DOI: 10.13718/j.cnki.xsxb.2021.06.002

半群 $\mathscr{T}_{n,r}$ 的极大(正则)子半群的完全分类[①]

胡华碧[1], 赵 平[2]

1. 贵州医科大学 生物与工程学院，贵阳 550004；2. 贵州师范大学 数学科学学院，贵阳 550001

摘要：设 $\mathscr{S}_n$ 和 $\mathscr{T}_n$ 分别是 $X_n=\{1,2,\cdots,n\}$ 上的对称群和全变换半群. 对 $1\leqslant r\leqslant n$，令 $\mathscr{T}(n,r)=\{\alpha\in\mathscr{T}_n: |\mathrm{im}(\alpha)|\leqslant r\}$，则 $\mathscr{T}(n,r)$ 是全变换半群 $\mathscr{T}_n$ 的双边理想. 对 $1\leqslant r\leqslant n-1$，考虑半群 $\mathscr{T}_{n,r}=\mathscr{T}(n,r)\cup\mathscr{S}_n$，得到了半群 $\mathscr{T}_{n,r}$ 的极大子半群 S 有且仅有两类：$S=\mathscr{T}_{n,r}\backslash[\tau_i]\,(1\leqslant i\leqslant p=p_r(n))$ 和 $S=\mathscr{T}(n,r)\cup G$，其中 G 是群 $\mathscr{S}_n$ 的极大子半群. 同时，证明了半群 $\mathscr{T}_{n,r}$ 的极大子半群和极大正则子半群是一致的. 所得结果推广了已有的结果.

关 键 词：全变换半群；正则半群；极大子半群；极大正则子半群

中图分类号：O152.7 **文献标志码**：A **文章编号**：1000-5471(2021)06-0005-04

设 $\mathscr{S}_n$ 和 $\mathscr{T}_n$ 分别是 $X_n=\{1,2,\cdots,n\}$ 上的对称群和全变换半群. 对 $1\leqslant r\leqslant n$，令

$$\mathscr{T}(n,r)=\{\alpha\in\mathscr{T}_n:|\mathrm{im}(\alpha)|\leqslant r\}$$

则 $\mathscr{T}(n,r)$ 是全变换半群 $\mathscr{T}_n$ 的双边理想. 记 $\mathrm{Sing}_n=\mathscr{T}_n\backslash\mathscr{S}_n$，称 Sing_n 为 X_n 上的奇异变换半群. 显然

$$\mathrm{Sing}_n=\mathscr{T}(n,n-1)$$

半群理论是群理论的自然推广，半群子结构的研究一直都是半群理论研究的热点问题之一，目前已有许多研究成果[1-18]. 特别地，文献[1]刻画了全变换半群的理想 $\mathscr{T}(n,r)$ 的极大正则子半群；文献[2]得到了全变换半群的理想 $\mathscr{T}(n,r)$ 的极大子半群的完全分类；文献[3]研究了保序变换半群的理想的极大正则子半群的完全分类；文献[4]得到了方向保序变换半群的理想的极大子半群的完全分类；文献[9]刻画了全变换半群的理想 $\mathscr{T}(n,r)$ 的极大正则幂等元生成子半群的完全分类；文献[15]得到了全变换半群的理想 $\mathscr{T}(n,r)$ 的局部极大正则幂等元生成子半群的完全分类；文献[10]考虑了半群

$$\mathscr{T}_{n,r}=\mathscr{T}(n,r)\cup\mathscr{S}_n \qquad 1\leqslant r\leqslant n-1$$

刻画了 $\mathscr{T}_{n,r}$ 的生成集，并得到了半群 $\mathscr{T}_{n,r}$ 的秩. 注意到 $\mathscr{T}_{n,n-1}=\mathscr{T}_n$. 本文考虑半群 $\mathscr{T}_{n,r}$ 的极大子半群和极大正则子半群，得到了半群 $\mathscr{T}_{n,r}$ 的极大子半群和极大正则子半群的完全分类.

设 U 是半群 S 的任意子集，通常用 $E(U)$ 表示 U 中的幂等元之集. 本文未定义的术语及记法参见文献[19].

设 $\alpha\in\mathscr{T}_n$，记 $\ker(\alpha)=\{(x,y)\in X_n\times X_n: x\alpha=y\alpha\}$，则 $\ker(\alpha)$ 是 X_n 上的等价关系，称 $\ker(\alpha)$ 为 α 的核. 通常用 $\mathrm{im}(\alpha)$ 表示集合 $\{x\alpha: x\in X_n\}$，称 $\mathrm{im}(\alpha)$ 为 α 的像.

众所周知，全变换半群 $\mathscr{T}_n$ 中的 Green 关系为：对任意 $\alpha,\beta\in\mathscr{T}_n$，有

$$\alpha\mathscr{L}\beta\Leftrightarrow\mathrm{im}(\alpha)=\mathrm{im}(\beta)$$

$$\alpha\mathscr{R}\beta\Leftrightarrow\ker(\alpha)=\ker(\beta)$$

$$\alpha\mathscr{J}\beta\Leftrightarrow|\mathrm{im}(\alpha)|=|\mathrm{im}(\beta)|$$

对 $1\leqslant r\leqslant n$，记

---

① 收稿日期：2020-05-21

基金项目：贵州师范大学 2019 年博士科研启动项目(GZNUD[2019]13)；国家自然科学基金项目(11461014).

作者简介：胡华碧，副教授，硕士，主要从事信息及编码理论的研究.

通信作者：赵 平，教授，博士生导师.

$$J_r = \{\alpha \in \mathcal{T}_n : |\operatorname{im}(\alpha)| = r\}$$

则 J-类 $J_1,\cdots,J_n$ 恰好是 $\mathcal{T}_n$ 的 n 个 J-类. 显然 $\mathcal{S}_n = J_n$ 且 $\mathcal{T}_{n,r} = \mathcal{S}_n \cup \mathcal{T}(n,r) = \mathcal{S}_n \cup J_r \cup \cdots \cup J_1$.

任意取 $n,r \in \mathbb{N}_+$ 且 $r \leqslant n$，令

$$P_r(n) = \{(x_1, \cdots, x_r): x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n,\ x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_r \geqslant 1 \text{ 且 } x_1, \cdots, x_r \in \mathbb{N}_+\}$$

称集合 $P_r(n)$ 中的元素 $(x_1, x_2, \cdots, x_r)$ 为 n 的一个 r-划分，记为 $p_r(n) = |P_r(n)|$.

设 $\alpha \in J_r$，则 α 有如下标准形式：

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_r \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_r \end{pmatrix}$$

其中 $a_1 < a_2 < \cdots < a_r$. 显然存在 $\sigma \in \mathcal{S}_r$ ($\mathcal{S}_r$ 表示 $\{1, \cdots, r\}$ 上的对称群)，使得 $|A_{1\sigma}| \geqslant |A_{2\sigma}| \geqslant \cdots \geqslant |A_{r\sigma}| \geqslant 1$. 记

$$\operatorname{part}(\alpha) = (|A_{1\sigma}|, |A_{2\sigma}|, \cdots, |A_{r\sigma}|)$$

称 $\operatorname{part}(\alpha)$ 为 α 的划分. 显然 $\operatorname{part}(\alpha) \in P_r(n)$.

在 J_r 上引入关系 $\sim$：$\alpha \sim \beta$ 即存在 $\lambda,\mu \in \mathcal{S}_n$，使得 $\alpha = \lambda\beta\mu$. 易验证 $\sim$ 是 J_r 上的等价关系.

引理 1[10]　设 $\alpha,\beta \in J_r$，则 $\alpha \sim \beta$ 当且仅当 $\operatorname{part}(\alpha) = \operatorname{part}(\beta)$.

对任意 $\alpha \in J_r$，记

$$[\alpha] = \{\beta \in J_r : \beta \sim \alpha\} \qquad \Gamma_{n,r} = \{[\beta] : \beta \in J_r\}$$

则 $\Gamma_{n,r}$ 是 $\sim$ 在 J_r 上所决定的一个分类，$[\beta]$ 是 β 所在的等价类. 由引理 1 易知，J_r 中有 $p_r(n)$ 个 $\sim$ 等价类，从而 $|\Gamma_{n,r}| = p_r(n)$. 设 $\sim$ 在 J_r 上所决定的所有等价类为 $[\tau_1],[\tau_2],\cdots,[\tau_p]$，其中 $p = p_r(n)$ $(1 \leqslant r \leqslant n)$. 显然 $\Gamma_{n,r} = \{[\tau_i] : 1 \leqslant i \leqslant p\}$ 且 $J_r = \bigcup_{i=1}^{p} [\tau_i]$.

引理 2[15]　设 $1 \leqslant r \leqslant n-1$，则 $\mathcal{T}(n,r) = \langle E(J_r) \rangle$，且 $\mathcal{T}(n,r)$ 是正则子半群.

引理 3　设 $1 \leqslant r \leqslant n-1$，$S$ 是 $\mathcal{T}_{n,r}$ 的子半群，若 $\mathcal{S}_n \subseteq S$ 且 $S \cap [\tau_i] \neq \varnothing$，则对任意 $1 \leqslant i \leqslant p = p_r(n)$，有 $S = \mathcal{T}_{n,r}$.

证　注意到 $J_r = \bigcup_{i=1}^{p} [\tau_i]$. 对任意 $1 \leqslant i \leqslant p$，取定 $\alpha_i \in S \cap [\tau_i]$. 任意取 $\beta_i \in [\tau_i]$，则 $\alpha_i \sim \beta_i$，于是存在 $\lambda,\mu \in \mathcal{S}_n$，使得 $\beta_i = \lambda\alpha_i\mu$，从而 $\beta_i \in \langle \mathcal{S}_n, \alpha_i \rangle \subseteq S$. 由 β_i 的任意性可得，$J_r = \bigcup_{i=1}^{p} [\tau_i] \subseteq S$. 于是由引理 2 可得 $\mathcal{T}(n,r) = \langle E(J_r) \rangle = \langle J_r \rangle \subseteq S$，从而由 $\mathcal{S}_n \subseteq S$ 可得 $S = \mathcal{T}(n,r) \cup \mathcal{S}_n = \mathcal{T}_{n,r}$.

定义 1　设 S 是半群，M 是 S 的真子半群，若对 S 的任意子半群 T，由 $M \subseteq T$ 可推出 $T = M$ 或 $T = S$，则称 M 是 S 的极大子半群.

引理 4　设 $1 \leqslant r \leqslant n-1$ 且 $1 \leqslant i \leqslant p = p_r(n)$，则 $\mathcal{T}_{n,r} \backslash [\tau_i]$ 是 $\mathcal{T}_{n,r}$ 的极大子半群.

证　注意到 $J_r = \bigcup_{j=1}^{p} [\tau_j]$ 且 $\mathcal{T}_{n,r} \backslash [\tau_i] = \mathcal{T}(n, r-1) \cup [J_r \backslash [\tau_i]] \cup \mathcal{S}_n$，显然 $\tau_j \in \mathcal{T}_{n,r} \backslash [\tau_i]$，$j \in \{1, \cdots, p\} \backslash i$. 任意取 $\alpha,\beta \in \mathcal{T}_{n,r} \backslash [\tau_i]$，若 $\alpha\beta \in [\tau_i]$，则 $\alpha,\beta \in J_r$ 且 $\alpha\beta \sim \tau_i$，于是存在 $\lambda,\mu \in \mathcal{S}_n$，使得 $\alpha\beta = \lambda\tau_i\mu \in J_r$. 由 $\alpha,\beta,\alpha\beta \in J_r$ 可得 $\ker(\alpha\beta) = \ker(\alpha)$，从而 $\operatorname{part}(\alpha\beta) = \operatorname{part}(\alpha)$. 显然 $\lambda\tau_i\mu \sim \tau_i$. 由引理 1 可得，$\operatorname{part}(\lambda\tau_i\mu) = \operatorname{part}(\tau_i)$，于是 $\operatorname{part}(\alpha) = \operatorname{part}(\alpha\beta) = \operatorname{part}(\lambda\tau_i\mu) = \operatorname{part}(\tau_i)$，从而由引理 1 可得 $\alpha \sim \tau_i$，与 $\alpha \in \mathcal{T}_{n,r} \backslash [\tau_i]$，矛盾. 因此，$\mathcal{T}_{n,r} \backslash [\tau_i]$ 是 $\mathcal{T}_{n,r}$ 的子半群.

假设 S 是 $\mathcal{T}_{n,r}$ 的子半群且 $[\mathcal{T}_{n,r} \backslash [\tau_i]] \subset S$，则 $\mathcal{S}_n \subseteq S$ 且 $S \cap [\tau_j] \neq \varnothing$，对任意 $1 \leqslant j \leqslant p = p_r(n)$，由引理 3 可得 $S = \mathcal{T}_{n,r}$. 因此，$\mathcal{T}_{n,r} \backslash [\tau_i]$ 是 $\mathcal{T}_{n,r}$ 的极大子半群.

引理 5　设 $1 \leqslant r \leqslant n-1$ 且 G 是群 $\mathcal{S}_n$ 的极大子半群，则 $M = \mathcal{T}(n,r) \cup G$ 是 $\mathcal{T}_{n,r}$ 的极大子半群.

证　显然 M 是 $\mathcal{T}_{n,r}$ 的子半群. 若 M 不是 $\mathcal{T}_{n,r}$ 的极大子半群，则存在 $\mathcal{T}_{n,r}$ 的子半群 M^*，使得 $M \subset M^* \subset \mathcal{T}_{n,r}$. 注意到 $\mathcal{T}(n,r) \subseteq M \subset M^*$. 令 $G^* = M^* \cap \mathcal{S}_n$，则 G^* 是 $\mathcal{S}_n$ 的子半群且 $G \subset G^* \subset \mathcal{S}_n$，与 G 的极大性矛盾. 因此，M 是 $\mathcal{T}_{n,r}$ 的极大子半群.

本文的主要结论为：

定理 1　设 $1 \leqslant r \leqslant n-1$，则半群 $\mathcal{T}_{n,r}$ 的极大子半群有且仅有以下两类：

(i) $\mathcal{T}_{n,r} \backslash [\tau_i]$，其中 $1 \leqslant i \leqslant p = p_r(n)$；

（ii）$\mathcal{I}(n, r) \cup G$，其中 G 是群 $\mathcal{S}_n$ 的极大子半群.

证　令 $M_i = \mathcal{T}_{n,r} \backslash [\tau_i]$ 且 $N = \mathcal{I}(n, r) \cup G$，其中 G 是群 $\mathcal{S}_n$ 的极大子半群，则由引理 4 及引理 5 可知，M_i 和 N 都是 $\mathcal{T}_{n,r}$ 的极大子半群.

反之，设 S 是 $\mathcal{T}_{n,r}$ 的极大子半群，则 $\mathcal{S}_n \cap S \neq \emptyset$（否则，$S \subseteq \mathcal{I}(n, r) \subset N \subset \mathcal{T}_{n,r}$，与 S 的极大性矛盾）.

（i）若 $\mathcal{S}_n \subseteq S$，则由引理 3 及 S 的极大性可得，存在 $i \in \{1, 2, \cdots, p\}$，使得 $S \cap [\tau_i] = \emptyset$，于是 $S \subseteq \mathcal{S}_n \cup [\mathcal{I}(n, r) \backslash [\delta_i]] = \mathcal{T}_{n,r} \backslash [\tau_i] = M_i$，从而由 S 的极大性可得 $S = M_i = \mathcal{T}_{n,r} \backslash [\tau_i]$.

（ii）若 $\mathcal{S}_n \cap S \subset \mathcal{S}_n$，令 $G = \mathcal{S}_n \cap S$，则 G 是半群 $\mathcal{S}_n$ 的子半群. 假设存在 $\mathcal{S}_n$ 的子半群 G^*，使得 $G \subset G^*$. 令 $S^* = \mathcal{I}(n, r) \cup G^*$，则 S^* 是 $\mathcal{T}_{n,r}$ 的子半群且 $S \subset S^*$，于是由 S 的极大性可得 $S^* = \mathcal{T}_{n,r}$，从而 $G^* = \mathcal{S}_n$. 因此，G 是群 $\mathcal{S}_n$ 的极大子半群. 注意到 $S \subseteq \mathcal{I}(n, r) \cup G = N \subset \mathcal{T}_{n,r}$. 再由引理 5 及 S 的极大性可得 $S = N = \mathcal{I}(n, r) \cup G$.

当 $r = n-1$ 时，$p_r(n) = 1$，从而 $J_{n-1} = [\tau_1]$. 显然 $\mathcal{T}_{n,n-1} = \mathcal{T}_n = \mathrm{Sing}_n \cup \mathcal{S}_n = \mathcal{I}(n, n-2) \cup \mathcal{S}_n \cup J_{n-1}$. 由定理 1 可得以下推论：

推论 1　设 $n \geqslant 4$，则 $\mathcal{T}_n = \mathcal{T}_{n,n-1}$ 的极大子半群有且仅有以下两类：

（i）$\mathcal{I}(n, n-2) \cup \mathcal{S}_n$；

（ii）$\mathrm{Sing}_n \cup G$，其中 G 是群 $\mathcal{S}_n$ 的极大子半群.

引理 6　设 $1 \leqslant r \leqslant n-1$ 且 $1 \leqslant i \leqslant p = p_r(n)$，则 $\mathcal{T}_{n,r} \backslash [\tau_i]$ 是 $\mathcal{T}_{n,r}$ 的正则子半群.

证　注意到 $\mathcal{T}_{n,r} \backslash [\tau_i] = \mathcal{I}(n, r-1) \cup [J_r \backslash [\tau_i]] \cup \mathcal{S}_n$. 显然 $\mathcal{S}_n$ 是正则半群. 由引理 2 可知，$\mathcal{I}(n, r-1)$ 是正则半群. 若 $J_r \backslash [\tau_i] \neq \emptyset$，任意取 $\alpha \in J_r \backslash [\tau_i]$，则 $|\mathrm{im}(\alpha)| = r$. 假设

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_r \\ a_1 & a_2 & \cdots & b_r \end{pmatrix}$$

其中 $a_1 < a_2 < \cdots < a_r$. 令

$$\beta = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_r \\ \max A_1 & \max A_2 & \cdots & \max A_r \end{pmatrix}$$

其中 $a_i \in B_i$ 且 $|A_i| = |B_i|$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$，则显然 $\alpha = \alpha\beta\alpha$ 且 $\mathrm{part}(\alpha) = \mathrm{part}(\beta)$，于是由引理 1 可得 $\beta \sim \alpha$，从而 $\beta \in \mathcal{T}_{n,r} \backslash [\tau_i]$. 由 $\alpha = \alpha\beta\alpha$ 可得，α 是正则的. 再由 α 的任意性可得，半群 $\mathcal{T}_{n,r} \backslash [\tau_i]$ 是正则半群.

由引理 2 易知半群 $\mathcal{T}_{n,r}$ 是正则半群. 我们可以考虑半群 $\mathcal{T}_{n,r}$ 的极大正则半群.

定义 2　设 S 是正则半群，M 是 S 的真子正则半群，若对 S 的任意正则子半群 T，由 $M \subseteq T$ 可推出 $T = M$ 或 $T = S$，则称 M 是 S 的极大正则子半群.

定理 2　设 $1 \leqslant r \leqslant n-1$，则半群 $\mathcal{T}_{n,r}$ 的极大子半群和极大正则子半群是一致的.

证　设 $M_i = \mathcal{T}_{n,r} \backslash [\tau_i]$，$1 \leqslant i \leqslant p = p_r(n)$，且 $N = \mathcal{I}(n, r) \cup G$，$G$ 是群 $\mathcal{S}_n$ 的极大子半群，则由引理 2 及引理 6 可得，M_i 和 N 都是 $\mathcal{T}_{n,r}$ 的正则子半群，从而由定理 1 可得，半群 $\mathcal{T}_{n,r}$ 的极大子半群都是正则半群. 显然半群 $\mathcal{T}_{n,r}$ 的极大正则子半群必包含在某一个极大子半群中. 因此，半群 $\mathcal{T}_{n,r}$ 的极大子半群和极大正则子半群是一致的.

注 1　由定理 1、定理 2 可得如下结论：设 $n \geqslant 4$，则 $\mathcal{T}_n = \mathcal{T}_{n,n-1}$ 的极大正则子半群 S 有且仅有两类：$S = \mathcal{I}(n, n-2) \cup \mathcal{S}_n$ 和 $S = \mathrm{Sing}_n \cup G$，其中 G 是群 $\mathcal{S}_n$ 的极大子半群. 此结论为文献[1]的主要定理（见文献[1]中定理 1）. 因此，本文所得定理 1、定理 2 是文献[1]结果的推广.

参考文献：

[1]　YOU T J. Maximal Regular Subsemigroups of Certain Semigroups of Transformations [J]. Semigroup Forum，2002，64(3)：391-396.

[2]　YANG H B，YANG X L. Maximal Subsemigroups of Finite Transformation Semigroups $K(n, r)$ [J]. Acta Mathematica Sinica，2004，20(3)：475-482.

[3]　DIMITROVA I，KOPPITZ J. On the Maximal Regular Subsemigroups of Ideals of Order-Preserving or Order-Reversing Transformations [J]. Semigroup Forum，2011，82(1)：172-180.

[4]　DIMITROVA I，FERNANDES V H，KOPPITZ J. The Maximal Subsemigroups of Semigroups of Transformations Pre-

serving or Reversing the Orientation on a Finite Chain [J]. Publicationes Mathematicae Debrecen, 2012, 81(1): 11-29.

[5] ZHAO P. A Classification of Maximal Idempotent-Generated Subsemigroups of Finite Orientation-Preserving Singular Partial Transformation Semigroups [J]. Semigroup Forum, 2012, 84(1): 69-80.

[6] ZHAO P. Maximal Regular Subsemibands of Finite Order-Preserving Transformation Semigroups $K(n, r)$ [J]. Semigroup Forum, 2012, 84(1): 97-115.

[7] ZHAO P, YANG M. Locally Maximal Idempotent-Generated Subsemigroups of Finite Orientation-Preserving Singular Partial Transformation Semigroups [J]. Algebra Colloquium, 2013, 20(3): 435-442.

[8] ZHAO P. Locally Maximal Regular Subsemibands of $\mathcal{SOP}_n$ [J]. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 2014, 37(3): 881-891.

[9] ZHAO P, HU H B, YOU T J. A Note on Maximal Regular Subsemigroups of the Finite Transformation Semigroups $\mathcal{T}(n, r)$ [J]. Semigroup Forum, 2014, 88(2): 324-332.

[10] AYIK G, AYIK H, HOWIE J M. On Factorisations and Generators in Transformation Semigroups [J]. Semigroup Forum, 2005, 70(2): 225-237.

[11] 张传军，朱华伟．半群 $O\varepsilon_n$ 的极大幂等元生成子半群 [J]．西南师范大学学报(自然科学版)，2016，41(12)：11-15.

[12] ZHAO P, HU H B, YOU T J. Maximal Regular Subsemibands of the Finite Order-Preserving Partial Transformation Semigroups $PO(n, r)$ [J]. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 2017, 40(3): 1175-1186.

[13] 罗永贵．半群 $L_D(n, r)$的极大正则子半群 [J]．西南师范大学学报(自然科学版)，2017，42(8)：32-37.

[14] ZHAO P. Maximal Regular Subsemibands of Finite Orientation-Preserving Partial Transformation Semigroup [J]. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 2018, 41(3): 1467-1475.

[15] ZHAO P, HU H B. Locally Maximal Regular Subsemibands of the Finite Transformation Semigroups $\mathcal{T}(n, r)$ [J]. Semigroup Forum, 2019, 98(1): 172-183.

[16] 于晓丹，孔祥智．Vague 软 Clifford 半群 [J]．西南大学学报(自然科学版)，2020，42(6)：46-53.

[17] 雷　倩，何立官．关于 Conway 单群和 Fischer 单群的刻画 [J]．西南大学学报(自然科学版)，2020，42(10)：96-100.

[18] 张前滔，赵　平，罗永贵．半群 $\mathrm{TOP}_n(k)$的格林(星)关系及富足性 [J]．西南师范大学学报(自然科学版)，2020，45(6)：9-15.

[19] HOWIE J M. Fundamentals of Semigroup Theory [M]. London: Oxford Press, 1995.

On Classification of Maximal (Regular) Subsemigroups of Semigroup $\mathcal{T}_{n,r}$

HU Hua-bi[1], ZHAO Ping[2]

1. School of Biology and Engineering, Guizhou Medical University, Guiyang 550004, China;

2. School of Mathematics Sciences, Guizhou Normal University, Guiyang 550001, China

Abstract: Let $\mathcal{S}_n$ and $\mathcal{T}_n$ be the symmetric group and the full transformation semigroup on $X_n=\{1, 2, \cdots, n\}$, respectively. For $1\leqslant r\leqslant n$, put $\mathcal{T}(n, r)=\{\alpha\in\mathcal{T}_n: |\mathrm{im}(\alpha)|\leqslant r\}$, then the sets $\mathcal{T}(n, r)$ are the two-sided ideals of $\mathcal{T}_n$. For $1\leqslant r\leqslant n-1$. In this paper, the semigroup $\mathcal{T}_{n,r}=\mathcal{T}(n, r)\cup\mathcal{S}_n$ has been considered, and it has been proved that the $\mathcal{T}_{n,r}$ has exactly two classes of maximal subsemigroups: $S=\mathcal{T}_{n,r}\setminus[\tau_i](1\leqslant i\leqslant p=p_r(n))$ and $S=\mathcal{T}(n, r)\cup G$, where G be a maximal subgroup of the symmetric group $\mathcal{S}_n$. In addition, this paper proved that the maximal subsemigroups and the maximal regular subsemigroups of $\mathcal{T}_{n,r}$ coincide. The paper extends the results.

Key words: full transformation semigroup; regular semigroup; the maximal subsemigroup; the maximal regular subsemigroup

责任编辑　廖　坤