第 46 卷 第 5 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2021 年 5 月
Vol. 46 No. 5 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) May 2021

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2021.05.001

一类分数阶微分方程的比较定理与应用①

滕兴虎, 毛自森, 李 静, 韩 笑

中国人民解放军陆军工程大学 基础部, 南京 211101

摘要: 利用分数阶微分方程与相应的 Volterra 积分方程的等价性以及广义积分中值定理, 给出了一类分数阶比较定理新的证明并进行了推广. 利用比较定理研究了一类分数阶微分方程解的稳定性.

关 键 词: 分数阶微分方程; 比较定理; Volterra 积分方程; 稳定性; 分数阶松弛-振荡方程

中图分类号: O175.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5471(2021)05-0001-07

分数微积分在粘弹性理论、分数阶控制、模式识别等领域得到了广泛应用[1-4]. 分数阶导数有多种不同的定义, 其中, Caputo 定义与 Riemann-Liouville 定义是应用较为广泛的两种[4-6]. 与具整数阶导数的数学模型相比, 分数阶导数数学模型能更准确地描述物种传播、粘性流体流动、聚合物应力变化等现象[7-9]. 类似这些问题的模型刻画, 促进了分数微积分的研究, 特别是关于分数微分方程的研究. 由于分数阶算子是非局部积分算子, 这给分数阶微分系统的分析和计算带来了困难[4-6]. 一般有两种方式讨论分数阶微分系统的解的问题. 一种是利用数值方法研究分数阶微分系统[10-14], 另一种是利用不等式的方法, 将给定方程的解与容易求解的相关方程的解进行比较, 从而确定给定方程的解的界. 在文献[15-20]中, 采用与整数常微分方程相似的不等式理论研究了分数阶微分方程的一些基本理论.

对于整数阶导数的微分方程, 经典的比较定理在方程解的理论中具有重要作用[21], 如可以讨论方程的方向场, 可以讨论方程的最大解、最小解等. 在文献[22]中, 给出了一类分数阶微分方程比较定理, 但在原定理条件下, 定理的证明存在缺陷. 本文利用文献[23]中的结论以及分数阶微分方程与 Volterra 积分方程的等价性, 适当改变了定理的条件, 重新给出此类比较定理以及证明, 并进行了推广. 此外, 利用本文中所得到的比较定理, 还讨论了一类特殊的分数阶微分方程解的稳定性. 最后给出了两个算例, 数值模拟结果与理论结果吻合较好.

1 基本引理

在进一步讨论之前, 给出如下引理.

引理 1[6] 设 $0<\alpha<1$, 函数 $x(t)$ 是分数阶微分方程

$$ {}^{C}D_{0,t}^{\alpha}x(t)=f(t,x(t)),\ x(t)\big|_{t=0}=x_0 \tag{1}$$

的解的充分必要条件是 $x(t)$ 为如下 Volterra 积分方程的解

$$x(t)=x_0+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau,x(\tau))\mathrm{d}\tau \tag{2}$$

其中 ${}^{C}D_{0,t}^{\alpha}x(t)$ 表示 Caputo 意义下 $x(t)$ 的 α 阶分数阶导数.

引理 2[6] 设 $0<\alpha<1$, 函数 $x(t)$ 是分数阶微分方程

---

① 收稿日期: 2019-05-07

基金项目: 国家自然科学基金项目(12072370).

作者简介: 滕兴虎, 副教授, 硕士, 主要从事分数阶非线性动力学研究.

$$ {}^{RL}D_{0,t}^{\alpha}x(t)=f(t,x(t)) \qquad {}^{RL}D_{0,t}^{\alpha-1}x(t)\big|_{t=0}=b_0 \tag{3}$$
的解的充分必要条件是 $x(t)$ 为如下 Volterra 积分方程的解
$$x(t)=\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}x_0+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau,x(\tau))\mathrm{d}\tau \tag{4}$$
其中 ${}^{RL}D_{0,t}^{\alpha}x(t)$ 表示 Riemann-Liouville 意义下 $x(t)$ 的 α 阶分数阶导数.

引理 3[6] 设 $0<\alpha<1$,则
$$ {}^{C}D_{0,t}^{\alpha}x(t)={}^{RL}D_{0,t}^{\alpha}x(t)-\frac{\varphi(0)}{\Gamma(1-\alpha)}t^{-\alpha} \tag{5}$$

引理 4 设 $0<\alpha<1$,$\varphi(t)$ 为区间 $[0,+\infty)$ 上的可微函数,若存在 $t_0>0$ 使得 $\varphi(t_0)=0$,且对 $t\in[0,t_0)$ 有 $\varphi(t)\geqslant 0$,则有
$$ {}^{RL}D_{0,t}^{\alpha}\varphi(t_0)\leqslant 0 \tag{6}$$

证 由 ${}^{RL}D_{0,t}^{\alpha}\varphi(t)=\dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\displaystyle\int_0^t(t-\tau)^{-\alpha}\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau$,定义 $H(t)=\displaystyle\int_0^t(t-\tau)^{-\alpha}\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau$,则对任意 $h\in(0,t_0)$,
$$H(t_0)-H(t_0-h)=\int_0^{t_0-h}((t_0-\tau)^{-\alpha}-(t_0-\tau-h)^{-\alpha})\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_{t_0-h}^{t_0}(t_0-\tau)^{-\alpha}\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau=I_1+I_2$$
由假设,对 $\tau\in(0,t_0-h)\subset(0,t_0)$ 有 $\varphi(\tau)\geqslant 0$ 且显然 $(t_0-\tau)^{-\alpha}-(t_0-\tau-h)^{-\alpha}<0$,故有 $I_1\leqslant 0$. 从而
$$H(t_0)-H(t_0-h)\leqslant\int_{t_0-h}^{t_0}(t_0-\tau)^{-\alpha}\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau=I_2$$
由文献[23]的结论可知
$$\int_{t_0-h}^{t_0}(t_0-\tau)^{-\alpha}\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau=(t_0-\xi)^{-\alpha}\varphi(\xi)h=\eta^{-\alpha}\varphi(t_0-\eta)h$$
其中 $\xi\in(t_0-h,t_0)$,$\eta=t_0-\xi$. 由假设 $\varphi(t)$ 可微,有
$$\varphi'(t_0)=\lim_{h\to0^+}\frac{\varphi(t_0)-\varphi(t_0-h)}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{-\varphi(t_0-h)}{h}\leqslant 0$$
若 $\varphi'(t_0)=0$,则 $\varphi(t_0-h)=o(h)(h\to0^+)$ 且 $\lim\limits_{h\to0^+}\eta^{-\alpha}\varphi(t_0-\eta)=0$. 若 $\varphi'(t_0)<0$,则 $\varphi(t_0-h)\sim-\varphi'(t_0)h\ (h\to0^+)$ 且 $\lim\limits_{h\to0^+}\eta^{-\alpha}\varphi(t_0-\eta)=0$,从而可得
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H(t)\bigg|_{t=t_0}=\lim_{h\to0^+}\frac{H(t_0)-H(t_0-h)}{h}\leqslant\lim_{h\to0^+}\frac{\displaystyle\int_{t_0-h}^{t_0}(t_0-\tau)^{-\alpha}\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau}{h}=0$$
因此 ${}^{RL}D_{0,t}^{\alpha}\varphi(t_0)=\dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H(t)\bigg|_{t=t_0}\leqslant 0$.

利用引理 3 与引理 4,可直接得到如下结论.

引理 5 设 $0<\alpha<1$,$\varphi(t)$ 为区间 $[0,+\infty)$ 上的可微函数,若存在 $t_0>0$ 使得 $\varphi(t_0)=0$ 且对 $t\in[0,t_0)$ 有 $\varphi(t)\geqslant 0$,则有 ${}^{C}D_{0,t}^{\alpha}\varphi(t_0)\leqslant 0$.

2 比较定理

令分数阶导数的阶数 $\alpha\in(0,1)$. 在本文定理 1 数量值函数 $f(t,x)$ 与 $F(t,x)$ 连续且对 x 满足 Lipschitz 条件、满足(9)式且(7)与(8)式解函数存在的条件下,文献[22]将经典的整数阶导数意义下微分方程的比较定理推广到 Caputo 分数阶导数意义下微分方程的比较定理. 但在其定理证明过程中,对不同的解函数利用了(9)式. 关键性条件的使用存在缺陷,定理的证明晦涩不易理解. 为解决其证明中存在的问题,下面对定理条件做了调整,不再要求数量值函数 $f(t,x)$ 与 $F(t,x)$ 对 x 满足 Lipschitz 条件,在数量值函数 $f(t,x)$ 与 $F(t,x)$ 连续、满足(9)式以及解函数可微条件下重新给出比较定理,并利用上一部分的引理给出了较易理解的证明,并在定理 1 的基础上作了进一步的讨论、推广.

定理 1 设 $f(t,x(t)),F(t,x(t))\in C([0,+\infty)\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ 且 $[0,+\infty)$ 上的可微函数 $x(t)$,$X(t)$ 分

别为如下分数阶微分方程的解

$$ {}^{C}D_{0,t}^{\alpha}x(t)=f(t,x(t)),\ x(0)=x_0 \tag{7}$$

$$ {}^{C}D_{0,t}^{\alpha}x(t)=F(t,x(t)),\ x(0)=x_0 \tag{8}$$

若对任意的$(t,u)\in[0,+\infty)\times\mathbb{R}$有

$$f(t,u)<F(t,u) \tag{9}$$

则对任意的 $t\in(0,+\infty)$ 有 $x(t)<X(t)$.

证　利用假设 $X(0)=x(0)$ 与(9)式，有

$$F(0,X(0))-f(0,x(0))=F(0,x_0)-f(0,x_0)>0$$

故存在某正数 $\delta>0$，使得当 $0<t<\delta$ 时，有 $F(t,X(t))-f(t,x(t))>0$. 利用引理 1，有

$$x(t)=x_0+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau,x(\tau))\mathrm{d}\tau,\ X(t)=X_0+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}F(\tau,X(\tau))\mathrm{d}\tau$$

令 $\varphi(t)=X(t)-x(t)$，则有

$$\varphi(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}(F(\tau,X(\tau))-f(\tau,x(\tau)))\mathrm{d}\tau>0,\ 0<t<\delta$$

由于解函数 $x(t)$，$X(t)$ 连续，因此函数 $\varphi(t)$ 在区间$[0,t)$ 连续. 假设 $t=t_0$ 是第一个满足 $\varphi(t)=0$ 的点，即当 $t\in(0,t_0)$ 时 $\varphi(t)>0$ 且 $\varphi(t_0)=0$. 则利用条件(7),(8) 与(9) 式，可以得到

$$ {}^{C}D_{0,t}^{\alpha}\varphi(t)\big|_{t=t_0}=F(t_0,X(t_0))-f(t_0,x(t_0))=F(t_0,x(t_0))-f(t_0,x(t_0))>0 \tag{10}$$

另一方面，由 $\varphi(0)=X(0)-x(0)=0$ 以及引理 3－5 可知

$$ {}^{C}D_{0,t}^{\alpha}\varphi(t_0)={}^{RL}D_{0,t}^{\alpha}\varphi(t_0)\leqslant 0 \tag{11}$$

这与(10) 式矛盾，故这样的 t_0 点不存在，所以对任意的 $t\in(0,+\infty)$ 总有 $x(t)<X(t)$.

直接利用定理 1，可以得到如下推论.

推论 1　设 $h(x(t))\in C([0,+\infty)\times\mathbb{R},\mathbb{R})$，$f(t)$，$F(t)\in C([0,+\infty),\mathbb{R})$ 且$[0,+\infty)$ 上的可微函数 $x(t)$,$X(t)$ 分别为如下两个方程的解

$$ {}^{C}D_{0,t}^{\alpha}x(t)=h(x(t))+f(t),\ x(0)=x_0 \tag{12}$$

$$ {}^{C}D_{0,t}^{\alpha}x(t)=h(x(t))+F(t),\ x(0)=x_0 \tag{13}$$

若对任意的 $t\in[0,+\infty)$ 有 $f(t)<F(t)$，则对任意的 $t\in(0,+\infty)$ 有 $x(t)<X(t)$.

当定理 1 中条件(9) 式的不等号非严格时，有如下结论.

定理 2　设 $f(t,x(t))$，$F(t,x(t))\in C([0,+\infty)\times\mathbb{R},\mathbb{R})$，且$[0,+\infty)$ 上的可微函数 $x(t)$,$X(t)$ 分别是方程(7) 与(8) 的解. 若对任意取定的 t，函数 $f(t,u)$ 或 $F(t,u)$ 关于 u 单调不减且满足

$$f(0,x_0)<F(0,x_0),\ f(t,u)\leqslant F(t,u),\ t\in(0,+\infty) \tag{14}$$

则有 $x(t)<X(t)$，$t\in(0,+\infty)$.

证　令 $\varepsilon=\frac{1}{2}\,|F(0,x_0)-f(0,x_0)|$，则由 $f(0,x_0)<F(0,x_0)$ 可知 $\varepsilon>0$. 因此存在正数 $\delta>0$，使得

$$f(t,x)<\frac{1}{2}(F(0,x_0)+f(0,x_0))<F(t,x),\ 0<t<\delta$$

当 $0<t<\delta$ 时，由定理 1 可知 $x(t)<X(t)$. 设 t_1 是区间$[\delta,+\infty)$ 内第一个使得不等式 $x(t)<X(t)$ 不成立的点，故有

$$x(t_0)<X(t_0),\ x(t_1)=X(t_1),\ t_0\in(0,t_1) \tag{15}$$

利用引理 1 可以得到

$$x(t_0)-X(t_0)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_0}(t_0-\tau)^{\alpha-1}(f(\tau,x(\tau))-F(\tau,X(\tau)))\mathrm{d}\tau<0$$

由于当 $\tau\in(0,t_0)$ 时$(t_0-\tau)^{\alpha-1}>0$，因此至少存在一点 $\xi_1\in(0,t_0)$ 使得

$$f(\xi_1,x(\xi_1))-F(\xi_1,X(\xi_1))<0 \tag{16}$$

利用引理1类似可得

$$x(t_1)-X(t_1)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}(t_1-\tau)^{\alpha-1}(f(\tau,\ x(\tau))-F(\tau,\ X(\tau)))\mathrm{d}\tau=0$$

由 $\tau\in(0,\ t_1)$ 时 $(t_1-\tau)^{\alpha-1}>0$ 及(16)式，存在一点 $\xi_2\in(0,\ t_1)$ 使得

$$f(\xi_2,\ x(\xi_2))-F(\xi_2,\ X(\xi_2))>0 \tag{17}$$

由(15)式，有 $x(\xi_2)<X(\xi_2)$. 不妨设取定参数 t 时函数 $f(t,\ u)$ 关于 u 单调不减，则有

$$f(\xi_2,\ x(\xi_2))\leqslant f(\xi_2,\ X(\xi_2)) \tag{18}$$

结合(17)式便有 $f(\xi_2,\ X(\xi_2))>F(\xi_2,\ X(\xi_2))$. 这与假设中的条件 $f(t,\ u)\leqslant F(t,\ u)$ 矛盾. 因此当 $t\in(0,\ +\infty)$ 时有 $x(t)<X(t)$.

推论2 设 $h(x(t))\in C([0,\ +\infty)\times\mathbb{R},\ \mathbb{R})$，$f(t),F(t)\in C([0,\ +\infty),\ \mathbb{R})$ 且 $[0,\ +\infty)$ 上的可微函数 $x(t),X(t)$ 分别为方程(12)与(13)的解. 若 $f(0)<F(0)$ 且当 $t\in(0,\ +\infty)$ 时 $f(t)\leqslant F(t)$，$h(u)$ 关于 u 单调不减，则有 $x(t)<X(t)$，$t\in(0,\ +\infty)$.

定理1与定理2中的结论，将整数阶导数意义下常微分方程的比较定理推广到了Caputo意义下分数阶微分方程的比较定理. 利用引理3，类似于上述结论可以得到Riemann-Liouville意义下分数阶微分方程的比较定理.

定理3 设 $f,F\in C([0,\ +\infty)\times\mathbb{R},\ \mathbb{R})$ 且 $[0,\ +\infty)$ 上的可微函数 $x(t),X(t)$ 分别满足方程

$$^{RL}D_{0,\ t}^{\alpha}x(t)=f(t,\ x(t)),\ ^{RL}D_{0,\ t}^{\alpha-1}x(t)\mid_{t=0}=x_0 \tag{19}$$

$$^{RL}D_{0,\ t}^{\alpha}x(t)=F(t,\ x(t)),\ ^{RL}D_{0,\ t}^{\alpha-1}x(t)\mid_{t=0}=x_0 \tag{20}$$

若对任意的 $(t,\ x)\in[0,\ +\infty)\times\mathbb{R}$ 有

$$f(t,\ x(t))<F(t,\ x(t)) \tag{21}$$

则有 $x(t)<X(t)$，$t\in(0,\ +\infty)$.

类似于定理2，可将定理3进行推广如下.

定理4 设 $f,F\in C([0,\ +\infty)\times\mathbb{R},\ \mathbb{R})$ 且 $[0,\ +\infty)$ 上的可微函数 $x(t),X(t)$ 分别满足方程(19)与(20). 若对任意取定的 t，函数 $f(t,\ u)$ 或 $F(t,\ u)$ 关于 u 单调不减且满足

$$f(0,\ x_0)<F(0,\ x_0),\ f(t,\ u)\leqslant F(t,\ u),\ t\in(0,\ +\infty) \tag{22}$$

则有 $x(t)<X(t)$，$t\in(0,\ +\infty)$.

推论3 设 $h(x(t))\in C([0,\ +\infty)\times\mathbb{R},\ \mathbb{R})$，$f(t),F(t)\in C([0,\ +\infty),\ \mathbb{R})$ 且 $[0,\ +\infty)$ 上的可微函数 $x(t),X(t)$ 分别满足如下两个方程

$$^{RL}D_{0,\ t}^{\alpha}x(t)=h(x(t))+f(t),\ ^{RL}D_{0,\ t}^{\alpha-1}x(t)\mid_{t=0}=x_0 \tag{23}$$

$$^{RL}D_{0,\ t}^{\alpha}x(t)=h(x(t))+F(t),\ ^{RL}D_{0,\ t}^{\alpha-1}x(t)\mid_{t=0}=x_0 \tag{24}$$

若对任意的 $t\in[0,\ +\infty)$ 有 $f(t)<F(t)$ 或 $f(0)<F(0)$ 且当 $t\in(0,\ +\infty)$ 时 $f(t)\leqslant F(t)$，$h(u)$ 关于 u 单调不减，则有 $x(t)<X(t)$，$t\in(0,\ +\infty)$.

3 解的稳定性

利用定理1与定理3，考虑一类分数阶微分方程解的稳定性.

定理5 设 $t\in[0,\ +\infty)$，$ax<f(t,\ x)<bx$，其中 $a<0$，$b<0$. 若 $[0,\ +\infty)$ 上的可微函数 $x(t)$ 为如下方程的解

$$^{C}D_{0,\ t}^{\alpha}x(t)=f(t,\ x(t)),\ x(0)=x_0 \tag{25}$$

则方程(25)的解 $x(t)$ 是全局Mittag-Leffler渐近稳定的.

证 设 $x_1(t)$ 与 $x_2(t)$ 分别为如下两个方程的解

$$^{C}D_{0,\ t}^{\alpha}x(t)=ax(t),\ x(0)=x_0$$

$$^{C}D_{0,\ t}^{\alpha}x(t)=bx(t),\ x(0)=x_0$$

则由文献[24]知 $x_1(t)=x(0)E_p(at^p)$，$x_2(t)=x(0)E_p(bt^p)$，其中 $E_p(at^p)$ 与 $E_p(bt^p)$ 为Mittag-Leffler

函数.

由定理 1 可知 $x_1(t) < x(t) < x_2(t)$. 根据 Mittag-Leffler 函数的渐近性质[4]，有 $\lim\limits_{t\to+\infty} E_p(bt^p) = \lim\limits_{t\to+\infty} E_p(at^p) = 0$. 所以方程(25) 的解 $x(t)$ 是全局 Mittag-Leffler 渐近稳定的.

类似可得如下结论：

定理 6　设 $t \in [0, +\infty)$，$ax < f(t, x) < bx$，其中 $a < 0$，$b < 0$. 若$[0, +\infty)$ 上的可微函数 $x(t)$ 为如下方程的解

$$ {}^{RL}D_{0,t}^{\alpha}x(t) = f(t, x(t)),\ {}^{RL}D_{0,t}^{\alpha-1}x(t)\,|_{t=0} = x_0 \tag{26} $$

则方程(26) 的解 $x(t)$ 是全局 Mittag-Leffler 渐近稳定的.

4　应用举例

例 1　考虑分数阶松弛-振动方程

$$ {}^{C}D_{0,t}^{\alpha}x(t) + Ax(t) = f(t),\ x(0) = b_0 \tag{27} $$

其中：$0 < \alpha \leqslant 2$，A 为松弛系数，$x(t)$ 为应力，$f(t)$ 为弹性模量与应变率的乘积或者是外部激励. 为保持整数阶松弛-振动方程对初值的要求，方程中采用的是 Caputo 分数阶导数定义. 此方程为分数阶松弛-振动现象的控制方程[25-26]. 当 $0 < \alpha < 1$ 时，方程表现为记忆性的慢速耗散现象，是分数阶松弛方程；当 $1 < \alpha < 2$ 时，方程表现为阻尼振动，是分数阶振动方程；$\alpha = 1, 2$ 时方程分别表示整数阶的松弛方程和振动方程. 考虑松弛方程

$$ {}^{C}D_{0,t}^{0.5}x(t) = f(t, x(t)) = -x(t) + \sin^2 t,\ x(0) = 2 \tag{28} $$

$$ {}^{C}D_{0,t}^{0.5}x(t) = F(t, x(t)) = -x(t) + 1.1,\ x(0) = 2 \tag{29} $$

记 $x(t)$ 与 $X(t)$ 分别表示方程(28) 与(29) 的解. 显然 $f(t, x(t)) < F(t, x(t))$，故由定理 1 可得 $x(t) < X(t)$. 利用文献[11] 中的方法可得方程(28) 与(29) 的数值解曲线，如图 1 所示. 图 1 的结果显示系统(28) 的应力 $x(t)$ 从初值 $x(0) = 2$ 开始衰减并呈现出周期震荡. 系统(29) 的应力 $X(t)$ 从初值 $X(0) = 2$ 开始呈现出应力松弛，且应力 $X(t)$ 的曲线始终在应力 $x(t)$ 的曲线上方. 这与理论结果相吻合.

例 2　考虑如下 3 个方程

$$ {}^{C}D_{0,t}^{0.5}x(t) = -2x(t),\ x(0) = 3 \tag{30} $$

$$ {}^{C}D_{0,t}^{0.5}x(t) = -x(t) - 0.5\,|\sin(x(t))|,\ x(0) = 3 \tag{31} $$

$$ {}^{C}D_{0,t}^{0.5}x(t) = -x(t),\ x(0) = 3 \tag{32} $$

由文献[22]，方程(30) 与(32) 具有解析解且全局 Mittag-Leffler 渐近稳定，方程(31) 难以得出其解析解. 但显然当 $x > 0$ 时 $-2x < -x - 0.5\,|\sin(x)| < -x$，当 $x < 0$ 时 $-2x > -x - 0.5\,|\sin(x)| > -x$，故由定理 5 可知方程(31) 的解曲线是全局 Mittag-Leffler 渐近稳定的. 方程(30)－(31) 的数值解曲线如图 2 所示. 图 2 中，点线、虚线、实线分别表示方程(30)，(31) 与(32) 的解曲线，图中解曲线相对位置与变化趋势与理论结果相符.

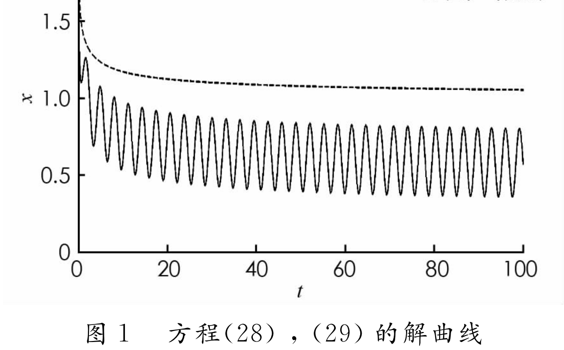

图 1　方程(28)，(29) 的解曲线

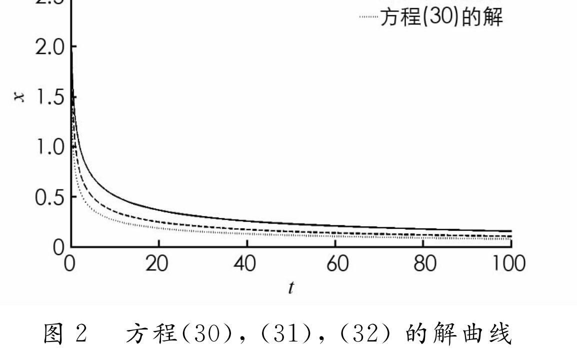

图 2　方程(30)，(31)，(32) 的解曲线

5 结　　论

本文基于函数在某点处分数阶导数符号的判定以及分数阶微分方程与 Volterra 积分方程的等价性，得到了一类分数阶微分方程的比较定理. 定理的结果表明，对于 Caputo 导数(或 Riemann-Liouville 导数)意义下的微分方程来说，不同的方程在满足一定条件时，相应方程的解曲线之间是不相交的.

参考文献：

[1] TATOM F B. The Relationship Between Fractional Calculus and Fractals [J]. Fractals, 1995, 3(1): 217-229.

[2] ROCCO A, WEST B J. Fractional Calculus and the Evolution of Fractal Phenomena [J]. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 1999, 265(3-4): 535-546.

[3] DAS S. Functions Used in Fractional Calculus [M]//Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 2008: 19-34.

[4] PODLUBNY I. Fractional Differential Equations [M]. San Diego: Academic Press, 1999.

[5] DIETHELM K. Multi-Term Caputo Fractional Differential Equations [M]//Lecture Notes in Mathematics. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 2010: 167-186.

[6] KILBAS A A, SRIVASTAVA H M, TRUJILLO J J. Preface [M]//Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam: Elsevier, 2006.

[7] QI H T, JIN H. Unsteady Rotating Flows of a Viscoelastic Fluid with the Fractional Maxwell Model Between Coaxial Cylinders [J]. Acta Mechanica Sinica, 2006, 22(4): 301-305.

[8] 陈宏善，侯婷婷，冯养平. 聚合物物理老化的分数阶模型 [J]. 中国科学：物理学 力学 天文学，2010，40(10)：1267-1274.

[9] DEBNATH L. Recent Applications of Fractional Calculus to Science and Engineering [J]. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2003, 2003(54): 3413-3442.

[10] DENG W H. Short Memory Principle and a Predictor-Corrector Approach for Fractional Differential Equations [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2007, 206(1): 174-188.

[11] MONJE C A, CHEN Y Q, VINAGRE B M, et al. Fractional-Order Systems and Controls [M]. London: Springer London, 2010.

[12] SHI M, WANG Z H, DU M L. A Modified Multi-Step Differential Transform Method for Solving Fractional Dynamic Systems [J]. Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, 2013, 8(1): 011008.

[13] GÜLSU M, ÖZTÜRK Y, ANAPAL A. Numerical Approach for Solving Fractional Relaxation-Oscillation Equation [J]. Applied Mathematical Modelling, 2013, 37(8): 5927-5937.

[14] WEI S, CHEN W. A Matlab Toolbox for Fractional Relaxation-Oscillation Equations [EB/OL]. (2013-02-14)[2018-12-25]. https://arxiv.org/abs/1302.3384.

[15] LAKSHMIKANTHAM V, VATSALA A S, Theory of Fractional Differential Inequalities and Applications[J]. Communications in Applied Analysis, 2007, 11(3): 395-402.

[16] DRICI Z, MCRAE F A, DEVI J V. Fractional Differential Equations Involving Causal Operators[J]. Communications in Applied Analysis, 2010, 14(1): 81-88.

[17] WANG G T, BALEANU D, ZHANG L H. Monotone Iterative Method for a Class of Nonlinear Fractional Differential Equations [J]. Fractional Calculus and Applied Analysis, 2012, 15(2): 244-252.

[18] LAKSHMIKANTHAM V, LEELA S, DEVI J V. Theory of Fractional Dynamic Systems [M]. Cambridge: Cambridge Academic Publishers, 2009.

[19] YAKAR A. Some Generalizations of Comparison Results for Fractional Differential Equations [J]. Computers & Mathematics With Applications, 2011, 62(8): 3215-3220.

[20] YAKAR A. Initial Time Difference Quasilinearization for Caputo Fractional Differential Equations [J]. Advances in

Difference Equations，2012，2012(1)：1-9.
[21] KING A C，BILLINGHAM J，OTTO S R. Differential Equations [M]. Cambridge：Cambridge University Press，2003.
[22] 胡桐春，钱德亮，李常品. 分数阶微分方程的比较定理 [J]. 应用数学与计算数学学报，2009，23(1)：97-103.
[23] 陈清明，姜学源. 广义积分中值定理 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2013，38(8)：169-172.
[24] POLLARD H. The Completely Monotonic Character of the Mittag-Leffler Function $E_a(\{-x\})$ [J]. Bulletin of the American Mathematical Society，1948，54(12)：1115-1117.
[25] MAINARDI F. Fractional Relaxation-Oscillation and Fractional Diffusion-Wave Phenomena [J]. Chaos，Solitons & Fractals，1996，7(9)：1461-1477.
[26] 陈　文，孙洪广，李西成. 力学与工程问题的分数阶导数建模 [M]. 北京：科学出版社，2010.

A Class of Comparison Theorems and Application of Fractional Differential Equation

TENG Xing-hu，　MAO Zi-sen，　LI　Jing，　HAN　Xiao
Department of General Education，Army Engineering University of PLA，Nanjing 211101，China

Abstract：By the equivalence of fractional differential equations and the corresponding Volterra integral equation，and with the mean value theorem for improper integral，a new proof of comparison theorem of fractional differential equation is given. And the comparison theorems are generalized. Also，the stability of a kind of fractional differential equation is discussed with the comparison theorem. And examples are given to illustrate the results.

Key words：fractional differential equation；comparison theorem；Volterra integral equation；stability；fractional relaxation-oscillation equation

责任编辑　张　构