第 46 卷 第 6 期　　西 南 师 范 大 学 学 报（自然科学版）　　2021 年 6 月
Vol. 46　No. 6　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　Jun.　2021

DOI：10.13718/j.cnki.xsxb.2021.06.001

对称群 $S_n(n \leqslant 14)$ 的新刻画[①]

岳　念，　晏燕雄

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 设 G 是有限群，$o_1(G)$ 表示 G 中最高阶元素的阶，$n_1(G)$ 表示 G 中最高阶元素的个数. 设 G 一共有 r 个 $o_1(G)$ 阶元，且中心化子的阶两两不同，并依次设这些中心化子的阶为 $c_1(G), c_2(G), \cdots, c_r(G)$. 令 $\mathrm{ONC}_1(G) = \{o_1(G); n_1(G); c_1(G), c_2(G), \cdots, c_r(G)\}$，称为 G 的第一 ONC-度量. 本文得到：设 G 为有限群且 G 的素图不连通，则 $G \cong S_n(n \leqslant 14)$ 当且仅当 $\mathrm{ONC}_1(G) = \mathrm{ONC}_1(S_n)$.

关　键　词： 有限群；对称群；ONC-度量；素图

中图分类号：O152.1　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1000-5471(2021)06-0001-04

设 G 是有限群，$\pi_e(G)$ 表示群 G 中元素阶的集合，$\pi(G)$ 表示 $|G|$ 的相异素因子的集合，设 p 是素数，n 为正整数，则 $p^k \parallel n$ 表示 $p^k \mid n$ 但 $p^{k+1} \nmid n$. $\varphi(x)$ 表示 x 的欧拉函数. 文中其他符号和术语都是标准的(见文献[1-5]).

群的数量刻画一直是有限群论研究的热点，如何用最少的数量条件去刻画群的结构是群的数量刻画中非常有趣而又困难的问题. 施武杰教授提出用群的阶和群中元素的阶刻画有限非交换单群[2]，即：

猜想　设 G 是有限群，M 是有限非交换单群，则 $G \cong M$ 当且仅当 $|G| = |M|$ 且 $\pi_e(G) = \pi_e(M)$.

该猜想被文献[3]完全证明. 此后，许多群论工作者尝试弱化猜想条件来继续刻画群的结构. 文献[5]首先提出了第一 ONC-度量问题，研究发现，许多群的第一 ONC-度量只有 3 个数，且中心化子的阶决定了有限群的素图，并成功地证明了第一 ONC-度量能刻画 K-3 单群、李型群 $L_2(q)(q \in \{8, 11, 13, 17, 19, 23, 29\})$、Mathieu 群、Janko 单群及部分交错群 $A_n(5 \leqslant n \leqslant 15)$(见文献[5-8]). 此外，研究发现，对称群的 ONC-度量也只包含 3 个数. 文献[9]证明了：在 $\pi(G)$ 和 $\pi(S_n)$ 中的最大素数相等的情况下，对称群 $S_n(4 \leqslant n \leqslant 13)$ 能被第一 ONC-度量刻画. 本文继续了这一研究，并证明了对称群 $S_n(n = 12, 13, 14)$ 能用第一 ONC-度量刻画，即如下定理：

定理　设 G 为有限群且 G 的素图不连通，则 $G \cong S_n(n \leqslant 14)$ 当且仅当 $\mathrm{ONC}_1(G) = \mathrm{ONC}_1(S_n)$.

证　当 $n \leqslant 11$ 时显然成立，只需证明当 $12 \leqslant n \leqslant 14$ 的情况. 必要性显然，下面只证充分性.

情形 1　当 $n = 12$ 时，由文献[1]有

$$\mathrm{ONC}_1(G) = \mathrm{ONC}_1(S_{12}) = \{60;\ 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11;\ 60\}$$

① 收稿日期：2020-10-10

基金项目：国家自然科学基金项目(11171364，11271301)；中央高校专项基金项目(XDJK2019C116，XDJK2019B030)；西南大学教改项目(2018JY061).

作者简介：岳　念，硕士研究生，主要从事有限群的研究.

通信作者：晏燕雄，副教授.

设 g 是 G 中的60阶元，则 $|C_G(\langle g\rangle)|=|g|=60$. 因此 g 所在共轭类的长度为 $|Cl(g)|=|G:C_G(\langle g\rangle)|=\frac{|G|}{60}$. 设 G 的60阶元一共分为 t 个共轭类，则

$$n_1(G)=\frac{t\cdot|G|}{60}=2^8\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7\cdot 11$$

从而得到 $|G|\,\Big|\,2^{10}\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11$，且 $|G|>2^8\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7\cdot 11$. 设 a 为 G 的一个60阶元，则 $\varphi(60)=16$，循环群 $\langle a\rangle$ 中60阶元有16个，由60阶元生成的循环群 $\langle a\rangle$ 中，除16阶元外，还有43个其他阶的元素，故

$$|G|>2^8\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot\frac{1}{16}\cdot 43+2^8\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7\cdot 11=2^4\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 59$$

则 $o_1(G)=60$，故 $\{2,3,5\}\subseteq\pi(G)$. 若 $7\notin\pi(G)$，$11\notin\pi(G)$，则 $|G|_{\max}=2^{10}\cdot 3^5\cdot 5^2<2^4\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 59$，矛盾. 因此 $\pi(G)$ 有3种可能的情形：$\pi(G)=\{2,3,5,7,11\}$；$\pi(G)=\{2,3,5,7\}$；$\pi(G)=\{2,3,5,11\}$. 下面只讨论 $\pi(G)=\{2,3,5,7,11\}$ 的情形，其它2种情形可类似地证明.

由文献[8]，断言：G 有一正规列 $G\geqslant K>H\geqslant 1$，使得 K/H 为非交换单群，且 $\{7,11\}\subseteq\pi(K/H)$. 事实上，令 $1=G_k\trianglelefteq G_{k-1}\trianglelefteq\cdots\trianglelefteq G_1\trianglelefteq G_0=G$ 为 G 的主群列，则存在整数 i 使得 $\{7,11\}\cap\pi(G_i)\neq\varnothing$，而 $\{7,11\}\cap\pi(G_{i+1})=\varnothing$. 取 $K=G_i$，$H=G_{i+1}$，于是 $1\trianglelefteq H\trianglelefteq K\trianglelefteq G$ 为 G 的正规列，K/H 为 G/H 的极小正规子群，则 K/H 为同构单群的直积. 断言：$\{7,11\}\subseteq\pi(K/H)$，否则，若 $11\in\pi(K/H)$，$7\notin\pi(K/H)$，则 $7\in\pi(G/K)$. 由 Frattini 论断有 $G=N_G(P_{11})K$，其中 P_{11} 为 K 的 Sylow-11 子群，于是 $7\in\pi(N_G(P_{11}))$，故 $77\in\pi_e(G)$，矛盾. 因此 $7\in\pi(K/H)$. 同理，当 $7\in\pi(K/H)$ 时，有 $11\in\pi(K/H)$，由此得到 $\{7,11\}\subseteq\pi(K/H)$，故 K/H 为非交换单群的直积.

由文献[1]可得 $K/H\cong M_{22},A_{11},A_{12}$.

若 $K/H\cong M_{22}$，则存在 G 的正规子群 C_1，使得 $M_{22}\lesssim G/C_1\lesssim\mathrm{Aut}(M_{22})$. 当 $5^2\,\Big|\,|G|$ 时，有 $5\,\Big|\,|C_1|$，$o_1(M_{22})=11$. 则 G 中有11阶元. 设 P_5 为 C_1 的 Sylow-5 子群，由文献[10]，G 中11阶元作用在 P_5 上，知 $11\nmid(5-1)$，$11\nmid\mathrm{Aut}(P_5)$，故 $55\in\pi_e(G)$. 再取 G 的7阶元作用在 P_5 上，有 $5\times 7=35\in\pi_e(G)$，矛盾.

若 $K/H\cong A_{11}$，由文献[9]知，存在 G 的正规子群 C_2，使得 $A_{11}\lesssim G/C_2\lesssim S_{11}$. 从而 H 为 $\{2,3\}$-群. 设 $g\in G$，且 $|g|=60$. 由于 $G/C_G(K/H)\leqslant\mathrm{Aut}(K/H)$，且 $\mathrm{Aut}(K/H)$ 中没有60阶元，故存在 $gH\in C_G(K/H)$. 由于 gH 的阶至少是5，故 $55\in\pi_e(G)$. 而 A_{11} 有21阶元，故 G 中有21阶元，矛盾.

若 $K/H\cong A_{12}$，由文献[9]知，存在 G 的正规子群 C_3，使得 $A_{12}\lesssim G/C_3\lesssim S_{12}$. 故 $|C_3|=1,2$. 若 $|C_3|=2$，则 $|G|=2^{10}\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11=|S_{12}|$，$o_1(A_{12})=35$，故 G 有35阶元，取 G 的7阶元作用在子群 C_3 上得 $14\in\pi_e(G)$，矛盾. 故 $|C_3|=1$. 则 $A_{12}\lesssim G\lesssim S_{12}$，从而 $G\cong S_{12}$.

情形2　当 $n=13$ 时，由文献[1]有

$$\mathrm{ONC}_1(G)=\mathrm{ONC}_1(S_{13})=\{60;\ 2^8\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13;\ 60\}$$

同理得 $|G|\,\Big|\,2^{10}\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11\cdot 13$，且 $|G|>2^4\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 59$. 由于 $o_1(G)=60$，故 $\{2,3,5\}\subseteq\pi(G)$.

若 $13\notin\pi(G)$，则 $|G|=2^{10}\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11$. 此时，$G$ 有一正规列 $G\geqslant K>H\geqslant 1$ 使得 K/H 为非交换单群且 $\{7,11\}\subseteq\pi(K/H)$. 由文献[1]，$K/H\cong A_{11},A_{12}$. 故存在 G 的正规子群 C，使得

$$K/H\lesssim G/C\lesssim\mathrm{Aut}(K/H)$$

若 $A_{11}\lesssim G/C\lesssim\mathrm{Aut}(A_{11})=S_{11}$，则比较阶得，$C$ 为 $\{2,3\}$-群. 设 C 的 Sylow-3 子群为 P_3，则有

$|P_3|=3$. 取 G 的 11 阶元作用在 P_3 上，得 $33\in\pi_e(G)$. 再取 G 的 7 阶元作用在 P_3 上，可得 $21\in\pi_e(G)$. 从而素图连通，矛盾.

若 $A_{12}\lesssim G/C\lesssim \mathrm{Aut}(A_{12})=S_{12}$，此时 $|G|=|S_{12}|$，但 $o_1(S_{12})\neq o_1(S_{13})$，矛盾. 故 $13\in\pi(G)$. 若 $11\notin\pi(G)$，则 $|G|=2^{10}\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7\cdot 13$，矛盾. 从而 $\pi(G)=\{2,3,5,7,11,13\}$.

此时，G 有一正规列 $G\geqslant K>H\geqslant 1$，$K/H$ 为非交换单群，且 $\{11,13\}\subseteq\pi\{K/H\}$. 由文献[1]有 $K/H\cong A_{13}$，故有 $A_{13}\lesssim G/C\lesssim S_{13}$. 比较阶知 $|C|=1,2$. 若 $|C|=1$，$o_1(A_{13})\neq 60$，故 $G\cong S_{13}$. 当 $|C|=2$ 时，$|G|=|S_{13}|$，由文献[11]得 $G\cong S_{13}$.

情形 3　当 $n=14$ 时，由文献[1]有

$$\mathrm{ONC}_1(G)=\mathrm{ONC}_1(S_{14})=\{84;2^9\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11\cdot 13;84\}$$

从而 $|G|\,\big|\,2^{11}\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13$，且 $|G|>2^6\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13\cdot 83$. 若 $5\notin\pi(G)$，则 $|G|=2^{11}\cdot 3^5\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13<2^6\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13\cdot 83$，矛盾. 故 $5\in\pi(G)$.

若 $11\notin\pi(G)$，G 有一正规列 $G\geqslant K>H\geqslant 1$，使得 K/H 为非交换单群且 $\{7,13\}\subseteq\pi(K/H)$，由文献[1]知 $K/H\cong L_2(13),L_2(27),S_2(8),L_2(64)$. 故存在 G 的正规子群 C，使得 $K/H\lesssim G/C\lesssim \mathrm{Aut}(K/H)$. 比较阶有 $7\,\big|\,|C|$，取 G 的 13 阶元共轭作用在 C 上得 $91\in\pi_e(G)$，矛盾. 故 $11\in\pi(G)$.

若 $13\notin\pi(G)$，则 $|G|=2^{11}\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot 11$. 此时，$G$ 有一正规列 $G\geqslant K>H\geqslant 1$ 使得 K/H 为非交换单群，且 $\{7,11\}\subseteq\pi(K/H)$，由文献[1]知 $K/H\cong M_{22},A_{11},A_{12}$. 故存在 G 的正规子群 C，使得 $K/H\lesssim G/C\lesssim \mathrm{Aut}(K/H)$.

若 $M_{22}\lesssim G/C\lesssim \mathrm{Aut}(M_{22})$，则通过比较阶知 $5\,\big|\,|C|$. 考虑用 G 的 7 阶元、11 阶元分别共轭作用在子群 C 上，则 $35\in\pi_e(G)$ 且 $55\in\pi_e(G)$，矛盾. 故 $\pi(G)=\{2,3,5,7,11,13\}$.

若 $A_{11}\lesssim G/C\lesssim \mathrm{Aut}(A_{11})$ 或 $A_{12}\lesssim G/C\lesssim \mathrm{Aut}(A_{12})$，比较阶知 C 为 $\{2,3\}$-群或 2-群. 设 $g\in G$ 且 $|g|=84$，则 gH 至少为 7 阶元，取 G 的 11 阶元作用在 gH 上，有 $77\in\pi_e(G)$. 因为 $A_{11},S_{11},A_{12},S_{12}$ 中有 5 阶元，但 C 中无 5 阶元，从而 G 中有 5 阶元. 取 G 的 5 阶元共轭作用在 gH 上，则 $35\in\pi_e(G)$，矛盾.

若 $13\in\pi(G)$，则 $\pi(G)=\{2,3,5,7,11,13\}$，此时，G 有一正规列 $G\geqslant K>H\geqslant 1$，$K/H$ 为非交换单群，且 $\{11,13\}\subseteq(K/H)$，由文献[1]有 $K/H\cong A_{13},A_{14}$.

如果 $K/H\cong A_{13}$，则存在 G 的正规子群 C_1 满足 $A_{13}\lesssim G/C_1\lesssim \mathrm{Aut}(A_{13})=S_{13}$. 若 $7^2\,\big|\,|G|$，则 $7\,\big|\,|C_1|$. 取 G 的 13 阶元共轭作用在 C_1 的 Sylow-7 子群上，得 $91\in\pi_e(G)$，矛盾于 $o_1(G)=84$. 故 $7\parallel|G|$. 从而 H 为 2-群. 由 $G/C_G(K/H)\leqslant \mathrm{Aut}(K/H)$，设 $g\in G$ 且 $|g|=84$，而 $\mathrm{Aut}(K/H)$ 中没有 84 阶元，则存在 $gH\in C_G(K/H)$. 由于 gH 的阶至少是 21，从而 $21\times 13\in\pi_e(G)$，矛盾.

如果 $K/H\cong A_{14}$，则同理有 C_2 满足 $A_{14}\lesssim G/C_2\lesssim \mathrm{Aut}(A_{14})=S_{14}$. 比较阶得 $|C_2|=2,1$. 若 $|C_2|=2$，则 A_{14} 中有 45 阶元，故 G 中也有 45 阶元. 取 G 中的 45 阶元共轭作用在 C 上，则有 $90\in\pi_e(G)$，矛盾. 故 $|C_2|=1$，即 $A_{14}\lesssim G\lesssim S_{14}$. 由 $o_1(A_{14})=45$，而 $o_1(G)=84$，故只能 $G\cong S_{14}$.

参考文献：

[1]　CONWAY J H，CURTIS R T，NORTON S P，et al. Atlas of Finite Groups [M]. Oxford：Clarendon Press，1985.
[2]　MAZUROV V，KHUKHRO E I. The Kourovka Notebook：Unsolved Problems in Group Theorem [R]. Novosibirsk：

Institute of Mathematics, Russian Academy of Sciences, 2010.

[3] BRANDL R, SHI W J. Finite Groups Whose Element Orders Are Consecutive Integers [J]. Journal of Algebra, 1991, 143(2): 388-400.

[4] WILLIAM J S. Prime Graph Components of Finite Groups [J]. Journal of Algebra, 1981, 69(2): 487-513.

[5] HE L G, CHEN G Y. An New Characterization of Mathieu Groups [J]. 数学进展, 2017, 46(5): 729-734.

[6] HE L G, CHEN G Y. On ONC-Characterization of Simple K_{3-} Groups [J]. 数学进展, 2018, 47(6): 821-832.

[7] 何立官. 关于一些李型单群的 ONC-刻画 [J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2017, 34(5): 49-53.

[8] WANG Z B, HE L G, CHEN G Y. An ONC-Characterization of A_{14} and A_{15} [J]. Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, 2019, 41: 536-546.

[9] 夏雪琴, 何立官. 对称群 S_n($n\leqslant 13$)的新刻画 [J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2019, 42(4): 472-476.

[10] 徐明曜. 有限群初步 [M]. 北京: 科学出版社, 2014.

[11] 高彦伟, 曹洪平. 对称群 S_n($n\leqslant 15$)的一个新刻画 [J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2013, 30(6): 81-85.

An New Characterization of Symmetric Groups S_n ($n\leqslant 14$)

YUE Nian, YAN Yan-xiong

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: Let G be a finite group, $o_1(G)$ denote the largest element order of G, and $n_1(G)$ denote the number of the element of order $o_1(G)$. Assume that G totally has r elements of order $o_1(G)$, of which the centralizers are of different orders, and $c_i(G)$ denote the order of centralizer of i the element of order $o_1(G)$ ($i=1,2,\cdots,r$). Define $\mathrm{ONC}_1(G)=\{o_1(G);\ n_1(G);\ c_1(G),\ c_2(G),\ \cdots,\ c_r(G)\}$. We call $\mathrm{ONC}_1(G)$ the 1st ONC-degree of G. In this article it is proved that let G be a finite group and the prime graph of G is not connected, then $G\cong S_n$ ($n\leqslant 14$) if and only if $\mathrm{ONC}_1(G)=\mathrm{ONC}_1(S_n)$.

Key words: finite groups; symmetric groups; ONC-degree; prime graph

责任编辑 廖 坤