

基于工程菌控制蚊子的动力学建模与分析^①

陈盼盼, 钟浩南, 王稳地

西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715

摘要: 结合工程菌在蚊子中水平和垂直传播的两种方式, 建立了蚊子种群动力学模型. 得到系统边界平衡点的稳定性条件以及正平衡点的存在性条件. 随后在某些特定条件下得到系统边界平衡点的全局稳定性, 以及系统正平衡点的存在性和稳定性. 模型显示, 在细菌感染蚊子的过程中, 存在一个最低水平传播率, 只有在高于该值时, 细菌对疟疾的控制才有效.

关键词: 工程细菌; 水平传播; 垂直传播; 阶段结构; 全局稳定性

中图分类号: O175

文献标志码: A

文章编号: 1000-5471(2021)05-0025-07

文献[1-3]表明基因改造蚊子是预防和控制蚊媒疾病的有效武器. 文献[4-5]中提出重组后的工程共生细菌, 标记为 *Serratia* AS1. 他们观察到蚊子在交配过程中, *Serratia* AS1 细菌可以从携带细菌的蚊子转移到未携带的蚊子身上, 并且 *Serratia* AS1 细菌可以附着在产下的卵上, 并被从这些卵中孵化出来的幼虫吞食, 随后附着在这些幼虫体内并在幼蚊中被大量繁殖, 这些现象说明 *Serratia* AS1 细菌不仅可以在蚊子种群中水平传播, 也可以垂直传播到下一代. 此外, *Serratia* AS1 细菌对蚊子的寿命和繁殖力没有明显的负面影响. 因此, 我们考虑将蚊子通过生物方法使其携带 *Serratia* AS1 细菌, 来控制疾病的传播.

文献[6-8]建立了在离散时间、连续时间下转基因细菌在蚊子种群中传播行为的数学模型, 为以后研究转基因细菌在蚊子中的传播行为的相关数学模型奠定了基础, 但仅考虑了转基因细菌可以从携带细菌的幼蚊转到未携带细菌的幼蚊, 没有考虑细菌在成蚊之间的传播. 本文的 *Serratia* AS1 细菌不仅可以在蚊子种群之间通过繁殖传给下一代, 同时还可以通过交配活动从携带细菌的成蚊传到未携带细菌的成蚊中. 因此为了更加全面地分析共生工程细菌 *Serratia* AS1 细菌在蚊子中的传播, 我们建立了 *Serratia* AS1 细菌下蚊子具有阶段结构的数学模型.

1 模型建立

首先, 令 l_1, x, l_2, y 分别表示野生幼蚊、野生成蚊、携带细菌幼蚊、携带细菌成蚊的数量. 随后, 记 $\frac{a_1 x^2}{x+y}$ 为野生成蚊和野生成蚊交配产生的后代的出生函数, 其中 a_1 表示野生成蚊与野生成蚊交配后野生幼蚊的出生率. 记 $\frac{a_2 y^2}{x+y}$ 为携带细菌成蚊和携带细菌成蚊交配后携带细菌幼蚊的出生函数, 其中 a_2 表示携带细菌成蚊与携带细菌成蚊交配产生后代为携带细菌幼蚊的出生率. 记 $\frac{p_1 a_3 xy}{x+y}$ 为野生成蚊和携带细菌成蚊交配后产生的后代中一部分为未带菌幼蚊和一部分为携带细菌幼蚊的出生函数, 其中 a_3 表示野生成蚊和携

① 收稿日期: 2020-09-25

基金项目: 国家自然科学基金项目(12071381).

作者简介: 陈盼盼, 硕士研究生, 主要从事生物数学研究.

通信作者: 王稳地, 教授, 博士研究生导师.

带细菌成蚊进行交配产生后代的出生率, p_1 表示产生的后代中野生幼蚊所占的比值. 接下来考虑 *Serratia* AS1 细菌在蚊子种群中的水平传播. 令 c 为野生的成年蚊子与携带细菌的成年蚊子的性接触率, γ 为携带细菌成蚊与野生成蚊交配后野生成蚊变为携带细菌成蚊的概率, 得到细菌在蚊子种群中的水平传播函数为 $\frac{\gamma cxy}{x+y}$. 最后, 考虑蚊子种群的特点, 规定几个常用参数. 记 δ 为幼蚊的成熟率, μ_1 为幼蚊的死亡率, 则 μ_2 为成蚊的死亡率, α 为幼年蚊子种群之间进行竞争的概率. 至此, 我们得到了系统(1).

$$\begin{cases} \frac{dl_1}{dt} = \frac{a_1 x}{x+y} \cdot x + \frac{p_1 a_3 xy}{x+y} - \delta l_1 - \mu_1 l_1 - \alpha(l_1 + l_2)l_1 \\ \frac{dx}{dt} = \delta l_1 - \mu_2 x - \frac{\gamma cxy}{x+y} \\ \frac{dl_2}{dt} = \frac{a_2 y}{x+y} \cdot y + (1-p_1) \frac{a_3 xy}{x+y} - \delta l_2 - \mu_1 l_2 - \alpha(l_1 + l_2)l_2 \\ \frac{dy}{dt} = \delta l_2 - \mu_2 y + \frac{\gamma cxy}{x+y} \end{cases} \quad (1)$$

本系统的 $\frac{\gamma cxy}{x+y}$ 和 $\frac{p_1 a_3 xy}{x+y}$ 等传播项体现了细菌在蚊子之间的水平传播和成蚊之间的垂直传播, 因而更加全面地反映了工程细菌在蚊子种群中的传播方式.

2 模型分析

2.1 边界平衡点

我们首先分析下列两个系统:

$$\begin{cases} \frac{dl_1}{dt} = a_1 x - \delta l_1 - \mu_1 l_1 - \alpha l_1^2 =: M(l_1, x) \\ \frac{dx}{dt} = \delta l_1 - \mu_2 x =: N(l_1, x) \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \frac{dl_2}{dt} = a_2 y - \delta l_2 - \mu_1 l_2 - \alpha l_2^2 \\ \frac{dy}{dt} = \delta l_2 - \mu_2 y \end{cases} \quad (3)$$

易求得系统(2)和系统(3)的正平衡点分别为 $\mathbf{E}_1^c = (l_1^{(0)}, x^{(0)})$, $\mathbf{E}_2^c = (l_2^{(0)}, y^{(0)})$, 其中

$$l_1^{(0)} = \frac{a_1 \delta}{\alpha \mu_2} - \frac{\delta}{\alpha} - \frac{\mu_1}{\alpha}, \quad x^{(0)} = \frac{\delta}{\mu_2} l_1^{(0)}, \quad l_2^{(0)} = \frac{a_2 \delta}{\alpha \mu_2} - \frac{\delta}{\alpha} - \frac{\mu_1}{\alpha}, \quad y^{(0)} = \frac{\delta}{\mu_2} l_2^{(0)}$$

引理 1 当 $a_1 \delta > \mu_1 \mu_2 + \delta \mu_2$ 时, 系统(2)仅存在正平衡点 $\mathbf{E}_1^c$ 且全局渐近稳定; 当 $a_2 \delta > \mu_1 \mu_2 + \delta \mu_2$ 时, 则系统(3)仅存在正平衡点 $\mathbf{E}_2^c$, 且全局渐近稳定.

证 首先, 计算系统(2)在 $\mathbf{E}_1^c$ 的雅可比矩阵为

$$\mathbf{J}_1 = \begin{pmatrix} -\delta - \mu_1 - 2\alpha l_1^{(0)} & a_1 \\ \delta & -\mu_2 \end{pmatrix}$$

经计算, 当 $\delta a_1 > \mu_1 \mu_2 + \delta \mu_2$ 时, $\text{Det} \mathbf{J}_1 > 0$, $\text{Tr} \mathbf{J}_1 < 0$. 因此 $\mathbf{J}_1$ 的两个特征值含有负实部, 则 $\mathbf{E}_1^c$ 局部渐近稳定.

下面分析 $\mathbf{E}_1^c$ 的全局稳定性. 构造函数 $B_1(l_1, x) = \frac{1}{\alpha l_1 + 1}$, 有

$$\begin{cases} B_1(l_1, x)M(l_1, x) = \frac{a_1 x - \delta l_1 - \mu_1 l_1 - \alpha l_1^2}{\alpha l_1 + 1} \\ B_1(l_1, x)N(l_1, x) = \frac{\delta l_1 - \mu_2 x}{\alpha l_1 + 1} \end{cases} \quad (4)$$

将(4)式沿着系统(2)求导, 得到

$$\frac{\partial B_1 M}{\partial l_1} + \frac{\partial B_1 N}{\partial x} = -\frac{(\alpha l_1)^2 + \delta + \mu_1 + 2\alpha l_1 + a_1 x + \alpha l_1 \mu_2 + \mu_2}{(\alpha l_1 + 1)^2} < 0$$

由 Dulac 定理^[9] 可知, 系统(2) 在平面内无极限环, 则 $\mathbf{E}_1^c$ 全局渐近稳定. 参考以上方法, $\mathbf{E}_2^c$ 全局渐近稳定.

参考系统(2) 和系统(3) 正平衡点的分析, 得到系统(1) 的边界平衡点为

$$\mathbf{E}_1^{(0)} = (l_1^{(0)}, x^{(0)}, 0, 0), \mathbf{E}_2^{(0)} = (0, 0, l_2^{(0)}, y^{(0)})$$

经分析, 下面定理显然成立.

定理 1 系统(1) 的边界平衡点 $\mathbf{E}_i^{(0)}$ ($i = 1, 2$) 存在的充分必要条件为 $a_i > \mu_2 + \frac{\mu_1 \mu_2}{\delta}$, $i = 1, 2$. 下面分析边界点 $\mathbf{E}_1^{(0)}$ 和 $\mathbf{E}_2^{(0)}$ 的局部稳定性.

定理 2 当 $\gamma c < \mu_2 \left[1 - \frac{a_3(1-p_1)}{a_1} \right]$ 成立时, $\mathbf{E}_1^{(0)}$ 局部渐近稳定; 当 $\gamma c > \mu_2 \left(\frac{p_1 a_3}{a_2} - 1 \right)$ 成立时, $\mathbf{E}_2^{(0)}$ 局部渐近稳定.

证 首先, 计算系统(1) 在 $\mathbf{E}_1^{(0)}$ 的雅可比矩阵为

$$\mathbf{J}_1^{(0)} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{J}_2 \\ 0 & \mathbf{J}_3 \end{pmatrix}$$

其中

$$\mathbf{J}_1 = \begin{pmatrix} -\delta - \mu_1 - 2\alpha l_1^{(0)} & a_1 \\ \delta & -\mu_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{J}_3 = \begin{pmatrix} -\delta - \mu_1 - \alpha l_1^{(0)} & (1-p_1)a_3 \\ \delta & -\mu_2 + \gamma c \end{pmatrix}$$

经计算, 当 $\gamma c < \mu_2 \left[1 - \frac{a_3(1-p_1)}{a_1} \right]$ 时, $\text{Det} \mathbf{J}_3 > 0$, $\text{Tr} \mathbf{J}_3 < 0$. 因此 $\mathbf{J}_3$ 的两个特征值含有负实部. 结合引

理 1, 当 $\gamma c < \mu_2 \left[1 - \frac{a_3(1-p_1)}{a_1} \right]$ 时, 系统(1) 的边界平衡点 $\mathbf{E}_1^{(0)}$ 局部渐近稳定. 类似地, 当 $\gamma c >$

$\mu_2 \left(\frac{p_1 a_3}{a_2} - 1 \right)$ 时, 系统(1) 的边界平衡点 $\mathbf{E}_2^{(0)}$ 局部渐近稳定.

接下来研究系统(1) 边界点的全局稳定性. 限于技术原因, 仅考虑 $\gamma = 0$, 系统(1) 简化为以下系统:

$$\begin{cases} \frac{dl_1}{dt} = \frac{a_1 x}{x+y} \cdot x + \frac{p_1 a_3 xy}{x+y} - \delta l_1 - \mu_1 l_1 - \alpha(l_1 + l_2)l_1 \\ \frac{dx}{dt} = \delta l_1 - \mu_2 x \\ \frac{dl_2}{dt} = \frac{a_2 y}{x+y} \cdot y + (1-p_1) \frac{a_3 xy}{x+y} - \delta l_2 - \mu_1 l_2 - \alpha(l_1 + l_2)l_2 \\ \frac{dy}{dt} = \delta l_2 - \mu_2 y \end{cases} \quad (5)$$

经分析得到下面定理.

定理 3 当 $a_1 < a_3(1-p_1)$ 且 $a_2 > a_3 p_1$ 时, 系统(5) 的边界点平衡点 $\mathbf{E}_2^{(0)}$ 全局渐近稳定; 当 $a_2 < a_3 p_1$ 且 $a_1 > a_3(1-p_1)$ 时, 系统(5) 的边界点平衡点 $\mathbf{E}_1^{(0)}$ 全局渐近稳定.

证 首先, 利用文献[8] 中的变量代换. 令 $u = \frac{l_2}{l_1}$, $v = \frac{y}{x}$, 得到下面系统:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{x}{l_1} \left[\frac{a_2 v^2 + a_3(1-p_1)v - a_3 p_1 uv - a_1 u}{1+v} \right] \\ \frac{dv}{dt} = \frac{\delta l_1}{x} (u-v) \\ \frac{dl_1}{dt} = \frac{a_1 x}{1+v} - \delta l_1 - \mu_1 l_1 - \alpha(1+u) l_1^2 \\ \frac{dx}{dt} = \delta l_1 - \mu_2 x \end{cases} \quad (6)$$

接下来分析由 u 和 v 张成的向量场平面图(图 1). 令(6) 式的第 1, 2 方程的右端为零, 得到下面两个函数:

$$u = \frac{a_2 v^2 + a_3(1-p_1)v}{a_3 p_1 v + a_1} := g(v), u = v := g_1(v)$$

根据 $g(v), g_1(v)$, 向量场可以分为 3 部分 S_1, S_2 和 S_3 , 其中

$$S_1 = \{(v, u) \mid u > g(v)\}, S_2 = \{(v, u) \mid g_1(v) < u < g(v)\}, S_3 = \{(v, u) \mid u < g_1(v)\}$$

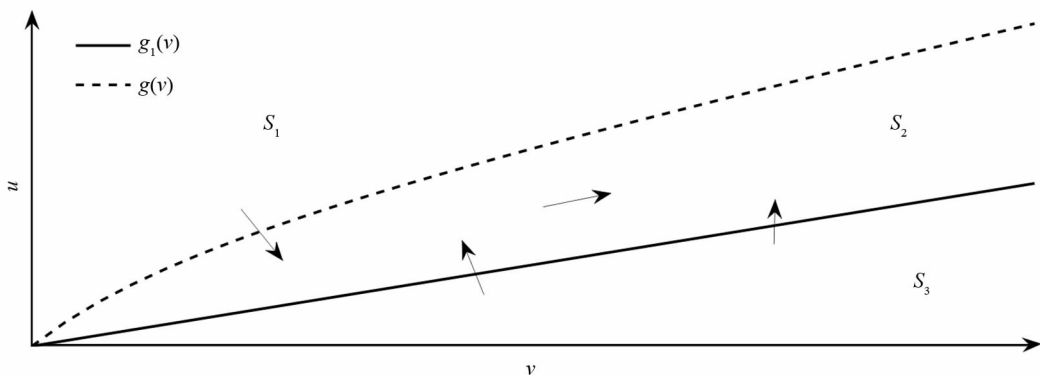


图 1 向量场示意图

记

$$g_2(v) = g(v) - g_1(v) = \frac{(a_2 - p_1 a_3)v^2 + (a_3(1-p_1) - a_1)v}{a_3 p_1 v + a_1}$$

经计算, 当 $a_2 > a_3 p_1$ 且 $a_1 < a_3(1-p_1)$ 时, $g_2(v) > 0 (v > 0)$ 恒成立. 因此 $(v, u) \in S_1$ 时, (v, u) 最终进入 S_2 . 当 $(v, u) \in S_3$ 时, (v, u) 最终进入 S_2 . 当 $(v, u) \in S_2$ 时, S_2 为不变集. 需保证 $\frac{du}{dt} > 0, \frac{dv}{dt} > 0$,

不妨设 $(v, u) \rightarrow K = (k_1, k_2), K \in S_2$, 此时 $\frac{du}{dt} + \frac{dv}{dt} > 0 = 0$. 另一方面由

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + \frac{dv}{dt} &= \frac{x}{l_1} \left[\frac{a_2 v^2 + a_3(1-p_1)v - a_3 p_1 uv - a_1 u}{1+v} \right] + \frac{\delta l_1}{x} (u-v) \geq \\ &2 \sqrt{\delta q_1 q_2} \geq 2 \sqrt{\delta} \min(q_1, q_2) > 0 \end{aligned}$$

其中 $q_1 = \frac{a_2 v^2 + a_3(1-p_1)v - a_3 p_1 uv - a_1 u}{1+v}, q_2 = u-v$, 二者矛盾. 或者当 $k_i (i=1,2) \rightarrow +\infty$ 时 $\frac{dv}{dt} \rightarrow 0$,

$\frac{du}{dt} \rightarrow +\infty \left(\frac{dv}{dt} \rightarrow +\infty, \frac{du}{dt} \rightarrow 0 \right)$, 显然矛盾. 因此 $u \rightarrow +\infty, v \rightarrow +\infty (t \rightarrow +\infty)$. 由于

$$\frac{dl_1}{dt} + \frac{dx}{dt} = \frac{a_1 x}{1+v} - \mu_1 l_1 - \mu_2 x - \alpha(1+u) l_1^2 < - \left(\mu_2 - \frac{a_1}{1+v} \right) x - \mu_1 l_1$$

对 $\forall M \in \mathbb{R}_+$, 存在 t_0 使得当 $t > t_0$ 时, 有 $v(t) > M$. 因此 $\frac{dl_1}{dt} + \frac{dx}{dt} < - \left[\mu_2 - \frac{a_1}{1+M} \right] x - \mu_1 l_1$. 设 $\mu_2 = \mu_1 + \varepsilon, \varepsilon > 0$, 则

$$\frac{dl_1}{dt} + \frac{dx}{dt} < -\mu_1(l_1 + x) - \varepsilon x < -\mu_1(l_1 + x)$$

记 $\frac{dl_1^*}{dt} + \frac{dx^*}{dt} = -\mu_1(l_1^* + x^*)$, 取初始值为 (l_{10}, x_0) , 有 $(l_1^* + x^*) \rightarrow 0 (t > t_0)$. 根据比较定理有 $(l_1 + x) \rightarrow 0 (t \rightarrow +\infty)$, 因此 $l_1 \rightarrow 0, x \rightarrow 0 (t \rightarrow +\infty)$. 易证 l_2, y 有界, 结合引理 1 可知 $(l_2, y) \rightarrow (l_2^{(0)}, y^{(0)}) (t \rightarrow +\infty)$. 因此 $E_2^{(0)}$ 全局吸引. 类似地, 令 $u = \frac{l_2}{l_1}, v = \frac{y}{x}$, 则 $E_1^{(0)}$ 全局吸引得证.

2.2 正平衡点的存在性

直接对系统(1)的地方病平衡点进行分析是困难的. 同样地, 利用文献[8]中的变量代换. 令 $u = \frac{l_2}{l_1}$,

$v = \frac{y}{x}$, 得到系统(7):

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{x}{l_1} \left[\frac{a_2 v^2 + a_3(1-p_1)v - a_3 p_1 uv - a_1 u}{1+v} \right] \\ \frac{dv}{dt} = \frac{\delta l_1}{x} (u-v) + \gamma cv \\ \frac{dl_1}{dt} = x \frac{a_1 + a_3 p_1 v}{1+v} - \delta l_1 - \mu_1 l_1 - \alpha(1+u)l_1^2 \\ \frac{dx}{dt} = \delta l_1 - \mu_2 x - \frac{\gamma cxv}{1+v} \end{cases} \quad (7)$$

下面分析系统(7)的正平衡点. 令系统(7)的第2,4方程的右端为零, 计算得到

$$u = v \left(1 - \frac{\gamma c + \gamma cv}{\mu_2 + \mu_2 v + \gamma cv} \right) \quad (8)$$

将(8)式代入(7)式的第1方程中, 并且令该方程为零, 得到

$$F(v) = A_1 v^2 + A_2 v + A_3 = 0$$

其中 $A_1 = b_1 + a_2 \gamma c$, $A_2 = b_1 + b_2 + a_3 \gamma c$, $A_3 = b_2 + a_1 \gamma c$, 记 $b_1 = (a_2 - a_3 p_1) \mu_2$, $b_2 = [a_3(1-p_1) - a_1] \mu_2$. 另外, 记函数 $F(v)$ 的判别式为 Δ . 则对于系统(1)正平衡点存在性的讨论, 即为对系统(7)的正解讨论, 从而将其转化为对二次函数 $F(v)$ 的正解讨论, 因此得到下面定理.

定理4 (i) 当 $\Delta < 0$ 时, 则系统(1)没有地方病平衡点.

(ii) 当 $\Delta > 0$ 且 $A_1 A_3 > 0$, $A_1 A_2 > 0$ 成立时, 系统(1)没有地方病平衡点.

(iii) 当 $\Delta = 0$ 且 $A_1 A_3 > 0$, $A_1 A_2 < 0$ 成立时, 系统(1)有且仅有一个地方病平衡点 E_1 .

(iv) 当 $\Delta > 0$ 且 $A_1 A_3 < 0$, $A_1 A_2 > 0$ 成立时, 系统(1)有且仅有一个地方病平衡点 E_1 .

(v) 当 $\Delta > 0$ 且 $A_1 A_3 > 0$, $A_1 A_2 < 0$ 成立时, 系统(1)有两个地方病平衡点 E_1 和 E_2 .

接下来, 我们仅考虑两种特定参数下的两个系统. 令 $a_1 = a_2$, $p_1 = 0$, 得到下面系统:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{x}{l_1} \cdot \frac{a_1 v^2 + a_3 v - a_1 u}{1+v} \\ \frac{dv}{dt} = \delta \frac{l_1}{x} (u-v) + \gamma cv \\ \frac{dl_1}{dt} = \frac{a_1 x}{1+v} - \delta l_1 - \mu_1 l_1 - \alpha(1+u)l_1^2 \\ \frac{dx}{dt} = \delta l_1 - \mu_2 x - \frac{\gamma cxv}{1+v} \end{cases} \quad (9)$$

经过分析该系统的地方病平衡点得到下面定理.

定理5 当 $\gamma c < \mu_2 \left(1 - \frac{a_3}{a_1} \right)$ 时, 系统(9)有且仅有一个地方病平衡点 E_1 , 且 E_1 是一个鞍点.

证 类似系统(7)正解存在的讨论方法, 只讨论二次函数 $F_1(v)$ 的正解即可. 经计算

$$F_1(v) = (a_1 \mu_2 + a_1 \gamma c) v^2 + (a_3 \mu_2 + a_3 \gamma c) v + ((a_3 - a_1) \mu_2 + a_1 \gamma c)$$

由于 $\Delta > 0$, 且函数 $F_1(v)$ 的对称轴小于零, 则当 $\gamma c < \mu_2 \left(1 - \frac{a_3}{a_1} \right)$ 时系统(9)有且仅有一个正平衡点. 令 v_1 为 $F_1(v)$ 的一个正解, 令系统(9)的第3,4方程右端为零, 计算得到

$$\alpha(1+u_1)l_{11} = \frac{\delta a_1}{\mu_2 + \mu_2 v_1 + \gamma c v_1} - \delta - \mu_1$$

显然 $l_{11} > 0$, 则 $x_1 > 0$. 根据 $u = \frac{l_2}{l_1}$, $v = \frac{y}{x}$ 可知 $l_{21} > 0$, $y_1 > 0$. 因此系统(9)存在一个地方病平衡点.

接下来, 分析系统(9)正解的稳定性. 记系统(9)的正解为 $E_1 = (u_1, v_1, l_{11}, x_1)$. 计算系统(9)在 E_1 的雅可比矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} J_1^* & J_2^* \\ J_3^* & J_4^* \end{pmatrix}$$

其中

$$\begin{aligned}
J_1^* &= \begin{pmatrix} -\frac{x}{l_1} \cdot \frac{a_1}{1+v} & \frac{x}{l_1} \cdot \frac{a_1 v^2 + 2a_1 v + a_3 + a_1 u}{(1+v)^2} \\ \delta \frac{l_1}{x} & -\delta \frac{l_1}{x} + \gamma c \end{pmatrix} \\
J_2^* &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\delta}{x}(u-v) & -\delta \frac{l_1}{x^2}(u-v) \end{pmatrix} \\
J_3^* &= \begin{pmatrix} al_1^2 & -\frac{a_1}{(1+v)^2} \cdot x \\ 0 & -\frac{\gamma c x}{(1+v)^2} \end{pmatrix} \\
J_4^* &= \begin{pmatrix} -(\delta + \mu_1) - 2\alpha(1+u)l_1 & \frac{a_1}{1+v} \\ \delta & -\mu_2 - \frac{\gamma c v}{1+v} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

随后, 可得系统(9)在 E_1 的特征多项式中的常数项 h_0 . 记 $h_0 = h_1 + h_2$, 其中

$$\begin{aligned}
h_1 &= \frac{\delta^2}{(\mu_2 + \mu_2 v + \gamma c v)^2} \cdot \frac{a_1}{1+v} \cdot \frac{\delta a_1 - (\delta + \mu_1)(\mu_2 + \mu_2 v + \gamma c v)}{\mu_2 + \mu_2 v + \gamma c v} \cdot \gamma^2 c^2 v - \\
&\quad \delta^2 \cdot v \cdot \frac{\gamma c + \gamma c v}{\mu_2 + \mu_2 v + \gamma c v} \cdot a_1 (1+v)^3 \\
h_2 &= -\delta^2 \frac{\mu_2 + \mu_2 v - \gamma c}{\mu_2 + \mu_2 v + \gamma c v} \cdot \frac{\delta a_1 - (\delta + \mu_1)(\mu_2 + \mu_2 v + \gamma c v)}{\mu_2 + \mu_2 v + \gamma c v} - \\
&\quad \delta \frac{a_1 v^2 + 2a_1 v + a_1 u + a_3}{(1+v)^3} [\delta a_1 - (\delta + \mu_1)(\mu_2 + \mu_2 v + \gamma c v)] + \\
&\quad \delta^2 \cdot \frac{v(\gamma c + \gamma c v)}{\mu_2 + \mu_2 v + \gamma c v} \cdot \frac{\delta a_1 - (\delta + \mu_1)(\mu_2 + \mu_2 v + \gamma c v)}{\mu_2 + \mu_2 v + \gamma c v} \cdot \frac{1}{1+u} \cdot \frac{a_1}{(1+v)^4}
\end{aligned}$$

由于 $\gamma c < \mu_2 \left(1 - \frac{a_3}{a_1}\right)$, 且 $a_3 < a_1$, 所以 $h_1 < 0$, $h_2 < 0$, 即 $h_0 < 0$. 故系统(9)有且仅有一个地方病平衡点 E_1 , 且 E_1 是一个鞍点.

接下来, 令 $a_1 = a_2$, $p_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha = 1$, 我们得到下面模型:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{x}{l_1} \cdot \frac{a_1 v^2 + \frac{1}{2}a_3 v - \frac{1}{2}a_3 uv - a_1 u}{1+v} \\ \frac{dv}{dt} = \delta \frac{l_1}{x}(u-v) + \gamma c v \\ \frac{dl_1}{dt} = x \frac{a_1 + \frac{1}{2}a_3 v}{1+v} - \delta l_1 - \mu_1 l_1 - (1+u)l_1^2 \\ \frac{dx}{dt} = \delta l_1 - \mu_2 x - \frac{\gamma c x v}{1+v} \end{cases} \quad (10)$$

参考定理 5 的证明得到下面定理.

定理 6 当 $\left[a_1 \gamma c + \left(\frac{a_3}{2} - a_1\right)\mu_2\right] \left[a_1 \gamma c + \left(a_1 - \frac{a_3}{2}\right)\mu_2\right] < 0$ 时, 则系统(10)有且仅有一个地方病平衡点 E_1 .

3 总 结

本文根据 Serratia AS1 细菌在蚊子种群中的传播特点, 建立了蚊子种群动力学模型. 我们得到系统边界平衡点的局部稳定性和正平衡点的存在性. 随后, 我们得到仅在垂直传播下, 若参数满足 $a_1 < a_3(1 -$

p_1) 和 $a_2 > a_3 p_1$ 条件, 最终仅有携带细菌的蚊子存活; 若参数满足 $a_1 > a_3(1 - p_1)$ 和 $a_2 < a_3 p_1$ 条件, 最终仅有野生蚊子存活. 最后在特定参数下得到若参数满足 $\gamma c < \mu_2 \left(1 - \frac{a_3}{a_1}\right)$, 则野生蚊子和携带细菌的蚊子共存. 综合以上分析, 若最终仅有携带细菌蚊子存活, 可以有效抑制疟原虫的生长, 即可以有效抑制疟疾的传播.

参考文献:

- [1] GHOSH A K, RIBOLLA P E, JACOBS-LORENA M. Targeting Plasmodium Ligands on Mosquito Salivary Glands and Midgut with a Phage Display Peptide Library [J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 2001, 98(23): 13278-13281.
- [2] RIEHLE M A, JACOBS-LORENA M. Using Bacteria to Express and Display Anti-Parasite Molecules in Mosquitoes: Current and Future Strategies [J]. Insect Biochemistry and Molecular Biology, 2005, 35(7): 699-707.
- [3] RIEHLE M A, MOREIRA C K, LAMPE D, et al. Using Bacteria to Express and Display Anti-Plasmodium Molecules in the Mosquito Midgut [J]. International Journal for Parasitology, 2007, 37(6): 595-603.
- [4] WANG S, GHOSH A K, BONGIO N, et al. Fighting Malaria with Engineered Symbiotic Bacteria from Vector Mosquitoes [J]. PNAS, 2012, 109(31): 12734-12739.
- [5] WANG S, DOS-SANTOSA L A, HUANG W, et al. Driving Mosquito Refractoriness to Plasmodium Falciparum with Engineered Symbiotic Bacteria [J]. Science, 2017, 357(6358): 1399-1402.
- [6] LI J. Differential Equations Models for Interacting Wild and Transgenic Mosquito Populations [J]. Journal of Biological Dynamics, 2008, 2(3): 241-258.
- [7] LI J. Malaria Model with Stage-Structured Mosquitoes [J]. Mathematical Biosciences and Engineering: MBE, 2011, 8(3): 753-768.
- [8] LI J, HAN M A, YU J S. Simple Paratransgenic Mosquitoes Models and Their Dynamics [J]. Mathematical Biosciences, 2018, 306: 20-31.
- [9] 马知恩, 周义仓. 常微分方程定性方法与稳定性方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2001: 182-183.

Dynamical Modeling and Analysis of Mosquito Control Through Engineering Bacteria

CHEN Pan-pan, ZHONG Hao-nan, WANG Wen-di

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: A mosquito population dynamical model has been established by combining with two channels of horizontal and vertical transmissions of Serratia AS1 bacteria among mosquitoes. The conditions has been obtained for the existence of boundary equilibrium and local stability of the system, and for the existence of positive equilibrium. Then the global stability of the system boundary equilibrium and the existence and stability of the system positive equilibrium under some specific conditions been also obtained. According to the model, a least value of horizontal transmission rate exists in the infection between bacteria and mosquitoes, and the control works only when the transmission rate exceeds the value.

Key words: engineering bacteria; horizontal transmission; vertical transmission; stage-structured; global stability