R}^n$，使得 $Q = x_0 + tK$. 设 ξ 是在 $\mathbb{R}^n$ 中的 j $(1 \leqslant j \leqslant n-1)$ 维子空间，$x_0' = x_0|\xi$.

设 $f(x) = f_{K,\xi}(x)$，因为 K 是原点对称的凸体，由 Brunn-Minkowski 不等式可得函数 $f(x)$ 在原点达到最大值[2]. 若对于每一个 $x \in \mathrm{int}(K)|\xi$，都有 $\nabla f(x)$ 存在，则

$$\langle \nabla f(x), x\rangle \leqslant f(x)(\ln f(x) - \ln f(0)) \leqslant 0$$

因此

$$\int_{K|\xi} \langle tx, \nabla f(x)\rangle \mathrm{d}\mathscr{H}_j(x) \leqslant 0$$

因为 K 是一个原点对称的凸体，故 $f(x)$ 是偶函数.

假设

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$$

则

$$\langle x_0', \nabla f(x)\rangle = a_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + a_j\frac{\partial f}{\partial x_j}$$

因此每一个不为 0 的部分 $a_i\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(i = 1, 2, \cdots, j)$ 关于 x_i 是奇函数.

又因 $K|\xi$ 在子空间 ξ 中是一个对称的区域，所以

$$\int_{K|\xi} \langle x_0', \nabla f(x)\rangle \mathrm{d}\mathscr{H}_j(x) = 0$$

故可得

$$\int_{K|\xi} \langle x_0' + tx, \nabla f(x)\rangle \mathrm{d}\mathscr{H}_j(x) \leqslant 0$$

结合定理 1 和性质 1 可得

$$V_{K,Q}(\xi \cap \mathscr{S}^{n-1}) = \frac{j}{n}V_1(K, Q) + \frac{1}{n}\int_{K|\xi} \langle x_0' + tx, \nabla f_{K,\xi}(x)\rangle \mathrm{d}\mathscr{H}_j(x) \leqslant \frac{j}{n}V_1(K, Q)$$

参考文献：

[1]　BÖRÖCZKY K J, LUTWAK E, YANG D, et al. The Logarithmic Minkowski Problem [J]. J Amer Math Soc, 2013, 26(3): 831-852.

[2]　BÖRÖCZKY K J, HENK M. Cone-Volume Measure of General Centered Convex Bodies [J]. Adv Math, 2016, 286:

703-721.

[3] BÖRÖCZKY K J, LUTWAK E, YANG D, et al. The Log-Brunn-Minkowski Inequality [J]. Adv Math, 2012, 231(3-4): 1974-1997.

[4] BÖRÖCZKY K J, LUTWAK E, YANG D, et al. Affine Images of Isotropic Measures [J]. J Differ Geom, 2015, 99(3): 407-442.

[5] HU J Q, XIONG G. The Logarithmic John Ellipsoid [J]. Gemo Dedic, 2018, 197(1): 33-48.

[6] HENK M, LINKE E. Cone-Volume Measures of Polytopes [J]. Adv Math, 2014, 253: 50-62.

[7] BÖRÖCZKY K J, HENK M. Cone-Volume Measure and Stability [J]. Adv Math, 2017, 306: 24-50.

[8] LUTWAK E, YANG D, ZHANG G Y. L_p John Ellipsoids [J]. Proc Lond Math Soc, 2005, 90(2): 497-520.

[9] SONG J L. A Sharp Dual L_p John Ellipsoid Problem for $p \leqslant -n-1$ [J]. Beitr Algebra Geom, 2019, 60: 709-732.

[10] HU J Q, XIONG G. A New Affine Invariant Geometric Functional for Polytopes and Its Associated Affine Isoperimetric Inequalities [J]. Int Math Res, 2019, 2019: 1-19.

[11] FLEISCHER I. The Divergence Theorem and Sets of Finite Perimeter [M]. Boca Raton: CRC Press, 2012.

[12] GUSEYNOU Y. Integrable Boundaries and Fractals for Hölder Classes; the Gauss-Green Theorem [J]. Calculus of Variations, 2016, 55: 103.

A Subspace Concentration Inequality about the Mixed Cone-Volume Measure

LUO　Jie[1],　LI　Xiao[2]

1. School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China;

2. School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401131, China

Abstract: The subspace concentration inequality is an important inequality about measure, which is used in many convex geometric analysis. In this paper, we investigate the subspace concentration inequalities about measures. We mainly using the function $f_{K,\xi}$ obtain a equation about the mixed cone-volume measure by the Gauss-Green divergence theorem of the Lipschitz vector field in the region Lipschitz, then from this equation we get the subspace concentration inequality about the mixed cone-volume measure.

Key words: measure; the mixed cone-volume measure; subspace concentration inequality

责任编辑　廖　坤