DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2021.06.004

# 排列的右弱 Bruhat 序与拟对称生成函数①

李梦琪, 李雪珊

西南大学 数学与统计学院,重庆 400715

**摘要:**"刻画排列的子集使其拟对称生成函数恰好是对称的"是代数组合中长期未解决的问题. 结合排列的弱 Bruhat 偏序结构,研究了主理想及对偶主理想对应的拟对称生成函数. 证明了:当一个排列 $\pi$ 避免 132 和 213 模式时,$\pi$ 生成的主理想对应的拟对称生成函数是完全齐次对称函数;对偶地,当一个排列 $\pi$ 避免 231 和 312 模式时,$\pi$ 生成的对偶主理想对应的拟对称生成函数是初等对称函数. 从而给出了这两组对称函数对偶性的另一解释.

**关 键 词:**排列;拟对称函数;对称函数;弱 Bruhat 序;主理想

**中图分类号:O157** **文献标志码:A** **文章编号:**1000-5471(2021)06-0014-06

令$[n]=\{1, 2, \cdots, n\}$,$\mathscr{S}_n$ 表示$[n]$上所有排列的集合. 设 $A \subseteq \mathscr{S}_n$,我们考虑拟对称生成函数

$$\mathscr{Q}(A)=\sum_{\tau \in A} F_{\mathrm{Des}(\tau)}$$

其中对 $\tau=\tau_1\tau_2\cdots\tau_n \in \mathscr{S}_n$,$\mathrm{Des}(\tau)=\{i: 1 \leqslant i \leqslant n-1, \tau_i > \tau_{i+1}\}$ 表示排列 $\tau$ 的降序集. 对 $S \subseteq [n-1]$,

$$F_S=\sum_{\substack{i_1 \leqslant i_2 \leqslant \cdots \leqslant i_n \\ j \in S \Rightarrow i_j < i_{j+1}}} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n} \tag{1}$$

表示基本拟对称函数. 文献[1]提出如下问题:$\mathscr{S}_n$ 的哪些子集 $A$ 对应的拟对称生成函数 $\mathscr{Q}(A)$ 是对称函数?该问题提出后,很多组合学者对此进行了深入的研究. 如果 $\mathscr{Q}(A)$ 是对称函数,则称集合 $A$ 是对称的. 如果 $\mathscr{Q}(A)$ 展开成 Schur 函数后的系数都为非负数,则称集合 $A$ 是 Schur-正的. 对 $J \subseteq [n-1]$,文献[2]证明了逆降序类

$$\{\pi \in \mathscr{S}_n: \mathrm{Des}(\pi^{-1})=J\}$$

是对称的. 文献[3-4]结合排列的模式避免问题,研究了排列集是对称集的条件. 基于几何网格和乘法运算,文献[5]给出了一种构造 Schur-正的排列集的一般方法.

本文结合排列的弱 Bruhat 偏序结构,研究了主理想及对偶主理想对应的拟对称生成函数. 主要结果如下(相关定义和记号见本文第 1 节):

**定理 1** 若 $\pi \in \mathscr{S}_n(132, 213)$,则

$$\mathscr{Q}(\Lambda_\pi)=\sum_{\tau \leqslant_R \pi} F_{\mathrm{Des}(\tau)}=h_{\lambda_\pi}$$

**定理 2** 若 $\pi \in \mathscr{S}_n(231, 312)$,则

$$\mathscr{Q}(V_\pi)=\sum_{\pi \leqslant_R \tau} F_{\mathrm{Des}(\tau)}=e_{\lambda_{\pi^c}}$$

---

① 收稿日期:2021-01-30

基金项目:国家自然科学基金项目(12071383).

作者简介:李梦琪,硕士研究生,主要从事代数组合的研究.

通信作者:李雪珊,博士,副教授.

# 1　预备知识

为了讨论方便，我们需要引入一些基本概念和记号.

给定正整数 $n$，如果正整数序列 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)$ 满足 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k=n$，则称 $\alpha$ 为 $n$ 的一个合成，记为 $\alpha\models n$. 我们知道 $n$ 的所有合成与 $[n-1]$ 的所有子集之间是一一对应的. 具体而言，给定合成 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)\models n$，记 $S_\alpha=\{\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\cdots,\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{k-1}\}$ 是 $\alpha$ 对应的集合，反之，对于集合 $S=\{s_1,s_2,\cdots,s_{k-1}\}_<\subseteq[n-1]$，它对应的合成为 $(s_1,s_2-s_1,\cdots,s_{k-1}-s_{k-2},n-s_{k-1})$，记为 $\alpha_S$. 设 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)$，$\beta=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l)$ 是 $n$ 的合成，如果 $S_\beta\subseteq S_\alpha$，则称 $\alpha$ 是 $\beta$ 的细分，记为 $\alpha\leqslant\beta$.

给定合成 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)\models n$，记单项式拟对称函数为 $M_\alpha$，即

$$M_\alpha=\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k}x_{i_1}^{\alpha_1}x_{i_2}^{\alpha_2}\cdots x_{i_k}^{\alpha_k}$$

由等式(1) 可得

$$F_S=\sum_{S\subseteq S_\alpha\subseteq[n-1]}M_\alpha \tag{2}$$

基于上述双射 $\alpha\longmapsto S_\alpha$，我们既可以用集合也可以用合成作为指标来标记拟对称函数. 事实上，$M_S\triangleq M_{\alpha_S}$，$F_\alpha\triangleq F_{S_\alpha}$，其中 $S\subseteq[n-1]$，$\alpha\models n$. 于是等式(2) 等价于

$$F_\alpha=\sum_{\beta\leqslant\alpha}M_\beta$$

更多拟对称函数相关知识可参见文献[6-7].

给定正整数 $n$，如果正整数序列 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k)$ 满足 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_k$ 且 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k=n$，则称 $\lambda$ 为 $n$ 的一个分拆，记为 $\lambda\vdash n$. 对称函数的各组经典的基(见文献[7]) 可用整数分拆来标记. 给定 $\lambda\vdash n$，记 $m_\lambda$ 为单项式对称函数，即

$$m_\lambda=\sum_\alpha M_\alpha$$

其中 $\alpha$ 取遍 $\lambda$ 的所有排列. 对正整数 $k$，令

$$h_k=\sum_{i_1\leqslant\cdots\leqslant i_k}x_{i_1}\cdots x_{i_k}$$

$$e_k=\sum_{i_1<\cdots<i_k}x_{i_1}\cdots x_{i_k}$$

给定分拆 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_l)$，定义完全齐次对称函数 $h_\lambda=h_{\lambda_1}h_{\lambda_2}\cdots h_{\lambda_l}$ 及初等对称函数 $e_\lambda=e_{\lambda_1}e_{\lambda_2}\cdots e_{\lambda_l}$.

给定排列 $\pi=\pi_1\pi_2\cdots\pi_n\in\mathscr{S}_n$，如果 $\pi$ 中不存在 $i<j<k$ 使得 $\pi_i<\pi_k<\pi_j$，则称 $\pi$ 是避免 132 模式的排列. 令 $\mathscr{S}_n(132)$ 表示 $\mathscr{S}_n$ 中避免 132 模式的所有排列构成的集合. 类似地，我们也可以定义避免 213 模式的排列. 令 $\mathscr{S}_n(132,213)$ 表示 $\mathscr{S}_n$ 中既避免 132 模式也避免 213 模式的所有排列构成的集合. 集合 $\mathscr{S}_n(231,312)$ 也有类似的定义(参见文献[8-9]). 设 $\pi=\pi_1\pi_2\cdots\pi_n\in\mathscr{S}_n$，称 $\pi^c=(n+1-\pi_1)(n+1-\pi_2)\cdots(n+1-\pi_n)$ 为 $\pi$ 的补排列. 显然，$\pi\in\mathscr{S}_n(132,213)$ 当且仅当 $\pi^c\in\mathscr{S}_n(231,312)$. 不难验证 $|\mathscr{S}_n(132,213)|=2^{n-1}$，事实上，对 $\pi\in\mathscr{S}_n(132,213)$，有 $\mathrm{Des}(\pi)\subseteq[n-1]$，反之，对 $S=\{s_1,s_2,\cdots,s_k\}_<\subseteq[n-1]$，记 $s_0=0$，$s_{k+1}=n$，$\alpha=\alpha_S$，令

$$\pi_S=I_\alpha^{(1)}\cdot I_\alpha^{(2)}\cdot\cdots\cdot I_\alpha^{(k+1)} \tag{3}$$

其中 $\cdot$ 为连接运算，$I_\alpha^{(i)}$ 表示集合

$$\mathscr{I}_\alpha^{(i)}=\{n-s_i+1,n-s_i+2,\cdots,n-s_{i-1}\} \tag{4}$$

中元素按递增方式得到的排列. 则显然 $\pi_S$ 是 $\mathscr{S}_n(132,213)$ 中唯一满足条件 $\mathrm{Des}(\pi_S)=S$ 的排列. 例如，令 $n=11$，$S=\{2,5,7\}\subseteq[10]$，则 $\pi_S=10\ 11\ 7\ 8\ 9\ 5\ 6\ 1\ 2\ 3\ 4\in\mathscr{S}_n(132,213)$.

给定 $\pi=\pi_1\pi_2\cdots\pi_n\in\mathscr{S}_n$，称 $\mathrm{Inv}(\pi)=\{(\pi_i,\pi_j):1\leqslant i<j\leqslant n,\pi_i>\pi_j\}$ 为排列 $\pi$ 的逆序集. 集合 $\mathscr{S}_n$ 上的右弱 Bruhat 序 $\leqslant_R$ 定义如下：$\pi\leqslant_R\sigma$ 当且仅当 $\mathrm{Inv}(\pi)\subseteq\mathrm{Inv}(\sigma)$. 由于 $\mathscr{S}_n$ 中的排列 $\pi$ 可以看成如下双射：

$$\pi:[n]\longrightarrow[n]$$

$$i\longmapsto\pi_i$$

则该双射的逆映射也对应一个排列，记为 $\pi^{-1}$．集合 $\mathscr{S}_n$ 上的左弱 Bruhat 序 $\leqslant_L$ 定义如下：$\pi \leqslant_L \sigma$ 当且仅当 $\pi^{-1} \leqslant_R \sigma^{-1}$(见文献[10])．令

$$\Lambda_\pi = \{\tau \in \mathscr{S}_n : \tau \leqslant_R \pi\}$$

及

$$V_\pi = \{\tau \in \mathscr{S}_n : \pi \leqslant_R \tau\}$$

分别表示 $\pi$ 在右弱 Bruhat 序下的主理想及对偶主理想．

在证明本文的主要结果时，我们需要用到以下引理：

**引理 1**[11] 给定 $S \subseteq [n-1]$，设 $\pi_S$ 的定义由等式(3)给出．则对任意 $\tau \in \mathscr{S}_n$，$\mathrm{Des}(\tau) \subseteq S$ 的充要条件是 $\tau \leqslant_L \pi_S$．

**证** 首先证明必要性．设 $\mathrm{Des}(\tau) = T \subseteq S$，令 $T = \{t_1, t_2, \cdots, t_k\}_<$，$t_0 = 0$，$t_{k+1} = n$．由 $\pi_T$ 及 $\pi_T^{-1}$ 的定义知

$$\pi_T^{-1} = \bar{I}_T^{(1)} \cdot \bar{I}_T^{(2)} \cdot \cdots \cdot \bar{I}_T^{(k+1)}$$

其中 $\cdot$ 为连接运算，$\bar{I}_T^{(i)}$ 表示集合

$$\mathscr{T}_T^{(i)} = \{t_{k+1-i}+1, t_{k+1-i}+2, \cdots, t_{k+2-i}\}$$

中元素按递增方式得到的排列．于是

$$\mathrm{Inv}(\pi_T^{-1}) = \bigcup_{1 \leqslant i < j \leqslant k+1} \mathscr{T}_T^{(i)} \times \mathscr{T}_T^{(j)} \tag{5}$$

显然 $\mathrm{Inv}(\tau^{-1}) \subseteq \mathrm{Inv}(\pi_T^{-1})$，即 $\tau \leqslant_L \pi_T$．由等式(5)易知 $\pi_T \leqslant_L \pi_S$ 当且仅当 $T \subseteq S$．因此 $\tau \leqslant_L \pi_S$．

反之，设 $\tau \leqslant_L \pi_S$．对 $\forall i \in \mathrm{Des}(\tau)$ 有 $(\tau_i, \tau_{i+1}) \in \mathrm{Inv}(\tau)$，即 $(i+1, i) \in \mathrm{Inv}(\tau^{-1})$．而 $\mathrm{Inv}(\tau^{-1}) \subseteq \mathrm{Inv}(\pi_S^{-1})$，于是 $(i+1, i) \in \mathrm{Inv}(\pi_S^{-1})$，所以 $((\pi_S)_i, (\pi_S)_{i+1}) \in \mathrm{Inv}(\pi_S)$，即 $i \in \mathrm{Des}(\pi_S) = S$．因此，$\mathrm{Des}(\tau) \subseteq S$．

由引理 1 的证明容易推出以下引理：

**引理 2** 设 $\tau \in \mathscr{S}_n$，$\sigma \in \mathscr{S}_n(132, 213)$．则 $\tau \leqslant_L \sigma$ 的充要条件是 $\mathrm{Des}(\tau) \subseteq \mathrm{Des}(\sigma)$，即

$$\Lambda_\sigma = \{\tau \in \mathscr{S}_n : \mathrm{Des}(\tau^{-1}) \subseteq \mathrm{Des}(\sigma^{-1})\}$$

## 2 主要结果的证明

给定 $\pi \in \mathscr{S}_n$，将 $\alpha_{\mathrm{Des}(\pi)}$ 中元素按递减方式排列得到的分拆记为 $\lambda_\pi$．

**定理 1 的证明** 由引理 2 可得

$$\mathscr{Q}(\Lambda_\pi) = \sum_{\tau \leqslant_R \pi} F_{\mathrm{Des}(\tau)} = \sum_{\mathrm{Des}(\tau^{-1}) \subseteq \mathrm{Des}(\pi^{-1})} F_{\mathrm{Des}(\tau)} = \sum_{\mathrm{Des}(\tau) \subseteq \mathrm{Des}(\pi^{-1})} F_{\mathrm{Des}(\tau^{-1})}$$

设 $\alpha = \alpha_{\mathrm{Des}(\pi^{-1})} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{k+1}) \models n$，记 $\mathscr{H}_\alpha$ 表示大小为 $n$ 的水平带形，其中第 $k+2-i$ 行有 $\alpha_i$ 个方格，例如，当 $n=8$，$\alpha = (2, 3, 1, 2)$ 时，它所对应的水平带形如图 1 所示．

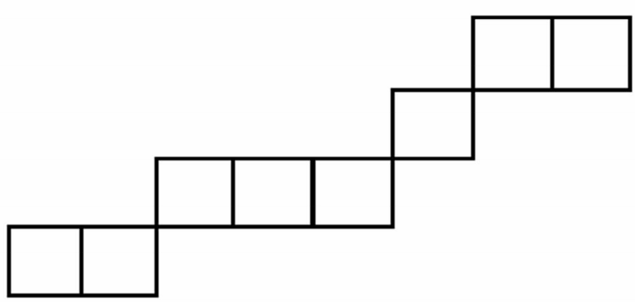

图 1 水平带形图

令 $\mathrm{SYT}(\mathscr{H}_\alpha)$ 表示所有形状为 $\mathscr{H}_\alpha$ 的标准杨表的集合．根据文献[2]，对 $\forall T \in \mathrm{SYT}(\mathscr{H}_\alpha)$，对 $T$ 从下到上且每行从左到右进行读数可以唯一地得到一个排列 $\tau_T$ 满足 $\mathrm{Des}(\tau_T) \subseteq \mathrm{Des}(\pi^{-1})$．显然 $T \longmapsto \tau_T$ 是一个双射且满足 $\mathrm{Des}(\tau_T{}^{-1}) = \mathrm{Des}(T)$．因此

$$\sum_{\mathrm{Des}(\tau)\subseteq \mathrm{Des}(\pi^{-1})} F_{\mathrm{Des}(\tau^{-1})} = \sum_{T\in \mathrm{SYT}(\mathscr{H}_\alpha)} F_{\mathrm{Des}(T)}$$

令 $s_{\mathscr{H}_\alpha}$ 表示形状为 $\mathscr{H}_\alpha$ 的斜 Schur 函数，即形式幂级数

$$s_{\mathscr{H}_\alpha}(x) = \sum_T x^T$$

其中 $T$ 取遍所有形状为 $\mathscr{H}_\alpha$ 的半标准杨表(见文献[7]的定义 7.10.1). 由文献[7]的定理 7.19.7 知

$$\sum_{T\in \mathrm{SYT}(\mathscr{H}_\alpha)} F_{\mathrm{Des}(T)} = s_{\mathscr{H}_\alpha}$$

容易验证，若 $\pi\in\mathscr{S}_n(132, 213)$，则 $\pi^{-1}\in\mathscr{S}_n(132, 213)$ 且 $\alpha_{\mathrm{Des}(\pi)} = (\alpha_{k+1}, \alpha_k, \cdots, \alpha_1)$，故 $\lambda_\pi = \lambda_{\pi^{-1}}$. 因此，由斜 Schur 函数及完全齐次对称函数的定义可得

$$\mathscr{Q}(\Lambda_\pi) = s_{\mathscr{H}_\alpha} = h_{\lambda_\pi}$$

上述证明方法主要通过斜 Schur 函数将 $\mathscr{Q}(\Lambda_\pi)$ 与 $h_{\lambda_\pi}$ 联系起来. 下面我们借用单项式拟对称函数与单项式对称函数给出定理 1 的另一种证明方法.

**定理 1 的另一证明**　根据文献[11]，映射 $\tau\longmapsto \mathrm{Des}(\tau)$ 可以诱导出从排列上的 Hopf 代数 $\mathscr{S}Sym$ 到拟对称函数的 Hopf 代数 $\mathscr{Q}Sym$ 之间的一个同态 $\mathscr{D}$ 如下：

$$\mathscr{D}: \mathscr{S}Sym \longrightarrow \mathscr{Q}Sym$$
$$\mathscr{F}_\tau \longmapsto F_{\mathrm{Des}(\tau)}$$

$\amalg_{n\geqslant 0}\{\mathscr{F}_\tau: \tau\in\mathscr{S}_n\}$ 表示 $\mathscr{S}Sym$ 的基本基. 根据文献[11]中的等式(1.12)可定义 $\mathscr{S}Sym$ 的单项式基 $\amalg_{n\geqslant 0}\{\mathscr{M}_\sigma: \sigma\in\mathscr{S}_n\}$ 为

$$\mathscr{M}_\sigma = \sum_{\sigma\leqslant_L\tau} \mu_{\mathscr{S}_n}(\sigma, \tau)\mathscr{F}_\tau$$

其中 $\mu_{\mathscr{S}_n}(\cdot, \cdot)$ 表示 $\mathscr{S}_n$ 上左弱 Bruhat 偏序的莫比乌斯函数. 由莫比乌斯反演公式可得

$$\mathscr{F}_\sigma = \sum_{\sigma\leqslant_L\tau} \mathscr{M}_\tau$$

因此，我们有

$$\mathscr{Q}(\Lambda_\pi) = \sum_{\tau\leqslant_R\pi} F_{\mathrm{Des}(\tau)} = \sum_{\tau\leqslant_R\pi} \mathscr{D}(\mathscr{F}_\tau) = \sum_{\tau\leqslant_R\pi}\sum_{\tau\leqslant_L\sigma} \mathscr{D}(\mathscr{M}_\sigma) =$$
$$\sum_{\sigma\in\mathscr{S}_n} |\{\tau: \tau\leqslant_R\pi, \tau\leqslant_L\sigma\}| \mathscr{D}(\mathscr{M}_\sigma)$$

由文献[11]的定理 7.3 知

$$\mathscr{Q}(\Lambda_\pi) = \sum_{\sigma\in\mathscr{S}_n(132, 213)} |\{\tau: \tau\leqslant_R\pi, \tau\leqslant_L\sigma\}| M_{\mathrm{Des}(\sigma)}$$

又由引理 2 可得

$$\mathscr{Q}(\Lambda_\pi) = \sum_{\beta\models n} |\{\tau: \tau\leqslant_R\pi, \mathrm{Des}(\tau)\subseteq S_\beta\}| M_\beta$$

设 $\alpha = \alpha_{\mathrm{Des}(\pi)} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{k+1})\models n$，因为 $\pi\in\mathscr{S}_n(132, 213)$，则由等式(3)知

$$\pi = I_\alpha^{(1)}\cdot I_\alpha^{(2)}\cdot\cdots\cdot I_\alpha^{(k+1)} \tag{6}$$

对 $\forall\beta = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{l+1})\models n$，记

$$X_{\pi,\beta} = \{\tau: \tau\leqslant_R\pi, \mathrm{Des}(\tau)\subseteq S_\beta\}$$

给定两个各项互异的正整数列 $u = u_1u_2\cdots u_m$，$v = v_1v_2\cdots v_n$，其中 $\{u_1, u_2, \cdots, u_m\}\cap\{v_1, v_2, \cdots, v_n\} = \varnothing$. 如果 $w = w_1w_2\cdots w_{m+n}$ 是集合 $\{u_1, u_2, \cdots, u_m, v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 上的一个排列，且存在 $1\leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_m\leqslant m+n$ 使得子列 $w_{i_1}w_{i_2}\cdots w_{i_m} = u$，$w_{j_1}w_{j_2}\cdots w_{j_n} = v$，其中 $\{j_1, j_2, \cdots, j_n\}_< = [m+n]\backslash\{i_1, i_2, \cdots, i_m\}$，则称 $w$ 为 $u$ 和 $v$ 的一个洗牌，记 $u ⧢ v$ 表示 $u$ 和 $v$ 的所有洗牌的集合，见文献[12]. 由 $\leqslant_R$ 的定义及等式(6)易知 $\tau\leqslant_R\pi$ 当且仅当

$$\tau\in I_\alpha^{(1)} ⧢ I_\alpha^{(2)} ⧢ \cdots ⧢ I_\alpha^{(k+1)}$$

令 $S_\beta = \{s_1, s_2, \cdots, s_l\}$，$s_0 = 0$，$s_{l+1} = n$. 对任意 $\tau\in X_{\pi,\beta}$，记 $\mathscr{J}_\tau^{(j)} = \{\tau_{s_{j-1}+1}, \tau_{s_{j-1}+2}, \cdots, \tau_{s_j}\}$，$1\leqslant j\leqslant l+1$. 由 $\mathrm{Des}(\tau)\subseteq S_\beta$ 可知

$$\tau = J_{\tau}^{(1)} \cdot \mathscr{J}_{\tau}^{(2)} \cdot \cdots \cdot \mathscr{J}_{\tau}^{(k+1)}$$

其中 $\cdot$ 为连接运算，$J_{\tau}^{(j)}$ 表示集合 $\mathscr{J}_{\tau}^{(j)}$ 中元素按递增方式得到的排列. 令

$$a_{i,j} = \begin{cases} |\mathscr{I}_{\alpha}^{(i)} \cap \mathscr{J}_{\tau}^{(j)}| & 1 \leqslant i \leqslant k+1 \text{ 且 } 1 \leqslant j \leqslant l+1 \\ 0 & i > k+1 \text{ 或 } j > l+1 \end{cases}$$

其中 $\mathscr{I}_{\alpha}^{(i)}$ 的定义见等式(4). 于是可以得到矩阵 $\boldsymbol{A}_{\tau} = (a_{i,j})_{i,j \geqslant 1}$，容易看出

$$\sum_{j=1}^{l+1} a_{i,j} = \left| \mathscr{I}_{\alpha}^{(i)} \cap \left( \bigcup_{j=1}^{l+1} \mathscr{J}_{\tau}^{(j)} \right) \right| = |\mathscr{I}_{\alpha}^{(i)} \cap [n]| = \alpha_i$$

且

$$\sum_{i=1}^{k+1} a_{i,j} = \left| \left( \bigcup_{i=1}^{k+1} \mathscr{I}_{\alpha}^{(i)} \cap \mathscr{J}_{\tau}^{(j)} \right) \right| = |[n] \cap \mathscr{J}_{\tau}^{(j)}| = \beta_j$$

因此矩阵 $\boldsymbol{A}_{\tau}$ 的行和向量 $row(\boldsymbol{A}_{\tau}) = \alpha$，列和向量 $col(\boldsymbol{A}_{\tau}) = \beta$. 例如，设 $\pi = 789562341 \in \mathscr{S}_9(132, 213)$，$\beta = (2, 4, 3) \models 9$. 于是 $\alpha = \alpha_{\mathrm{Des}(\pi)} = (3, 2, 3, 1)$，$S_{\beta} = \{2, 6\}$. 对 $\tau = 275689134 \in X_{\pi,\beta}$，有

$$\boldsymbol{A}_{\tau} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

且满足行和向量 $row(\boldsymbol{A}_{\tau}) = (3, 2, 3, 1) = \alpha$，列和向量 $col(\boldsymbol{A}_{\tau}) = (2, 4, 3) = \beta$.

记

$$Y_{\alpha,\beta} = \{\boldsymbol{A} : \boldsymbol{A} = (a_{i,j})_{i,j \geqslant 1},\ a_{i,j} \in \mathbb{N},\ row(\boldsymbol{A}) = \alpha,\ col(\boldsymbol{A}) = \beta\}$$

易知 $\tau \longmapsto \boldsymbol{A}_{\tau}$ 是 $X_{\pi,\beta}$ 到 $Y_{\alpha,\beta}$ 的双射. 于是

$$\mathscr{Q}(\Lambda_{\pi}) = \sum_{\beta \models n} |Y_{\alpha,\beta}| M_{\beta}$$

从而由文献[7]的命题 7.5.1 知 $\mathscr{Q}(\Lambda_{\pi}) = h_{\lambda_{\pi}}$.

**定理 2 的证明**　设 $\alpha = \alpha_{\mathrm{Des}(\pi^c)} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{k+1})$. 首先由条件知 $\pi^c \in \mathscr{S}_n(132, 213)$，因此由等式(3)易知 $\pi = \pi^{-1}$. 此外，不难验证：对 $\forall \sigma, \tau \in \mathscr{S}_n$，$\sigma \leqslant_L \tau$ 当且仅当 $\tau^c \leqslant_L \sigma^c$. 基于这两个事实，接下来的证明过程与定理 1 的第一种证明方法类似，只需将其中的水平带形改为大小为 $n$ 的垂直带形 $\mathscr{V}_{\alpha}$，则可推出

$$\mathscr{Q}(V_{\pi}) = \sum_{T \in \mathrm{SYT}(\mathscr{V}_{\alpha})} F_{\mathrm{Des}(T)} = s_{\mathscr{V}_{\alpha}}$$

再由斜 Schur 函数和初等对称函数的定义得，$s_{\mathscr{V}_{\alpha}} = e_{\lambda_{\pi^c}}$，从而定理 2 得证.

类似于定理 1 的第二种证明方法，我们可以给出定理 2 的另一证明. 证明过程主要应用以下两个等式：

$$\mathscr{Q}(V_{\pi}) = \sum_{\beta \models n} |\{\tau : \pi \leqslant_R \tau,\ \mathrm{Des}(\tau) \subseteq S_{\beta}\}| M_{\beta} \tag{7}$$

$$e_{\lambda_{\pi^c}} = \sum_{\mu \vdash n} M_{\lambda_{\pi^c},\mu} m_{\mu} \tag{8}$$

其中等式(7)由文献[11]的定理 7.3 和引理 2 推出，等式(8)由文献[7]的命题 7.4.1 得出.

## 3　小　　结

本文分别给出了拟对称生成函数 $\mathscr{Q}(\Lambda_{\pi})$ 及 $\mathscr{Q}(V_{\pi})$ 是对称函数的一个充分条件，通过计算机编程计算，我们发现当 $n \leqslant 8$ 时，该充分条件也是必要条件，但尚未找到合适的证明方法. 因此，在本文最后，我们提出下列猜想：

**猜想 1**　设 $\pi \in \mathscr{S}_n$，则 $\mathscr{Q}(\Lambda_{\pi})$ 是对称函数的充要条件是 $\pi \in \mathscr{S}_n(132, 213)$.

**猜想 2**　设 $\pi \in \mathscr{S}_n$，则 $\mathscr{Q}(V_{\pi})$ 是对称函数的充要条件是 $\pi \in \mathscr{S}_n(231, 312)$.

**参考文献：**

[1]　GESSEL I M, REUTENAUER C. Counting Permutations with Given Cycle Structure and Descent Set [J]. Journal of Combinatorial Theory (Series A), 1993, 64(2): 189-215.

[2] GESSEL I M. Multipartite $P$-Partitions and Inner Products of Skew Schur Functions [J]. Contemporary Mathematics, 1984, 101(34): 289-301.

[3] BLOOM J S, SAGAN B E. Revisiting Pattern Avoidance and Quasi-symmetric Functions [J]. Annals of Combinatorics, 2020, 24(2): 337-361.

[4] HAMAKER Z, PAWLOWSKI B, SAGAN B E. Pattern Avoidance and Quasi-symmetric Functions [J]. Algebraic Combinatorics, 2020, 3(2): 365-388.

[5] ELIZALDE S, ROICHMAN Y. Schur-positive Sets of Permutations via Products and Grid Classes [J]. Journal and Algebraic Combinatorics, 2017, 45(2): 363-405.

[6] LUOTO K, MYKYTIUK S, VAN WILLIGENBURG S. An Introduction to Quasi-symmetric Schur Functions: Hopf Algebras, Quasisymmetric Functions, and Young Composition Tableaux [M]. New York: Springer, 2013.

[7] STANLEY R. Enumerative Combinatories. Volume 2 [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

[8] SIMION R, SCHMIDT F W. Restricted Permutations [J]. European Journal of Combinatorics, 1985, 6(4): 383-406.

[9] STANLEY R. Enumerative Combinatories. Volume 1 [M]. 2th ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2012.

[10] HUGH D. A Refinement of Weak Order Intervals into Distributive Lattices [J]. Annals of Combinatorics, 2013, 17: 655-670.

[11] AGUIAR M, SOTTILLE F. Structure of the Malvenuto-Reutenauer Hopf Algebra of Permutations [J]. Advances in Mathematics, 2005, 191(2): 225-275.

[12] GARSIA A M, REMMEL J. Shuffles of Permutations and the Kronecker Product [J]. Graphs and Combinatorics, 1985(1): 217-263.


# Right Weak Bruhat Order on Permutations and Quasi-Symmetric Generating Functions


LI Meng-qi, LI Xue-shan

*School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China*



**Abstract**: Characterizing sets of permutations whose associated quasi-symmetric function is symmetric is a long-standing problem in algebraic combinatorics. Considering the weak Bruhat order on permutations, we study the quasi-symmetric generating function associated to principal order ideals and dual principal order ideals in this paper. We prove that when a permutation $\pi$ is both 132 and 213 patterns, the quasi-symmetric generating function associated to the principal order ideal generated by $\pi$ is just the complete homogeneous symmetric function. Dually, for a permutation $\pi$ avoiding both 231 and 312 patterns, the quasi-symmetric generating function associated to the dual principal order ideal generated by $\pi$ is just the elementary symmetric function. This gives another explanation for the duality of these two bases of symmetric function.



**Key words**: permutation; quasi-symmetric function; symmetric function; weak Bruhat order; principal order ideal

责任编辑 廖 坤