DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2021.06.003

强 τ-Extending 模①

李煜彦， 何东林

陇南师范高等专科学校 数学与信息科学学院，甘肃 陇南 742500

摘要： 设 $\tau=(\mathscr{T},\mathscr{F})$ 是一个遗传挠理论. 首先引入了强 τ-Extending 模的概念，研究了强 τ-Extending 模的性质，讨论了 τ-Extending 模与强 τ-Extending 模之间的关系，举例说明了 τ-Extending 模未必是强 τ-Extending 模. 然后研究了强 τ-Extending 模关于直和因子以及直和的封闭性，结果表明：强 τ-Extending 模关于直和因子封闭，但它关于直和不封闭. 进而，给出了强 τ-Extending 模关于直和封闭的局部条件，证明了：τ-挠自由的强 τ-Extending 模与 τ-挠模的直和仍是强 τ-Extending 模. 最后，对于 $M=\bigoplus_{i\in I}M_i(|I|\geqslant 2)$，给出了 M 是强 τ-Extending 模的等价刻画.

关 键 词： τ-本质子模；强 τ-Extending 模；直和；全不变直和因子

中图分类号：O153.3 **文献标志码：A** **文章编号：** 1000-5471(2021)06-0009-05

Extending 模的概念可以追溯到 20 世纪 30 年代 Neumann 的工作，他对量子力学的兴趣使他发展了连续几何学，我们今天称之为上下连续完全模格. 文献[1]引入了 t-本质子模的概念，利用第二奇异子模的方法研究了 t-Extending 模的性质. 文献[2-4]对 t-Extending 模进行了推广，先后研究了 t-拟连续模、t-连续模等. 文献[5]从遗传挠理论的角度引入了 τ-本质子模和 τ-Extending 模的概念，证明了：模 M 的每个子模都有唯一的 τ-闭包. 文献[6]引入了强 Extending 模的概念，它是 Extending 模类的一个子类. 文献[7]借助强 Extending 模和 t-Extending 模的定义，引入了强 t-Extending 模的概念，对 Extending 模进行了进一步推广. 与 Extending 环和模相关的研究课题还得到了许多其他有意义的结论(参见文献[8-14]).

本文从遗传挠理论的角度提出了强 τ-Extending 模的概念，它是 τ-Extending 模的推广. 文中研究了强 τ-Extending 模的性质，讨论了 τ-Extending 模与强 τ-Extending 模之间的关系，考虑了强 τ-Extending 模关于直和因子以及直和的封闭性. 对于 $M=\bigoplus_{i\in I}M_i(|I|\geqslant 2)$，给出了 M 是强 τ-Extending 模的等价刻画.

本文中的挠理论均指遗传挠理论，环都是有单位元的结合环，模指酉右 R-模. 用 $N\leqslant_e M$，$N\lhd M$ 分别表示 N 是 M 的本质子模，N 是 M 的全不变子模. 设 $N\leqslant M$，如果对任意 $A\leqslant M$，只要 $N\cap A\subseteq\tau(M)$，都有 $A\subseteq\tau(M)$，则称 N 是 M 的 τ-本质子模，记为 $N\lhd_\tau M$，此时也称 M 是 N 的 τ-本质扩张. 如果 N 没有真 τ-本质扩张，则称 N 是 M 的 τ-闭子模，记为 $N\leqslant_{tc}M$. 设 $K,N\leqslant M$，如果 K 是 $\{L\leqslant M\mid L\cap N\subseteq\tau(M)\}$ 中的极大元，则称 K 是 N 在 M 中的 τ-补. 如果 τ-挠类 $\mathscr{T}$ 关于内射包封闭，则称挠理论是稳定的.

引理 1 设 $L\leqslant M$，考虑以下条件：

(i) $L\lhd_\tau M$；

(ii) $(L+\tau(M))/\tau(M)\leqslant_e M/\tau(M)$；

(iii) $L+\tau(M)\leqslant_e M$.

则(i)⇔(ii)⇒(iii). 特别地，若挠理论 τ 是稳定的，则(i)⇔(ii)⇔(iii).

证 (i)⇔(ii) 由文献[12]的性质 2.2 得证.

---

① 收稿日期：2020-05-05

基金项目：甘肃省高等学校创新能力提升项目(2019B-224)；甘肃省高等学校创新基金项目(2020A-277).

作者简介：李煜彦，讲师，硕士，主要从事环模理论的研究.

(ii)⇒(iii) 由文献[13]的性质 1.5 得证.

若 τ 是稳定的挠理论，则由文献[14]知，$\tau(M)$ 是 M 的闭子模. 于是由文献[13]的性质 1.10 可以得到，若 $L+\tau(M)\leqslant_e M$，则 $(L+\tau(M))/\tau(M)\leqslant_e M/\tau(M)$.

定义 1[6] 如果 M 的任意子模是其全不变直和因子的本质子模，则称 M 是强 Extending 模.

下面给出强 τ-Extending 模的概念.

定义 2 如果 M 的每个 τ- 闭子模是 M 的全不变直和因子，则称 M 是强 τ-Extending 模.

由文献[6]易知，强 τ-Extending 模是 τ-Extending 模，但下面的例子说明 τ-Extending 模未必是强 τ-Extending 模：

例 1 设 F 是域，$R=\begin{pmatrix} F & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$，$M$ 是任意 R- 模. 则 $\tau_G(M)\oplus R$ 是 τ-Extending 模，其中 τ_G 表示 Goldie 挠理论. 但由文献[7]的例 3.4 知，R_R 不是强 Extending 模，所以 $\tau_G(M)\oplus R$ 不是强 τ-Extending 模.

如果模 M 的任意直和因子的交仍是 M 的直和因子，则称 M 具有 SSIP 性质.

性质 1 若 M 是强 τ-Extending 模，则 M 的包含 $\tau(M)$ 的直和因子具有 SSIP 性质.

证 设 M 是强 τ-Extending 模，$\{M_i\}_{i\in I}$ 是由 M 的包含 $\tau(M)$ 的直和因子构成的模族. 则对任意 $i\in I$，存在 $e_i=e_i^2\in \mathrm{End}(M)$，使得 $M_i=e_iM$. 若 $\bigcap_{i\in I}M_i=0$，则结论显然成立；若 $\bigcap_{i\in I}M_i\neq 0$，则存在 $e\in S_l(\mathrm{End}(M))$，使得 $\bigcap_{i\in I}M_i\lhd_\tau eM$. 由于 $\tau(M)\subseteq\bigcap_{i\in I}M_i$，由引理 1 知，$\bigcap_{i\in I}M_i\leqslant_e eM$. 于是对任意 $i\in I$，$(1-e_i)M\cap eM=0$，因此 $e_iM\subseteq eM$. 从而 $\bigcap_{i\in I}M_i=eM$.

性质 2 设 M 是模. 则以下结论成立：

(i) M 是强 τ-Extending 模当且仅当对任意 $N\leqslant M$，存在 M 的全不变直和因子 K，使得 $N\lhd_\tau K$；

(ii) 设 M_1 是 M 的直和因子. 若 M 是强 τ-Extending 模，则 M_1 是强 τ-Extending 模.

证 (i) *必要性* 设 M 是强 τ-Extending 模，$N\leqslant M$. 由文献[5]的性质 2.5 知，存在 $\overline{N}\leqslant_{\tau c}M$，使得 $N\lhd_\tau\overline{N}$. 因为 M 是强 τ-Extending 模，所以 $\overline{N}$ 是 M 的全不变直和因子.

充分性 设 $L\leqslant_{\tau c}M$，则存在 M 的全不变直和因子 K，使得 $L\lhd_\tau K$. 因为 L 在 M 中是 τ- 闭的，所以 $L=K$. 从而 L 是 M 的全不变直和因子.

(ii) 设 $M=M_1\oplus M_2$，$N\leqslant_{\tau c}M_1$. 由文献 5 的性质 2.8 知，$N\oplus M_2$ 是 M 的 τ- 闭子模，故 $N\oplus M_2$ 是 M 的全不变直和因子. 设 $M=(N\oplus M_2)\oplus W$，则

$$M_1=M_1\cap((N\oplus M_2)\oplus W)=N\oplus(M_1\cap(M_2\oplus W))$$

即 N 是 M_1 的直和因子. 设 $f\in\mathrm{End}(M_1)$，则 $f\oplus 1_{M_2}\in\mathrm{End}(M)$. 于是

$$(f\oplus 1_{M_2})(N\oplus M_2)=f(N)\oplus M_2\subseteq N\oplus M_2$$

因此 $f(N)\subseteq N$. 从而 M_1 是强 τ-Extending 模.

由性质 2，可得下面推论：

推论 1 若 M 是 τ- 挠的，则 M 是强 τ-Extending 模.

证 若 M 是 τ- 挠的，则对任意 $N\leqslant M$，都有 $N\lhd_\tau M$，由性质 2 知，M 是强 τ-Extending 模.

推论 2 设 M 是强 τ-Extending 模，则以下结论成立：

(i) 若 $L\leqslant_{\tau c}M$，则 L 是强 τ-Extending 模；

(ii) $\tau(M)$ 是 M 的全不变直和因子.

证 (i) 设 $N\leqslant_{\tau c}L$，则由文献[5]的定理 2.13 知，$N\leqslant_{\tau c}M$. 因为 M 是强 τ-Extending 模，所以 N 是 M 的全不变直和因子. 设 $M=N\oplus H$，则 $L=L\cap(N\oplus H)=N\oplus(L\cap H)$，即 N 是 L 的直和因子. 另一方面，由于 N 是 M 的全不变直和因子，由文献[11]的引理 1.1 知，N 在 L 中是全不变的. 从而 L 是强 τ-Extending 模.

(ii) 由文献[5]的引理 2.3 知，$\tau(M)$ 是 M 的 τ- 闭子模，所以 $\tau(M)$ 是 M 的全不变直和因子.

下面我们讨论强 τ-Extending 模的关于直和的封闭性. 下面的例子说明强 τ-Extending 模的直和不一定是强 τ-Extending 模：

例 2　设 $M=M_1\oplus M_2$，其中 $M_1=Z_p\oplus Z$，$M_2=Z_q\oplus Q$（p,q 是整数）．由文献[7]知，$(M_1)_Z$ 和 $(M_2)_Z$ 都是强 τ_G-Extending 模，其中 τ_G 表示 Goldie 挠理论．但由于 Z 在 $Z\oplus Q$ 中不是全不变的，故 M 不是强 τ_G-Extending 模．

一个自然而然的问题是：什么情况下强 τ-Extending 模的直和仍是强 τ-Extending 模？我们给出了该问题成立的局部条件．

定理 1　设 $M=M_1\oplus M_2$．若 M_1 是 τ- 挠自由的强 τ-Extending 模，M_2 是 τ- 挠模，则 M 是强 τ-Extending 模．

证　设 M_1 是 τ- 挠自由的强 τ-Extending 模，M_2 是 τ- 挠模，则 $\tau(M_1)=0$，$\tau(M_2)=M_2$．设 $K\leqslant_{\tau c}M$，由文献[5]知，K 在 M 中是 τ- 纯的，因此

$$\tau(K)=\tau(M)=\tau(M_1\oplus M_2)=\tau(M_1)\oplus\tau(M_2)=M_2$$

于是

$$K=K\cap(M_1\oplus M_2)=K\cap(M_1\oplus\tau(K))=(K\cap M_1)\oplus\tau(K)=(K\cap M_1)\oplus M_2$$

由文献[5]的性质 2.5 知，存在 $L\leqslant M_1$，使得 $K\cap M_1\lhd_\tau L$．于是由文献[5]的性质 2.1 知

$$K=(K\cap M_1)\oplus M_2\lhd_\tau L\oplus M_2$$

因为 $K\leqslant_{\tau c}M$，所以 $(K\cap M_1)\oplus M_2=L\oplus M_2$．因此 $K\cap M_1=L$，即 $K\cap M_1$ 是 M_1 的 τ- 闭子模．由于 M_1 是强 τ-Extending 模，故 $K\cap M_1$ 是 M_1 的全不变直和因子，因此 K 是 M 的直和因子．下证 K 在 M 中是全不变的．设 $f\in\mathrm{End}(M)$，则 $f=\begin{pmatrix}f_{11}&f_{12}\\f_{21}&f_{22}\end{pmatrix}$，其中 $f_{ij}:M_j\longrightarrow M_i(i,j=1,2)$．由于 M_2 是 τ- 挠的，故对任意 $g\in\mathrm{End}(M_2)$，有

$$g(M_2)=g(\tau(M_2))\subseteq\tau(M_2)=M_2$$

而

$$f_{12}(M_2)=f_{12}(\tau(M_2))\subseteq M_1\cap\tau(M_2)=0$$

故 $f=\begin{pmatrix}f_{11}&0\\f_{21}&f_{22}\end{pmatrix}$．因为

$$f_{11}(K\cap M_1)\subseteq K\cap M_1\qquad f_{21}(K\cap M_1)\subseteq M_2\qquad f_{22}(M_2)\subseteq M_2$$

所以

$$f(K)=f((K\cap M_1)\oplus M_2)=f_{11}(K\cap M_1)\oplus f_{21}(K\cap M_1)\oplus f_{22}(M_2)\subseteq(K\cap M_1)\oplus M_2$$

从而 K 是 M 的全不变直和因子．

由定理 1 易得如下结论：

推论 3　设 $M=M_1\oplus M_2$．若 M_1 是强 τ-Extending 模，M_2 是 τ- 挠模，则 M 是强 τ-Extending 模．

证　对 M_1 分情况讨论．

情形 1　若 M_1 是 τ- 挠的，则 $M=M_1\oplus M_2$ 是 τ- 挠的，由推论 1 知，M 是强 τ-Extending 模．

情形 2　若 M_1 是非 τ- 挠的，由推论 2 知，存在 $W\leqslant M_1$，使得 $M_1=\tau(M_1)\oplus W$．于是

$$M=(\tau(M_1)\oplus W)\oplus M_2=W\oplus(\tau(M_1)\oplus M_2)$$

由性质 2 知，W 是强 τ-Extending 模，且 $\tau(W)=\tau(M_1/\tau(M_1))=0$．由定理 1 知，$M$ 是强 τ-Extending 模．

综合上述，M 是强 τ-Extending 模．

最后，对于 $M=\oplus_{i\in I}M_i(|I|\geqslant 2)$，我们给出 M 是强 τ-Extending 模的等价刻画：

定理 2　设 $M=\oplus_{i\in I}M_i(|I|\geqslant 2)$，则以下结论等价：

(i) M 是强 τ-Extending 模；

(ii) 存在 $i\neq j\in I$，使得对任意 $K\leqslant_{\tau c}M$，若 $K\cap M_i\subseteq\tau(M)$ 或 $K\cap M_j\subseteq\tau(M)$，则 K 是 M 的全不变直和因子；

(iii) 存在 $i\neq j\in I$，使得 M_j 或 M_i 在 M 中的任意 τ- 补是强 τ-Extending 模且是 M 的全不变直和因子．

证　(i)⇒(ii) 由强 τ-Extending 模的定义易证．

(ii)⇒(iii) 设 K 是 M_i 在 M 中的 τ- 补，则 $K\cap M_i\subseteq\tau(M)$．由(ii)可以得到，$K$ 是 M 的全不变直和因子．下证 K 是强 τ-Extending 模．设 $L\leqslant_{\tau c}K$，则 $L\leqslant_{\tau c}M$．而 $L\cap M_i\subseteq K\cap M_i\subseteq\tau(M)$，由(ii)可以得到，

L 是 M 的全不变直和因子. 由文献[11]知, L 是 K 的全不变直和因子. 从而 K 是强 τ-Extending 模.

(iii)⇒(i) 设 $N \leqslant_{\pi} M$, 由文献[5]的性质2.5知, 存在 $L \leqslant N$, 使得 L 是 $N \cap M_i$ 在 N 中的 τ-闭包. 故 $0 = (N \cap M_i) \cap M_j \triangleleft_{\tau} L \cap M_j$, 从而 $L \cap M_j \subseteq \tau(L) \subseteq \tau(M)$. 于是存在 M_j 在 M 中的 τ-补 E, 使得 $L \subseteq E$. 由(iii)可以得到, E 是强 τ-Extending 模且是 M 的全不变直和因子. 因为 $L \leqslant_{\pi} N$, 所以 $L \leqslant_{\pi} E$. 因此 L 是 E 的全不变直和因子, 从而 L 是 M 的全不变直和因子. 设存在 $L' \leqslant M$, 使得 $M = L \oplus L'$, 则

$$N = N \cap (L \oplus L') = L \oplus (N \cap L')$$

于是存在 $K \leqslant N$, 使得 K 是 $N \cap L'$ 在 N 中的 τ-闭包. 类似地, 可知 $K \cap L \subseteq \tau(K) \subseteq \tau(M)$, 且 $K = K \cap N = (K \cap L) \oplus (N \cap L')$. 下证 $K \cap M_i \subseteq \tau(M)$. 设 $m \in K \cap M_i$, 则 $m = a + b$, 其中 $a \in K \cap L$, $b \in N \cap L'$. 因此 $m - b = a \in M_i + (N \cap L')$. 因为 $K \cap L \in \mathscr{T}$, 所以 $(0 : a) \in \mathscr{F}_{\tau}(R)$. 又因为 $M_i \cap (N \cap L') = 0$, 于是

$$(0 : a) = (0 : m - b) = (0 : m) \cap (0 : -b)$$

因此 $(0 : -b) \in \mathscr{F}_{\tau}(R)$, 从而 $Rb \in \mathscr{T}$. 由于 L 在 N 中是 τ-闭的, 故 L 在 N 中是 τ-纯的, 于是 $b \in N \cap L' \cong N/L \in \mathscr{F}$. 因此 $b = 0$, 从而 $m = a \in \tau(M)$. 由(iii)知, $K = (K \cap L) \oplus (N \cap L')$ 是强 τ-Extending 模且是 M 的全不变直和因子. 因为 $N \cap L' \leqslant_{\pi} K$, 所以 $N \cap L'$ 是 K 的全不变直和因子. 从而 $N \cap L'$ 是 M 的全不变直和因子. 因此 $N = L \oplus (N \cap L')$ 是 M 的直和因子, 从而 M 是强 τ-Extending 模.

推论4 设 $M = M_1 \oplus M_2$, 则以下结论等价:

(i) M 是强 τ-Extending 模;

(ii) 对任意 $K \leqslant_{\pi} M$, 若 $K \cap M_1 \subseteq \tau(M)$ 或 $K \cap M_2 \subseteq \tau(M)$, 则 K 是 M 的全不变直和因子;

(iii) 对任意 $K \leqslant_{\pi} M$, 若 $K \cap M_1 \triangleleft_{\tau} K$ 或 $K \cap M_2 \triangleleft_{\tau} K$, 或 $K \cap M_1 \subseteq \tau(M)$ 及 $K \cap M_2 \subseteq \tau(M)$, 则 K 是 M 的全不变直和因子.

证 (i)⇔(ii) 和(i)⇒(iii) 由定义2和定理2易证.

(iii)⇒(ii) 设 $L \leqslant_{\pi} M$, 且满足 $L \cap M_2 \subseteq \tau(M)$. 由文献[5]知, 存在 $K \leqslant L$, 使得 K 是 $L \cap M_1$ 在 L 中的 τ-闭包, 易知 K 是 M 的 τ-闭子模. 因为 $L \cap M_1 \triangleleft_{\tau} K$, 所以 $L \cap M_1 = K \cap M_1 \triangleleft_{\tau} K$, 由(iii)可以得到, K 是 M 的全不变直和因子. 不妨设 $M = K \oplus H$, 则

$$L = L \cap (K \oplus H) = K \oplus (L \cap H)$$

由文献[11]知, K 在 N 中是全不变的. 类似地, 存在 $N \leqslant L$, 使得 N 是 $L \cap H$ 在 L 中的 τ-闭包, 易知 N 是 M 的 τ-闭子模. 因为

$$(L \cap H) \cap (N \cap K) = 0 \subseteq \tau(N)$$

而 $L \cap H \triangleleft_{\tau} N$, 所以 $N \cap K \subseteq \tau(N) \subseteq \tau(M)$, 且

$$N = N \cap (K \oplus (L \cap H)) = (N \cap K) \oplus (L \cap H)$$

由定理2的证明过程类似可得 $N \cap M_i \subseteq \tau(M)(i = 1, 2)$. 由(iii)可以得到, N 是 M 的全不变直和因子, 因此 $L \cap H$ 是 M 的直和因子. 不妨设 $M = (L \cap H) \oplus P$, 则

$$H = H \cap ((L \cap H) \oplus P) = (L \cap H) \oplus (H \cap P)$$

即 $L \cap H$ 是 H 的直和因子. 从而 $L = K \oplus (L \cap H)$ 是 M 的全不变直和因子.

参考文献:

[1] ASGARI S, HAGHANY A. *t*-Extending Modules and *t*-Baer Modules [J]. Communications in Algebra, 2011, 39(5): 1605-1623.

[2] ASGARI S, HAGHANY A, REZAEI A R. Modules Whose *t*-Closed Submodules Have a Summand as a Complement [J]. Communications in Algebra, 2014, 42(12): 5299-5318.

[3] ASGARI S H. *t*-Quasi-Continuous Modules [J]. Communications in Algebra, 2019, 47(5): 1939-1953.

[4] ASGARI S H. *t*-Continuous Modules [J]. Communications in Algebra, 2017, 45(5): 1941-1952.

[5] ÇEKEN S, ALKAN M. On τ-Extending Modules [J]. Mediterranean Journal of Mathematics, 2012, 9(1): 129-142.

[6] ATANI S E, KHORAMDEL M, HESARI S D P. On Strongly Extending Modules [J]. Kyungpook Mathematical Journal, 2014, 54(2): 237-247.

[7] ATANI S E, HESARI S D P, KHORAMDEL M. Strongly t-Extending Modules and Strongly t-Baer Modules [J]. International Electronic Journal of Algebra, 2016, 20(20): 86-99.

[8] 王　兴，杨　刚. Gorenstein AC-投射模的函子伴随性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2020，42(10)：101-108.

[9] 张健芳，高增辉. Gorenstein FP_n-投射模 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2020，45(8)：12-17.

[10] 蔡晓东，曹　苗，狄振兴. 环同态下的与半对偶模相关的 Gorenstein 平坦模的传递性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2020，45(6)：16-20.

[11] BIRKENMEIER G F, MÜLLER B J, RIZVI S T. Modules in Which Every Fully Invariant Submodule is Essential in a Direct Summand [J]. Communications in Algebra, 2002, 30(3): 1395-1415.

[12] GOMEZ PARDO J L. Spectral Gabriel Topologies and Relative Singular Functors [J]. Communications in Algebra, 1985, 13(1): 21-57.

[13] DUNG N V, HUYNH D V, SMITH P F, et al. Extending Modules [M]. Harlow: Longman Scientifific & Technical, 1994.

[14] ÇEKEN S, ALKAN M. Singular and Nonsingular Modules Relative to a Torsion Theory [J]. Communications in Algebra, 2017, 45(8): 3377-3389.

Strongly τ-Extending Modules

LI Yu-yan,　HE Dong-lin

Department of Mathematics and Information Sciences, Longnan Teachers College, Longnan Gansu 742500, China

Abstract: Let $\tau=(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ be a hereditary torsion theory. The concept of strongly τ-Extending module is introduced, several properties of strongly τ-Extending module are studied, and the relations between τ-Extending module and strongly τ-Extending module are discussed, an example is given to show that τ-Extending module is not necessarily strongly τ-Extending. The closure of strong τ-Extending module under direct summand and direct sum are considered. The results show that strong τ-Extending module is closed with respect to the direct summand, but it is not closed with respect to the direct sum. Moreover, the local conditions that direct sum of strong τ-Extending module is also strong τ-Extending are given, it is proved that the direct sum of τ-torsion free strongly τ-Extending module and τ-torsion module is also strongly τ-Extending. Finally, some equivalent characterizations that M is strongly τ-Extending module are given for $M=\bigoplus_{i\in I}M_i(|I|\geqslant 2)$.

Key words: τ-essential submodules; strongly τ-Extending modules; direct sum; fully invariant direct summand

责任编辑　廖　坤