

一类分数阶 q -导数三点边值问题的正解^①

郭福日, 罗芳, 康淑瑰

山西大同大学 数学与统计学院, 山西 大同 037009

摘要: 讨论了一类非线性项带参数的分数阶 q -导数三点边值问题正解的存在唯一性, 并且结合算子方程 $Ax = \lambda x$ 解的特点给出了正解依赖于参数 $\lambda > 0$ 的一些性质.

关键词: 分数阶 q -导数; 三点边值问题; 参数; 正解

中图分类号: O175.8

文献标志码: A

文章编号: 1000-5471(2021)05-0008-05

近年来, 关于分数阶 q -导数方程的研究有许多^[1-10], 但大部分讨论的是正解的存在唯一性, 采用的方法主要是 Schauder 不动点理论、Leggett-Williams 不动点理论、单调迭代原理和锥拉伸锥压缩不动点理论, 文献[9] 讨论了一类分数阶 q -导数三点边值问题

$$\begin{cases} D_q^\alpha u(t) + f(t, u(t), u(t)) + g(t, u(t)) = 0 & 0 < t < 1 \\ u(0) = 0 & u(1) = \beta u(\eta) \end{cases}$$

正解的存在唯一性和正解的一些性质, 所采用的方法是单调混合算子不动点理论及迭代逼近.

若边值问题中非线性项带了参数, 那么解与参数会有什么样的依赖关系? 本文基于这个问题, 受文献[11-13] 的启发讨论了下列带参数的分数阶 q -导数边值问题

$$\begin{cases} D_q^\alpha u(t) + \lambda f(t, u(t)) = 0 & 0 < t < 1 \\ u(0) = 0 & u(1) = \beta u(\eta) \end{cases} \quad (1)$$

正解的存在唯一性, 结合所讨论方程的特点给出了正解依赖于参数 $\lambda > 0$ 的一些性质, 其中 $1 < \alpha \leq 2$, $0 < \eta < 1$, $0 < \beta \eta^{\alpha-1} < 1$.

1 准备知识

定义 1^[14] 设 E 为实 Banach 空间, 如果 $P \subset E$ 且 P 为非空凸闭集, 并且下列两个条件成立:

(I) $x \in P, \lambda \geq 0 \Rightarrow \lambda x \in P$;

(II) $x \in P, -x \in P \Rightarrow x = \theta$, θ 表示 E 中的零元素;

则称 P 是 E 中的一个锥.

引理 1^[14] 设 E 是实 Banach 空间, P 为 E 中的锥, 则锥 P 正规的充要条件是: 若存在常数 $N > 0$, 对任意的 $x, y \in E$, 使得当 $\theta \leq x \leq y$ 时, 恒有 $\|x\| \leq N \|y\|$ (满足此式的最小 N 称为 P 的正规常数).

定义 2^[14] 设 E 是实 Banach 空间, 对所有 $x, y \in E$, 如果存在 $\lambda > 0, \mu > 0$ 使得 $\lambda x \leq y \leq \mu x$, 则称 x, y 等价, 并用符号 $x \sim y$ 表示. 若给定 $h > \theta$, 定义集合 $P_h = \{x \in E \mid x \sim h\}$.

① 收稿日期: 2019-09-01

基金项目: 国家自然科学基金项目(11871314, 61803241); 山西省自然科学基金项目(201801D121001); 大同市自然科学基金项目(2018146, 2018157); 山西省高等学校科技创新项目(2020L0470); 山西大同大学科研项目(2015Q12, 2016K2, 2018K4).

作者简介: 郭福日, 副教授, 硕士, 主要从事微分方程稳定性理论的研究.

定义 3^[2] 函数 $f: [0, 1] \longrightarrow R$ 的 α 阶- q 积分(Riemann-Liouville 型) 为

$$(I_q^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)} \int_0^x (x - qs)^{(\alpha-1)} f(s) d_qs, \alpha > 0 \quad (2)$$

函数 f 的 α 阶 q -导数为

$$(D_q^\alpha f)(x) = (D_q^k I_q^{k-\alpha} f)(x), \alpha > 0 \quad (3)$$

其中 $k = [\alpha] + 1$. 特别地, 当 $\alpha = 0$ 时, $(D_q^0 f)(x) = f(x)$, $(I_q^0 f)(x) = f(x)$.

引理 2^[11] E 为实的 Banach 空间, P 是一个正规锥且 $P \subset E$, $h > \theta$, 设 $A: P \longrightarrow P$ 为增算子且满足下列条件:

- (a) 存在 $h_0 \in P_h$ 使得 $Ah_0 \in P_h$;
- (b) 对任意 $x \in P$, $t \in (0, 1)$, 存在 $\varphi(t) \in (t, 1)$ 使得 $A(tx) \geq \varphi(t)Ax$;

则有以下结论:

- (I) 算子方程 $Ax = x$ 有唯一的解 $x^* \in P_h$;
- (II) 对任意的初值 $x_0 \in P_h$, 构造迭代序列 $x_n = Ax_{n-1}$ ($n = 1, 2, \dots$) 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$.

引理 3^[11] 在满足引理 2 的条件下, 假设 x_λ ($\lambda > 0$) 是算子方程 $Ax = \lambda x$ 唯一的解, 则有以下结论:

- (I) x_λ 关于 λ 严格递减, 即当 $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ 时, 有 $x_{\lambda_1} > x_{\lambda_2}$;
- (II) 如果存在 $\gamma \in (0, 1)$ 使得 $\varphi(t) \geq t^\gamma$, $t \in (0, 1)$, 则 x_λ 关于 λ 连续, 即当 $\lambda \rightarrow \lambda_0$ ($\lambda_0 > 0$) 时, 有 $\|x_\lambda - x_{\lambda_0}\| \rightarrow 0$;

$$(III) \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \|x_\lambda\| = 0, \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \|x_\lambda\| = +\infty.$$

引理 4^[9] 若 $1 < \alpha \leq 2$, $0 < \eta < 1$, $0 < \beta\eta^{\alpha-1} < 1$, $x \in C^1[0, 1]$, 则下列分数阶 q -导数边值问题

$$\begin{cases} D_q^\alpha u(t) + x(t) = 0 & 0 < t < 1 \\ u(0) = 0 & u(1) = \beta u(\eta) \end{cases} \quad (4)$$

存在唯一的正解 $u(t) = \int_0^1 G(t, qs)x(s) d_qs$. 这里 $G(t, qs)$ 为

$$G(t, qs) = \begin{cases} \frac{t^{\alpha-1} (1 - qs)^{(\alpha-1)} - t^{\alpha-1} \beta (\eta - qs)^{(\alpha-1)} - (t - qs)^{(\alpha-1)} (1 - \beta\eta^{\alpha-1})}{\Gamma_q(\alpha)(1 - \beta\eta^{\alpha-1})} & 0 \leq qs \leq t \leq 1, qs \leq \eta \\ \frac{t^{\alpha-1} (1 - qs)^{(\alpha-1)} - (t - qs)^{(\alpha-1)} (1 - \beta\eta^{\alpha-1})}{\Gamma_q(\alpha)(1 - \beta\eta^{\alpha-1})} & 0 \leq \eta \leq qs \leq t \leq 1 \\ \frac{t^{\alpha-1} (1 - qs)^{(\alpha-1)} - t^{\alpha-1} \beta (\eta - qs)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)(1 - \beta\eta^{\alpha-1})} & 0 \leq t \leq qs \leq \eta < 1 \\ \frac{t^{\alpha-1} (1 - qs)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)(1 - \beta\eta^{\alpha-1})} & 0 \leq t \leq 1, \eta \leq qs \end{cases} \quad (5)$$

引理 5^[9] 边值问题(4) 的格林函数 $G(t, qs)$ 具有下面的性质

- (i) $G(t, qs)$ 是连续函数, 并且 $G(t, qs) \geq 0$, $t, s \in [0, 1]$;
- (ii) $\frac{M_0 t^{\alpha-1} qs (1 - qs)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)(1 - \beta\eta^{\alpha-1})} \leq G(t, qs) \leq \frac{t^{\alpha-1} (1 - qs)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)(1 - \beta\eta^{\alpha-1})}$, $t, s \in [0, 1]$

这里 $0 < M_0 = \min\{1 - \beta\eta^{\alpha-1}, \beta\eta^{\alpha-2}(1 - \eta), \beta\eta^{\alpha-1}\}$.

2 主要结果及证明

令 $E = C[0, 1]$, 定义范数 $\|x\| = \max\{|x(t)| : t \in [0, 1]\}$. 取锥

$$P = \{x \in C[0, 1] : x(t) \geq 0, t \in [0, 1]\} \quad (7)$$

显然锥 P 为正规锥, 正规常数为 1.

本文做如下假设:

- (H1) 函数 $f(t, x): [0, 1] \times [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ 为连续函数, 并且 $f(t, 0) \equiv 0$;

(H2) 对于每一个 $t \in [0, 1]$, $f(t, x)$ 关于第二个变量 x 单调递增;

(H3) 对任意 $r \in (0, 1)$, 存在 $\varphi(r) \in (r, 1)$ 使得

$$f(t, rx) \geq \varphi(r)f(t, x), t \in [0, 1], x \in [0, +\infty)$$

定理 1 如果(H1) – (H2) 成立, 则下面结论成立:

(I) 任意 $\lambda \in (0, 1)$, 则边值问题(1) 有唯一的正解 $u_\lambda^* \in P_h$, 此时 $h(t) = t^{\alpha-1}$, $t \in [0, 1]$, 并且对任意初值 $u_0 \in P_h$, 构造迭代序列

$$u_n(t) = \lambda \int_0^1 G(t, qs) f(s, u_{n-1}(s)) d_qs \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (8)$$

且当 $n \rightarrow +\infty$ 时, 有 $u_n(t) \rightarrow u_\lambda^*(t)$;

(II) u_λ^* 关于 λ 严格递增, 即当 $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ 时, 有 $u_{\lambda_1}^* < u_{\lambda_2}^*$;

(III) 若存在 $\gamma \in (0, 1)$, 使得 $\varphi(t) > t^\gamma$, $t \in [0, 1]$, 则 u_λ^* 关于 λ 连续, 即当 $\lambda \rightarrow \lambda_0$ 时, 有 $\|u_\lambda^* - u_{\lambda_0}^*\| \rightarrow 0$;

(IV) $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \|u_\lambda^*\| = 0$, $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \|u_\lambda^*\| = +\infty$.

证 对于任意 $u \in P$, 定义算子

$$Au(t) = \int_0^1 G(t, qs) f(s, u(s)) d_qs, t \in [0, 1] \quad (9)$$

由引理 4 可知, $u(t)$ 是(1) 式的解当且仅当 $u(t) = \lambda Au(t)$, 因为 $f(t, x) \geq 0$, $G(t, qs) \geq 0$, 则 $Au(t) = \int_0^1 G(t, qs) f(s, u(s)) d_qs \geq 0$, 即 $Au \in P$, 对任意 $u \in P$ 都成立, 显然 $A: P \rightarrow P$. 由(H1) – (H2) 可知, 算子 A 递增.

接下来证明算子 A 满足引理 2 的条件. 由(H1) 可得

$$\begin{aligned} A(ru)(t) &= \int_0^1 G(t, qs) f(s, ru(s)) d_qs \geq \\ &\int_0^1 G(t, qs) \varphi(r) f(s, u(s)) d_qs = \\ &\varphi(r) Au(t), t \in [0, 1] \end{aligned} \quad (10)$$

即对每一个 $u \in P$, $r \in (0, 1)$, 有 $A(ru) \geq \varphi(r) Au$.

令 $h_0 = h$, 接下来证明 $Ah_0 = Ah \in P_h$. 由(H2) 和 $G(t, qs)$ 的性质可知

$$\begin{aligned} Ah(t) &= \int_0^1 G(t, qs) f(s, h(s)) d_qs = \\ &\int_0^1 G(t, qs) f(s, s^{\alpha-1}) d_qs \geq \\ &\int_0^1 \frac{M_0 t^{\alpha-1} qs (1-qs)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)(1-\beta\eta^{\alpha-1})} f(s, 0) d_qs = \\ &\frac{M_0 q t^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)(1-\beta\eta^{\alpha-1})} \int_0^1 s(1-qs)^{(\alpha-1)} f(s, 0) d_qs, t \in [0, 1] \\ Ah(t) &= \int_0^1 G(t, qs) f(s, h(s)) d_qs \leq \\ &\int_0^1 \frac{t^{\alpha-1} (1-qs)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)(1-\beta\eta^{\alpha-1})} f(s, 1) d_qs = \\ &\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)(1-\beta\eta^{\alpha-1})} \int_0^1 (1-qs)^{(\alpha-1)} f(s, 1) d_qs, t \in [0, 1] \end{aligned}$$

令

$$L_1 = \frac{M_0 q}{\Gamma_q(\alpha)(1-\beta\eta^{\alpha-1})} \int_0^1 s(1-qs)^{(\alpha-1)} f(s, 0) d_qs$$

$$L_2 = \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)(1-\beta\eta^{\alpha-1})} \int_0^1 (1-qs)^{(\alpha-1)} f(s, 1) d_qs$$

利用 $f(t, x)$ 关于第二个变量 x 的单调递增性可知

$$\int_0^1 s(1-qs)^{(\alpha-1)} f(s, 0) d_qs \leq \int_0^1 (1-qs)^{(\alpha-1)} f(s, 1) d_qs$$

又 $M_0 q \leq 1$ 且 $f(t, 0) \equiv 0$, 则 $0 < L_1 \leq L_2$, 故 $Ah(t) \geq L_1 t^{\alpha-1}$, $Ah(t) \leq L_2 t^{\alpha-1}$, $t \in [0, 1]$. 即 $L_1 h \leq Ah \leq L_2 h$, 则 $Ah \in P_h$.

由引理 2 可知, 存在唯一的解 $u_\lambda^* \in P_h$ 使得 $A(u_\lambda^*) = \frac{1}{\lambda} u_\lambda^*$, 则 $u_\lambda^* = \lambda A(u_\lambda^*)$, 即

$$u_\lambda^*(t) = \lambda \int_0^1 G(t, qs) f(s, u_\lambda^*(s)) d_qs, t \in [0, 1] \quad (11)$$

由引理 3 可知:

(I) 对给定的 $\lambda > 0$, u_λ^* 是方程(1)唯一的正解;

(II) u_λ^* 关于 λ 严格递增(即当 $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ 时, 有 $u_{\lambda_1}^* < u_{\lambda_2}^*$);

(III) $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \|u_\lambda^*\| = 0$, $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \|u_\lambda^*\| = +\infty$;

(IV) 如果存在 $\gamma \in (0, 1)$, 使得 $\varphi(t) > t^\gamma$, $t \in [0, 1]$, 那么 u_λ^* 关于 λ 连续, 即当 $\lambda \rightarrow \lambda_0$ 时, $\|u_\lambda^* - u_{\lambda_0}^*\| \rightarrow 0$.

若令 $A_\lambda = \lambda A$, 那么 A_λ 也满足引理 2 的所有条件. 故由引理 2 可知, 对于任意初值 $u_0 \in P_h$, 构造迭代序列 $u_n = A_\lambda u_{n-1}$ ($n = 1, 2, \dots$), 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $u_n \rightarrow u_\lambda^*$, 即 $u_n(t) = \lambda \int_0^1 G(t, qs) f(s, u_{n-1}(s)) d_qs$ ($n = 1, 2, \dots$), $t \in [0, 1]$, 且当 $n \rightarrow \infty$ 时, $u_n(t) \rightarrow u_\lambda^*(t)$. 证毕.

特别地, 定理 1 中当 $\lambda = 1$ 时可以得到以下推论.

推论 1 假设(H1)–(H3)成立, 那么下列分数阶 q -导数边值问题

$$\begin{cases} D_q^\alpha u(t) + f(t, u(t)) = 0 & 0 < t < 1 \\ u(0) = 0 & u(1) = \beta u(\eta) \end{cases} \quad (12)$$

有唯一的正解 $u^* \in P_h$, 这里 $h(t) = t^{\alpha-1}$, $t \in [0, 1]$, $1 < \alpha \leq 2$, $0 < \eta < 1$, $0 < \beta\eta^{\alpha-1} < 1$. 此外对于任意初值 $u_0 \in P_h$, 构造迭代序列 $u_n = Au_{n-1}$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时 $u_n \rightarrow u^*$, 即 $u_n(t) = \int_0^1 G(t, qs) f(s, u_{n-1}(s)) d_qs$ 且当 $n \rightarrow \infty$ 时 $u_n(t) \rightarrow u^*(t)$.

参考文献:

- [1] FERREIRA R A C. Positive Solutions for a Class of Boundary Value Problems with Fractional Q -Differences [J]. Computers & Mathematics With Applications, 2011, 61(2): 367-373.
- [2] AGARWAL R P. Certain Fractional Q -Integrals and Q -Derivatives [J]. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1969, 66(2): 365-370.
- [3] ZHAI C B, REN J. The Unique Solution for a Fractional q -Difference Equation with Three-Point Boundary Conditions [J]. Indagationes Mathematicae, 2018, 29(3): 948-961.
- [4] REN J, ZHAI C B. A Fractional q -Difference Equation with Integral Boundary Conditions and Comparison Theorem [J]. International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 2017, 18(7-8): 575-583.
- [5] AHMAD B, NTOUYAS S K, PURNARAS I K. Existence Results for Nonlocal Boundary Value Problems of Nonlinear Fractional q -Difference Equations [J]. Advances in Difference Equations, 2012, 2012(1): 1-15.
- [6] GRAEF J R, KONG L J. Positive Solutions for a Class of Higher Order Boundary Value Problems with Fractional Q -Derivatives [J]. Applied Mathematics and Computation, 2012, 218(19): 9682-9689.
- [7] 吕亚丹. $2n$ 阶线性 q -差分方程的奇异边值问题的谱理论 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2015, 40(3): 11-17.
- [8] AHMAD B, ETEMAD S, ETTEFAGH M, et al. On the Existence of Solutions for Fractional q -Difference Inclusions

- with q -Antiperiodic Boundary Conditions [J]. *Bulletin Mathématiques DeLaSociété Des Sciences Mathématiques De Roumanie*, 2016, 59(107): 119-134.
- [9] GUO F R, KANG S G. Positive Solutions for a Class of Fractional Boundary Value Problem with q -Derivatives [J]. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 2019, 16(5): 1-16.
- [10] 郭彩霞, 郭建敏, 田海燕, 等. 一类分数阶奇异 q -差分方程边值问题解的存在性和唯一性 [J]. *西南师范大学学报(自然科学版)*, 2018, 43(12): 6-10.
- [11] ZHAI C B, WANG F. Properties of Positive Solutions for the Operator Equation $Ax=\lambda x$ and Applications to Fractional Differential Equations with Integral Boundary Conditions [J]. *Advances in Difference Equations*, 2015, 2015(1): 1-10.
- [12] ZHAI C B, HAO M R. Fixed Point Theorems for Mixed Monotone Operators with Perturbation and Applications to Fractional Differential Equation Boundary Value Problems [J]. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 2012, 75(4): 2542-2551.
- [13] ZHAI C B, YANG C, ZHANG X Q. Positive Solutions for Nonlinear Operator Equations and Several Classes of Applications [J]. *Mathematische Zeitschrift*, 2010, 266(1): 43-63.
- [14] 郭大钧. 非线性泛函分析 [M]. 2 版. 济南: 山东科学技术出版社, 2001: 1-550.

On Positive Solutions to a Class of Fractional q -Derivative Three-Point Boundary Value Problem

GUO Fu-ri, LUO Fang, KANG Shu-gui

School of Mathematical and Statistics, Shanxi Datong University, Datong Shanxi 037009, China

Abstract: We are interested in the existence and uniqueness of positive solution for a class of nonlinear fractional q -derivative three-point boundary value problem with parameter. Based upon the characteristics of the operator equations $Ax=\lambda x$, we get some properties of positive solution dependent on the parameter $\lambda>0$.

Key words: fractional q -derivative; three-point boundary value problem; parameter; positive solution

责任编辑 张 杓