DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2021.04.028

# 关于伴随矩阵的混合式教学设计①

闻道君， 曾 静， 王鹏富

重庆工商大学 数学与统计学院，重庆 400067

**摘要：** 基于大类招生和混合教学模式改革，从大类招生的系统化教学目标、分流培养的层次化教学重点、在线开放的模块化教学内容和引导创新思维的流程化教学组织4个方面完成了关于伴随矩阵的混合式教学设计. 利用线上和线下的深度融合搭建了关于伴随矩阵的概念、基本定理、重要性质和应用拓展的知识链，探索出一条“夯实数学基础-引入数学实验-拓展数学应用-引导数学创新”的大学数学课程教学设计和混合教学模式改革的有效途径，有利于经济、管理和理工各大类专业本科人才创新能力培养目标的实现.

**关 键 词：** 伴随矩阵；矩阵的秩；教学设计；混合式教学；大类招生

**中图分类号：** G642.0；O153 **文献标志码：** A **文章编号：** 1000-5471(2021)04-0172-06

近年来，教育部出台《教育信息化2.0行动计划》等系列文件，明确要求高等学校开展各类在线开放课程资源建设，推动现代信息技术与教育教学的深度融合，切实推进教育理念、教学内容和教学方法的深度变革，积极探索混合教学模式，不断提高人才培养质量[1-2]. 高等学校大类招生体制改革呼之欲出，线性代数是覆盖经济、管理和理工类各本科专业的大学数学基础课程，如何适应新的人才培养方案，进一步优化课程教学设计和改革教学模式引起了广大教师的密切关注[3-9]. 在教学实践中，通常是为了介绍逆矩阵的基本解法而引入伴随矩阵的概念，却在初等矩阵之后用初等变换法简化了逆矩阵的求解. 伴随矩阵作为一种特殊的工具神秘登场，却又迅速退出了同学们的学习视野，留下无尽的疑惑[10-12]. 本文将基于大类招生的视角，以线上、线下混合课程的形式进一步完善伴随矩阵的知识体系，探索基于创新能力培养的大学数学课程教学设计和教学改革的新路径.

## 1 基于大类招生的系统化教学目标

在高等学校大类招生的体制下，将线性代数课程的知识目标、能力目标和情感目标适当分解，并在整体结构上进行系统化. 下面，我们以伴随矩阵为例进行说明：

知识目标：了解学习伴随矩阵的目的，理解伴随矩阵的概念和基本定理，理解伴随矩阵的系列性质.

能力目标：熟练掌握用伴随矩阵求逆矩阵的方法，掌握伴随矩阵运算性质的证明，学会用Matlab求伴随矩阵.

情感目标：思考伴随矩阵各个性质之间的联系，尝试运用伴随矩的阵理论分析并解决线性方程组、矩阵特征值和专业领域的应用模型.

---

① 收稿日期：2020-04-20

基金项目：重庆市高等教育教学改革研究项目(193141)；高等学校大学数学教学研究与发展中心教学改革项目(CMC20190410).

作者简介：闻道君，教授，硕士，主要从事不动点理论和大学数学教学的研究.

## 2　适应分流培养的层次化教学重点

高等学校大类招生必然会导致专业人才的分流培养，在分流之前开设的大类基础课程线性代数需要预设层次化的教学重点，确保完成教学大纲的基本要求，实现人才培养方案的分流目标，并能引导优秀学生脱颖而出．层次化教学的重点包括：

基础训练：了解伴随矩阵的概念和基本定理，利用伴随矩阵求逆矩阵．

综合应用：掌握伴随矩阵运算性质的证明和应用，数学实验(Matlab)．

能力提升：了解伴随矩阵的秩及其与线性方程组和特征值等问题的联系．

## 3　体现在线开放的模块化教学内容

在线开放课程将知识点进行碎片化，并以短视频的形式呈现，容易导致学生知识建构的系统性不足．模块化的教学设计能够形成关于伴随矩阵的概念、定理、性质和应用的知识链，促进系统化教学目标的实现．

### 3.1　模块一：伴随矩阵的概念和基本定理

**定义 1**　已知矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，记 $A_{ij}$ 是行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 中元素 $a_{ij}$ 的代数余子式，则称矩阵

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，记为 $\boldsymbol{A}^*$．

利用矩阵乘法和行列式的性质，不难验证 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$. 同时，进一步可得关于伴随矩阵的基本定理 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$ 和 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$（见文献[10]的定理 2.1）．

**例 1**　已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$，求逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$．

**解**　因为 $|\boldsymbol{A}|=2\neq 0$，所以 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

**例 2**　已知 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|=\dfrac{1}{2}$，求 $|(3\boldsymbol{A})^{-1}-2\boldsymbol{A}^*|$.

**解**　利用结论 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$ 可得 $\boldsymbol{A}^{-1}=2\boldsymbol{A}^*$，则

$$|(3\boldsymbol{A})^{-1}-2\boldsymbol{A}^*|=\left|\frac{1}{3}\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}\right|=\left|-\frac{2}{3}\boldsymbol{A}^{-1}\right|=-\frac{16}{27}$$

### 3.2　模块二：伴随矩阵的运算性质

**性质 1**　设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，则 $(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*$.

**证**　因为 $\boldsymbol{A}_{ij}=(-1)^{i+j}\boldsymbol{M}_{ij}$，且行列式等于其转置，所以

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{i1} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1i} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{ni} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{in} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\qquad (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1i} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{i1} & \cdots & A_{ii} & \cdots & A_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{ni} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

显然，$(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*$.

**性质 2** 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^*$.

**证** 因为 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆. 由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，可得 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$，则

$$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}$$

又因为 $(\boldsymbol{A}^{-1})^*=|\boldsymbol{A}^{-1}|(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}$，因此 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^*$.

**性质 3** 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则 $[(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}]^{-1}=[(\boldsymbol{A}^*)^{-1}]^{\mathrm{T}}=[(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}]^*$.

**证** 因为 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆，结合逆矩阵和转置的性质得

$$[(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}]^{-1}=[(\boldsymbol{A}^*)^{-1}]^{\mathrm{T}}$$

利用性质 2 和性质 1，可得 $[(\boldsymbol{A}^*)^{-1}]^{\mathrm{T}}=[(\boldsymbol{A}^{-1})^*]^{\mathrm{T}}=[(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}]^*$. 因此，结论成立.

**例 3** 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&3&4\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，求 $[(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}]^{-1}$.

**解** 不难验证 $|\boldsymbol{A}|=-2$，由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 得 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}=-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{A}$，所以

$$[(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}]^{-1}=[(\boldsymbol{A}^*)^{-1}]^{\mathrm{T}}=\left(\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}\right)^{\mathrm{T}}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&0&0\\0&-\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\\0&-1&-2\end{pmatrix}$$

**性质 4** 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则 $(k\boldsymbol{A})^*=k^{n-1}\boldsymbol{A}^*\ (k\neq 0)$.

**证** 因为 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆. 由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，可得 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$，故

$$(k\boldsymbol{A})^*=|k\boldsymbol{A}|(k\boldsymbol{A})^{-1}=k^n|\boldsymbol{A}|\cdot\frac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}=k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$$

**性质 5** 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 $n$ 阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，$|\boldsymbol{B}|\neq 0$，则 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^*=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$.

**证** 因为 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，$|\boldsymbol{B}|\neq 0$，所以 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可逆. 由基本定理 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$ 得

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^*$$

又因为 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$，所以

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^*=|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|\cdot(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1}=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}=|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1}\cdot|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$$

**性质 6** 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则 $(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$.

**证** 因为 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆. 由基本结论 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$ 和 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$ 得

$$(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}^*|(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=|\boldsymbol{A}|^{n-1}\cdot(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$$

**例 4** 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶非零矩阵，如果伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，证明 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵.

**证** 记 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，由 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 和伴随矩阵的定义得 $A_{ij}=a_{ij}$. 利用行列式的展开定理得

$$|\boldsymbol{A}|=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2\qquad i=1,2,\cdots,n$$

又因为 $\boldsymbol{A}$ 为非零矩阵，所以至少存在一个元素 $a_{ij}\neq 0$. 因此 $|\boldsymbol{A}|=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}^2\neq 0$，即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

### 3.3 模块三：伴随矩阵的综合应用

**性质 7** 设 $\boldsymbol{A}^*$ 是 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则秩 $r(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases}n & r(\boldsymbol{A})=n\\1 & r(\boldsymbol{A})=n-1\\0 & r(\boldsymbol{A})<n-1\end{cases}$.

**证**　若 $r(\boldsymbol{A})=n$，则 $\boldsymbol{A}$ 可逆，即 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$. 由于 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}\neq 0$，即 $\boldsymbol{A}^*$ 为可逆矩阵，故 $r(\boldsymbol{A}^*)=n$.

若 $r(\boldsymbol{A})=n-1$，即 $\boldsymbol{A}$ 中存在 $n-1$ 阶非零子式，且 $|\boldsymbol{A}|=0$. 不妨设 $\boldsymbol{A}^*$ 中存在某个元素 $A_{ij}\neq 0$，故 $r(\boldsymbol{A}^*)\geqslant 1$. 记 $\boldsymbol{A}^*=(\boldsymbol{\alpha}_1',\boldsymbol{\alpha}_2',\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n')$，由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$ 得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1',\boldsymbol{\alpha}_2',\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n')=(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\cdots,\boldsymbol{0})$$

故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_i'=\boldsymbol{0}$，其中 $i=1,2,\cdots,n$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1',\boldsymbol{\alpha}_2',\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n'$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解. 因为 $r(\boldsymbol{A})=n-1$，所以 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中仅含一个向量，所以 $r(\boldsymbol{A}^*)=r(\boldsymbol{\alpha}_1',\boldsymbol{\alpha}_2',\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n')\leqslant 1$. 因此，$r(\boldsymbol{A}^*)=1$.

若 $r(\boldsymbol{A})<n-1$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中所有的 $n-1$ 阶子式全为零. 利用伴随矩阵的定义可知 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{0}$，故 $r(\boldsymbol{A}^*)=0$.

**例 5**　设 $\boldsymbol{A}$ 是 5 阶方阵，且 $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，若 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 为齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的两个线性无关的解，则 $r(\boldsymbol{A}^*)=$ ______ .

**解**　因为 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的两个线性无关的解，所以方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中含有的解的向量个数为 $n-r(\boldsymbol{A})\geqslant 2$. 又因为 $\boldsymbol{A}$ 是 5 阶矩阵，即 $n=5$，则 $r(\boldsymbol{A})\leqslant 3$. 利用性质 7 可得 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}$，所以 $r(\boldsymbol{A}^*)=0$.

**性质 8**　设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶矩阵，记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，且 $r(\boldsymbol{A})=n-1$，则：

(i) $\boldsymbol{\alpha}_i$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解，其中 $i=1,2,\cdots,n$；

(ii) $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含 $n-1$ 个向量.

**证**　(i) 因为 $r(\boldsymbol{A})=n-1$，所以 $|\boldsymbol{A}|=0$. 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 得

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\cdots,\boldsymbol{0})$$

即 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{0}$，其中 $i=1,2,\cdots,n$.

(ii) 利用性质 7，因为 $r(\boldsymbol{A})=n-1$，所以 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$. 因此，$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中含有 $n-1$ 个向量.

**例 6**　已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 2 & 1 & 5\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，求 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解.

**解**　不难验证 $|\boldsymbol{A}|=0$，且 $r(\boldsymbol{A})=2$. 由性质 7 可知 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$. 从而 $n-r(\boldsymbol{A}^*)=2$，故齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解形式为 $k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2$，其中 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 为其基础解系.

由性质 8，$\boldsymbol{A}$ 中任意两个线性无关的列向量都是方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，所以通解为 $k_1(1,2,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-2,1,1)^{\mathrm{T}}$，其中 $k_1,k_2$ 为任意实数.

**性质 9**　设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则：

(i) 若 $|\boldsymbol{A}|=0$，则 0 为伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值；

(ii) 若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则 $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 为伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值.

**证**　(i) 由于 $|\boldsymbol{A}|=0$，与性质 8 类似，得 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}=0\boldsymbol{\alpha}$，即 0 为 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值.

(ii) 记 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0})$，由 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 可得 $\lambda\neq 0$. 再利用 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 得

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0})$$

整理得 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0})$，即 $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 为伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值.

**例 7**　设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 2\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，求 $\boldsymbol{A}^*$ 的最小特征值.

**解**　令矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}3-\lambda & 2 & 2\\ 2 & 3-\lambda & 2\\ 2 & 2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-7)(\lambda-1)^2=0$$

则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=7$，且 $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=7$. 利用性质 9，$\boldsymbol{A}^*$ 的特征值为 $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$，即特征值分别为 7,7,1. 因此，$\boldsymbol{A}^*$ 的最小特征值为 1.

## 4 引导创新思维的流程化教学组织

伴随矩阵的教学设计紧紧围绕基本概念和基本定理展开，教学内容具有系统性、层次性和高阶性等特点. 通过混合教学模式的流程化组织，将问题导入、重点讲解、练习巩固、思考衔接、应用拓展等环节设计在线上和线下进行深度融合，实践中更加注重知识的完整性、基础的应用性和思维的创新性引导.

### 4.1 模块一：伴随矩阵的概念和基本定理

课前预习(线上)：复习代数余子式和方阵行列式的性质，预习伴随矩阵的概念和基本定理(PPT、视频)，并在教学平台上完成关于伴随矩阵的基础练习.

课堂教学(线下)：分析平台上出现的错误，讲解伴随矩阵的概念，证明伴随矩阵的基本定理，并举例说明伴随矩阵的基本要求(例 1、例 2). 然后，通过练习题：已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 和 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}$，围绕教学重点内容展开讨论.

课后测试(线上)：根据教学目的设计 2 ～ 3 道题以检测学习效果，要求同学们限时完成并及时公布答案. 同时，留下思考题(线下)：已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&3&4\end{pmatrix}$，求 $[(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}]^{-1}$，以拓展伴随矩阵的应用方法及运算，并引导进入模块二的学习.

### 4.2 模块二：伴随矩阵的运算性质

课前预习(线上)：复习矩阵的性质、伴随矩阵的概念(PPT、视频)，并在教学平台上完成关于伴随矩阵及行列式的基础练习.

课堂教学(线下)：解决平台上发现的问题，从模块一的思考题导入伴随矩阵的运算性质 1 至性质 6，并将性质 5 的证明留作课堂练习. 然后，介绍求逆矩阵的 Matlab 命令[12]，并结合行列式的展开讨论例 4 以强化伴随矩阵性质的应用训练.

课后测试(线上)：根据教学目的设计 2～3 道题以检测学习效果，要求同学们限时完成并及时公布答案. 同时，将性质 7 留作思考题，引导进入模块三的学习.

### 4.3 模块三：伴随矩阵的综合应用(总复习阶段)

课前预习(线上)：复习伴随矩阵的运算性质、线性方程组解的判定、矩阵特征值的概念(PPT、视频)，并在教学平台上完成关于性质 7 和线性方程组的基础练习.

课堂教学(线下)：整理关于伴随矩阵的常见问题，从性质 7 导入伴随矩阵的综合性质，并分别举例说明其应用(例 5、例 6、例 7). 然后，组织关于伴随矩阵与行列式、线性方程组和特征值等问题的主题讨论，并结合专业领域模型进一步拓展数学思维，培养创新意识并进行创新能力训练.

课后测试(线上)：根据教学目的设计 2～3 道试题以检测学习效果，要求同学们限时完成并及时公布答案. 同时，思考如何利用伴随矩阵及性质解决信息编码等模型(线下选择完成).

## 参考文献：

[1] 胡 科，包雪莲. 回归与超越：大类培养背景下自由教育的省思 [J]. 当代教育科学，2020(1)：9-14.

[2] 罗映红. 高校混合式教学模式构建与实践探索 [J]. 高教探索，2019(12)：48-55.

[3] 朱婉珍，陶祥兴. 基于创新思维培养的大学数学教学模式研究与实践 [J]. 教育理论与实践，2019，39(3)：39-41.

[4] 闻道君，陈义安. $n$个$n$维向量的等价性质及应用[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版)，2018，35(4)：26-29.

[5] 王守中，江　蓉. 判断空间中若干几何图形位置关系的教学设计[J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2018，43(8)：154-159.

[6] 喻厚义，唐　康. 研究性学习在线性变换教学中的应用[J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2018，43(10)：168-172.

[7] 吴德垠. 关于模糊收缩列拟阵的研究[J]. 西南大学学报(自然科学版)，2020，42(4)：70-76.

[8] 张小双，陈　震，刘奇龙. 求解不同阶对称张量组特征值的带位移高阶幂法[J]. 西南大学学报(自然科学版)，2020，42(8)：81-87.

[9] 张俊忠. 发生教学法在矩阵运算教学中的应用[J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2020，45(10)：135-140.

[10] 袁晖坪，闻道君. 线性代数[M]. 2版. 北京：高等教育出版社，2021.

[11] 吴赣昌. 线性代数：理工类[M]. 5版. 北京：中国人民大学出版社，2017.

[12] 薛　毅. 数值分析与实验[M]. 北京：北京工业大学出版社，2005.


# On Design of Blended Teaching Mode for Adjoint Matrices


WEN Dao-jun，　ZENG　Jing，　WANG Peng-fu

*School of Mathematics and Statistics，Chongqing Technology and Business University，Chongqing 400067，China*



**Abstract**：Based on the reformation of subject enrolment and blended teaching mode，the teaching design for adjoint matrix is completed，which includes the systematic goals coinciding with subject enrolment，hierarchical key points according to diffluence cultivation，modular contents suiting for online course and procedural implementations guiding to innovation. Utilizing a deep combination of online and offline，a complete knowledge chain is built by the concept，fundamental theorem，important properties and its applications of the adjoint matrices. Moreover，an effective way is explored to reform the teaching design and blended pattern for college mathematics，which followed the path of strengthening the foundation，introducing experiment，expanding application and leading innovation. It would be helpful to develop the innovation ability of undergraduate talents for the subject enrolment of economics，management，science and engineering.



**Key words**：adjoint matrix；rank of martix；teaching design；blended teaching mode；subject enrolment

责任编辑　廖　坤