

空间解析几何课程改革的探索^①

徐文学, 姚纯青

西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715

摘要: 空间解析几何是数学学科的专业基础课程, 为后续的高等几何、微分几何及多元函数微积分等课程的学习奠定了基础, 且已被广泛应用于物理学、天文学等其他自然学科中。但现行该课程的教材内容、课程设置、课堂成效、师范生的师范性等方面都存在不足之处。本文探究了以上问题形成的原因, 并从教材思想现代化, 融解析几何与高等几何教材为一体, 增加附录等方面进行教材建设; 用动态演示辅助教学, 改进教学方式; 从教材及教学方式方面加强师范生的师范性; 从激发学生学习兴趣等方面给出该课程的改进建议与策略。

关键词: 空间解析几何; 高等几何; 教学改革; 摆线

中图分类号: G642.0

文献标志码: A

文章编号: 1000-5471(2021)04-0167-05

空间解析几何不但是数学学科的一门专业基础课程, 而且是理工科课程的一个基本工具, 其主要思想是利用向量代数方法研究几何问题。这门课程的学习有助于培养学生的空间想象能力, 并为高维数学问题提供形象的几何模型, 且为数学学科后续的高等几何、微分几何等几何类课程和多元函数积分学等分析类课程奠定基础。空间解析几何已被广泛应用在物理力学、天文学轨道计算等其他自然科学中。

空间解析几何课程在大多数院校被认定为与数学分析、高等代数并重的 3 门数学类基础核心课程之一, 且开设于大一新生课程的第一学期。这门课程掌握的好坏关系到学生后续课程的学习质量甚至影响对数学的学习兴趣。该门课程不同于与之并行开课的数学分析与高等代数那样注重逻辑推理与抽象思维能力, 而是更加注重借助图形展示几何问题的直观性与形象化, 这是与中学平面解析几何内容一脉相承的, 对于刚入大学的学生来说, 这门课程更具有亲近感。虽然从表面上看, 大学所学内容基本上是从平面几何过渡到空间的情形, 但毫无疑问, 无论从内容上还是思想方法上, 该课程都较中学所学有较大提升。所以, 无论从宏观上的教材选取、课程设置, 还是细化到每一堂课的教学设计, 每一知识点的讲解都对学生学好空间解析几何起着关键作用。

近年来, 教师借助于信息技术的发展更新教学方法与手段, 使得教学效果与学生学习兴趣均有所提升, 但仍存在诸多不足之处, 如教材内容重学术而不重教育, 课程设置不合理, 师范教育针对性不强, 有些课堂效率低下, 学生学习兴趣不强等。针对这些问题, 基于长期的空间解析几何教学工作和相关教学研究, 本文从教材、教学方式、师范性、激发学生学习兴趣等方面进行探究, 希望找到问题形成的根源并给出一些改进建议和策略。

1 教材建设

1.1 教材思想现代化

现代数学建立在集合论思想和公理化方法之上, 而几何则是在此基础上进一步重视几何变换, 利用映射和变换群等现代数学方法展开研究, 尤其是菲利克斯·克莱因于 1872 年发表的深具影响的“爱尔兰根纲

① 收稿日期: 2020-04-28

基金项目: 西南大学专业核心课程建设项目(5240100932)。

作者简介: 徐文学, 副教授, 博士, 主要从事积分几何和凸几何分析的研究。

领”。但百年之后知识快速增长的今天,国内大多数解析几何教材依然没有体现几何现代化思想,这是不科学的。目前多数高校使用的解析几何教材中没有强调集合等有关符号、映射等有关概念,没有变换有关内容,没有体现集合论思想、公理化方法等现代数学思想,这不但与其后续的高等几何、微分几何课程所采纳的思想体系严重脱节,甚至与中学教材脱节。

向量被广泛应用于数学、物理等学科,是研究解析几何最有力的工具。解析几何教材应该始终贯穿在以向量代数研究几何问题为核心的任务中,目的是让学生熟练掌握该工具,并能以此求各种曲线、曲面的方程。但现行的大部分教材并非如此。大部分教材首先引进空间向量及其运算,之后利用向量工具求一般曲线、曲面的方程。但在直线、平面及其位置关系的章节中只是用向量的方法引入直线或平面的向量式参数方程,继而转化为坐标表示,并以此解决大量例题及习题,而在常见的二次曲面的章节没有导出柱面、锥面及旋转曲面等常见二次曲面的向量方程,没有用向量的方法研究它们的几何性质,没有突出向量代数在解决几何问题时的优越性和核心作用。

对于以上问题,我们可以利用集合论思想及公理化方法引入向量空间的概念,给出向量的线性运算,即向量的加法与数乘,再由映射或变换群定义向量的内积、外积、混合积及双重向量积等基本概念,进而研究它们的性质,最后再介绍向量的坐标表示及各种运算对应的坐标形式。对于曲线和曲面,我们可以和微分几何课程一致,由映射定义,比如空间曲线可以定义为闭区间到空间向量的映射。研究直线、平面时可以利用映射或变换群引入,而研究柱面、锥面及旋转曲面时应建立它们的向量式参数方程,并在例题、习题中强化其向量方程的核心作用。在介绍椭球面、双曲面及抛物面等二次曲面时,应该先简要介绍其向量方程。

1.2 融解析几何与高等几何教材为一体

解析几何作为几何研究的入门课程,与高等代数、数学分析课程在 大一第一学期同时开课。高等代数课程设置为 2 个学期,数学分析课程设置为 3 个学期,而解析几何则为 1 个学期,这与课程的重要性不相称,可能误导学生认为几何在数学中不重要,处于从属地位。加之从学生的知识背景来看,解析几何比高等代数、数学分析易于入门,以致学生误以为几何简单易学,这种误解在学生中广泛存在,从研究生报考的分布规律也可见一斑。对此,考虑到后续开设的研究射影几何与几何学基础的高等几何课程与解析几何课程,无论是研究内容(如二次曲线及二次曲面理论)还是研究思想方法(如解析法与变换群思想)等均有诸多共同点,故若选用将两者融为一体的教材,并将课程设置为 2 个学期,这样既不用重复讲解许多解析几何与高等几何中的重复内容或相似相通问题,又能凸显几何在数学中的重要性,也为长远发展几何分支储备潜在力量。

1.3 教材增加附录

对空间解析几何教材,由于内容繁多且学时有限,教材中不能穷尽所有知识点及相关的重要内容,因而大部分重要的概念仅仅是点到为止,更没介绍其重要意义及发展动机,这样难免造成学生对这些重要知识理不清脉络,从而失去学习兴趣。

对此,笔者认为在教材篇幅有限的情况下,我们可以考虑在每一节或每一章后,甚至全书后增加附录介绍解析几何的发展起源、形成过程及对几何乃至数学发展的重要影响,并介绍一些重要的概念与著名的曲线及曲面的研究背景、影响等。如我们可以在介绍轨迹与方程的章节以例题或习题的形式给出著名的箕舌线、维维安尼曲线、圆的渐伸线、摆线等概念,并在附录里详细介绍其发展历程及意义。如摆线,这是由科学家伽利略命名,且被牛顿、莱布尼兹、约翰·伯努利、笛卡尔、费马、伽利略、帕斯卡等研究的著名曲线,是数学中著名的最速降线问题与等时降落问题的解,它导致现代变分学的诞生,并在粮食仓储物流、钟表设计等问题,以及物理学、天文学等方面有广泛的应用^[1-2]。另外,我们还可以介绍解析几何发展中的一些曲折,它的实际发展并不像精雕细琢的教材中展示的一帆风顺,而是经过艰难而漫长的探索过程,甚至建立在多次失败尝试的基础上。

增加附录既不会影响正常教学活动,还能对学生产生很多良性影响。首先,附录内容能给学生留下深刻的印象,如果教师在课堂上穿插一些附录内容,能很好地活跃课堂气氛,激发学生的学习兴趣,又有效提高了教学效率;其次,在附录中渗透学科发展史,能丰富学生的数学文化,培养数学素养,提升数学视野,对以后进一步深造的同学起到很好的引导作用;此外,对发展史中失败探索的介绍能有效提升学生学习数学的自信心。

2 教学方式改革

随着信息技术的快速发展, 大部分教师已能在传统教学的基础上辅以丰富多彩的多媒体技术, 采取灵活多样的教学法^[3-9]. 但空间解析几何中有大量的空间几何图形让学生难以想象, 比如维维安尼曲线、马鞍面等. 即使教材中已严谨地证明了马鞍面是直纹面, 但很多同学仍然难以想象弯曲的马鞍面为何能由一族直线生成, 这仅靠严密的逻辑推理是不够的. 因而如何形象直观地给学生展现复杂几何图形的空间形状与相对位置往往是决定教师解析几何课堂成败的关键. 利用动态图形生动形象地演示空间复杂图形的生成过程是解决这些问题行之有效的方法, 尤其对于如何生成摆线、螺旋线等曲线, 以及用平行截割法研究的椭球面、双曲面、抛物面等二次曲面的演示往往能提高课堂效果.

例 在直角坐标系中马鞍面的标准方程为^[10]

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

其中 a, b 为任意的正常数.

在利用平行截割法逐步推出马鞍面的复杂图形之后, 为了进一步让学生直观地明确马鞍面的图形结构, 教师可以利用课件演示图形的动态生成过程.

首先, 在课件中展示马鞍面的两条主截线, 其方程为

$$\begin{cases} y^2 = -2b^2z \\ x = 0 \end{cases} \tag{1}$$

与

$$\begin{cases} x^2 = 2a^2z \\ y = 0 \end{cases} \tag{2}$$

这两条主截线分别是: (1) 为过原点的开口沿 z 轴负向的在 yoz 平面的抛物线, (2) 为过原点的开口沿 z 轴正向的在 xoz 平面的抛物线. 如图 1(a) 所示, 它们是具有相同顶点(坐标原点 o) 与对称轴(z 轴), 开口方向相反的抛物线. 为了增强空间立体感及直观性, 图 1 中增加了马鞍面与平面 $z = h$ (h 为常数) 的交线, 该线为中心在 z 轴上, 顶点在主截线(2) 上, 且所在平面平行于 xoy 平面的双曲线, 同时增加了与主截线(2) 全等的, 顶点在(1) 上, 且所在平面平行于 xoz 平面的左右两条抛物线.

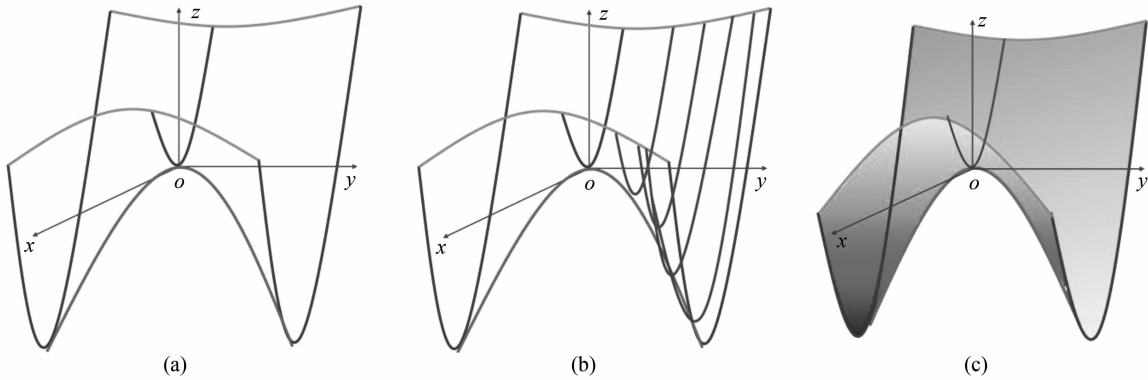


图 1 马鞍面生成图

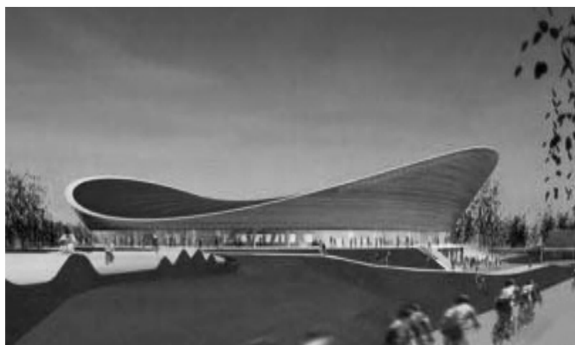
其次, 让抛物线(2) 的顶点在(1) 上平行滑动, 在此过程中保留(2) 的轨迹, 便得到图 1(b). 最后, 让抛物线(2) 在(1) 上从左至右连续滑动, 其轨迹便呈现出完整的马鞍面图形, 如图 1(c). 这样动态生成的马鞍面图形必定能令同学们清楚原理且印象深刻, 而现在已有 Matlab、Geogebra、几何画板等诸多软件实现 3D 动图^[11]. 此外, 我们可以给学生展示马鞍面在现实生活中的诸多应用以加深学生对马鞍面的进一步了解及印象. 如利用其设计的薯片(图 2(a)) 与 2012 年伦敦奥运自行车馆(图 2(b))、加拿大丰业银行马鞍体育馆、帕尔米拉教堂、霍奇米洛克餐厅等建筑设计, 这样的设计不但异常坚固, 而且非常节约材料.

在长期的教学中, 我们感受到利用 3D 动画演示辅助空间解析几何教学能很好地弥补学生空间想象力

的不足. 通过这种方式, 让学生对复杂的空间图形一目了然, 提高了学生对解析几何的认知能力及分析问题的能力. 如果持续将这种教学方式贯穿于整个学期的教学中, 学生的理解能力与接受能力将明显增强.



(a) 薯片



(b) 2012伦敦奥运自行车馆

图 2 薯片与 2012 伦敦奥运自行车馆

3 空间解析几何的师范性

大学中的师范生教育是培养中学优质师资队伍的主要渠道与载体, 对社会师资队伍的建设与发展起着举足轻重的作用^[12]. 为提高师范生的能力, 我们必须积极探索针对师范生的教材改革与教学方法改革.

3.1 教材的师范性

目前, 还没有专门针对师范生的解析几何教材, 师范生和非师范生都共用同样的教材, 这对师范生来说是不够合理的. 因为师范生除了要掌握解析几何课程本身的知识外, 还亟需加强与中学几何之间的联系, 才能在以后中学教书期间做到在空间解析几何的高观点下传授中学几何内容, 这也是国家师范生培养目标之一. 因而, 针对师范生的解析几何教材需要加强以下方面: 其一, 必须重视轨迹方程, 它是整个解析几何的核心. 教材中应加强如何通过向量代数法得到曲线及曲面的轨迹方程的讲解. 求轨迹方程也是高考中的一个热点和重点, 常以压轴题形式出现, 掌握轨迹方程的师范生在以后的工作中可以从容应对该类题型. 其二, 注重培养学生在以变化群(正交变换群)的高观点下重新审视和理解中学涉及点变换与坐标变换的平面解析几何内容的能力, 这样学生能充分明了欧氏几何研究的内容及在“爱尔兰根纲领”的思想下与其他几何之间的区别与联系, 且加深对中学几何教材的理解, 推进中学教材几何部分向更高层次的改革. 其三, 教材中增加向量法在中学几何中的应用, 尤其是对于比较复杂的平面几何问题, 能有效避免繁杂的代数与三角运算. 此外, 与传统的几何方法相比, 向量法还能大大简化某些复杂立体几何题的难度, 因为向量法不需要挖空心思地作辅助线, 只需建立坐标系后进行计算. 如利用向量的向量积运算、混合积运算很容易算出中学难以得到的某些空间三角形的面积及三棱锥的体积.

3.2 教学方法的师范性

大学阶段的空间解析几何是中学阶段平面解析几何的推广和深化, 它们在知识结构与体系上是一脉相承的. 有些老师在讲授空间解析几何时只讲空间的部分, 而忽视了与平面部分的联系, 把空间与平面部分相互独立起来, 这对于以后从事中学教育的师范生来说是不合适的. 因而, 在讲授解析几何时, 首先, 应该在课堂上明确空间解析几何与中学平面解析几何之间的关系, 平面解析几何是基础, 空间解析几何是其从内容到方法、思想上推广的产物, 这样能有效地提升学生看待几何问题的眼界, 从空间解析几何更高的观点来重新审视平面解析几何; 其次, 解析几何不单单是逻辑推理, 更渗透了丰富的形象思维, 能有效地培养学生的逻辑推理能力与空间想象能力, 这为师范生以后进行出色的几何教学工作提供了保障.

4 激发学生学习兴趣

激发学生的学习兴趣是一个老生常谈的问题, 但不可否认的是, 如能激发学生对数学的兴趣必会有效激发学生对数学强烈的好奇心和求知欲, 将大大提高学生的学习效果与教师的课堂成效. 这要求教师因材施教, 改进课堂讲授方式, 这方面已有诸多研究, 比如把学科发展史穿插于课堂教学中, 能有效活跃课堂气氛, 增加学生对数学的了解, 进一步激发其学习兴趣.

但激发兴趣不但体现于课堂之内,也同样体现于课堂之外. 首先,我们可以开设针对本科生的解析几何系列专题讲座,让学生拓展课本中的知识,了解目前该领域的前沿研究动态,这样能开阔学生视野,增强对数学的兴趣. 其次,可以在老师的指导下,鼓励学生进行学术研究,撰写小论文. 在此过程中,学生需要查阅大量的文献书籍,主动地将已有的知识与实际问题相联系去解决问题,因此学生能快速、及时、有效地变被动学习为研究性学习,这是一种有益的尝试与锻炼,能使学生的学研能力得到快速提高. 此外,还可以举办各种形式的竞赛,如空间解析几何知识竞赛,学生必然会全面深入地了解该学科的知识与思想,以这种方式鼓励学生积极进取、战胜懈怠,促进学生学习的积极性.

5 总 结

空间解析几何是数学学科的专业基础课程,它为后续的高等几何、微分几何及多元函数微积分课程的学习奠定了基础. 但现行该课程的教材内容、课程设置、课堂成效、师范生的师范性等方面都存在不足之处. 本文从教材建设、教学方式、师范性、激发学生学习兴趣等方面探究了以上问题形成的原因,并给出该课程的改进建议与策略.

参考文献:

[1] 张世清. 泛函分析及其应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2019.

[2] 吕林根, 许子道. 解析几何 [M]. 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2019.

[3] 徐文学, 夏云伟. 高等几何中启发式教学的探讨 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2017, 42(4): 142-145.

[4] 李 玲. 谈《空间解析几何》课程的教学改革与实践 [J]. 重庆邮电大学学报(自然科学版), 2008, 20(S1): 80-81, 111.

[5] 李雪珊. 兴趣教学法在组合数学课程中的应用 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2016, 41(12): 167-170.

[6] 裴 俊, 乔 丽. 高等代数课程中问题驱动式教学法 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2016, 41(12): 171-175.

[7] 吕 晶. 研究型教学在实用回归分析课程中的应用 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2020, 45(2): 137-142.

[8] 张俊忠. 发生教学法在矩阵运算教学中的应用 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2020, 45(10): 135-140.

[9] 张 伟. 基于翻转课堂的大学生自主学习能力培养模式设计 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2020, 45(8): 125-130.

[10] 丘维声. 解析几何 [M]. 3 版. 北京: 北京大学出版社, 2015.

[11] 度 巍. 空间解析几何中二次曲面截痕法的动画演示 [J]. 电脑知识与技术, 2011, 7(25): 6297-6301.

[12] 张 艺. 探究大学中师范生课堂教学方法的改革 [J]. 中国科技博览, 2013(25): 504-506.

On Reform of Space Analytic Geometry Course

XU Wen-xue, YAO Chun-qing

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: Space analytic geometry is a profession basic course in higher mathematical education, and it is the foundational of the advanced geometry, differential geometry and multivariate calculus, and it has been widely used in physics, astronomy and other natural sciences. However, there are some deficiencies in the teaching material, curriculum design, classroom effectiveness, teacher-training character and so on. In this paper, the causes of the above problems have been discussed and some suggestions and strategies been give to reform this course from teaching material construction of modernization of teaching materials, combination of the teaching materials of space analytic geometry and advanced geometry into one, addition appendix, and by dynamic demonstration to assist the teaching method, improving the education of teacher-training students from teaching materials and teaching methods, stimulating student's interest and so on.

Key words: space analytic geometry; advanced geometry; curriculum reform; cycloid