第 46 卷 第 6 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2021 年 6 月
Vol. 46 No. 6　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Jun. 2021

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2021.06.005

交换折叠超立方体的 2-额外边连通度[①]

蔡学鹏

新疆农业大学 数理学院,乌鲁木齐 830052

摘要: g-额外边连通度是衡量大型互连网络可靠性和容错性的一个重要参数. 设 G 是连通图且 g 是非负整数,如果图 G 中存在某种边子集,使得 G 中删除这种边子集后得到的图不连通并且每个分支的点数超过 g,则所有这种边子集中基数最小的边子集的基数称为图 G 的 g-额外边连通度,记作 $\lambda_g(G)$. 一个新的网络交换折叠超立方体网络记为 $EFH(s,t)$. 本文利用 2-额外边连通度作为评价可靠性的重要度量,对交换折叠超立方体网络的可靠性进行了分析,得到了交换折叠超立方体网络的 2-额外边连通度. 证明了:$EFH(s,t)$的 2-额外边连通度等于 $3s+2$ $(6\leqslant s\leqslant t)$. 这个结果意味着:为了使 $EFH(s,t)$不连通且每个分支都至少包含 3 个顶点,至少有 $3s+2$ 条边要同时发生故障.

关　键　词: 交换折叠超立方体;额外边连通度;互连网络

中图分类号: O157.6　　**文献标志码:** A　　**文章编号:** 1000-5471(2021)06-0020-07

众所周知,互连网络在并行计算及通信系统中发挥着重要作用. 一个网络的拓扑结构在数学上通常被抽象地模型化为一个图 $G=(V(G),E(G))$,其中:$V(G)$ 是图 G 的顶点集,表示网络处理器的集合;$E(G)$ 是图 G 的边集,表示网络的通信链路集. 在本文中,术语图和网络可以互换使用. 本文中所有的图都认为是无向的、简单的和连通的,对于未说明的图论符号和术语,可参考文献[1-3].

设 $G=(V(G),E(G))$ 是一个图. 对于图 G 中任意顶点 $u\in V(G)$,设集合 $\{v\in V(G)\setminus\{u\}\mid(u,v)\in E(G)\}$ 和集合 $\{(u,v)\in E(G)\mid v\in V(G)\setminus\{u\}\}$ 分别表示顶点 u 的邻点集和邻边集,记作 $N_G(u)$ 和 $NE_G(u)$. $d_G(u)=|N_G(u)|$ 称为图 G 中顶点 u 的度. 对于图 G 的子图 K,设 $N_G(K)=\bigcup_{u\in K}N_G(u)-V(K)$ 和 $NE_G(K)=\bigcup_{u\in K}NE_G(u)-E(K)$ 分别表示子图 K 在 G 中的邻点集和子图 K 在 G 中的邻边集.

图 G 的经典连通度 $\kappa(G)$ 和边连通度 $\lambda(G)$ 是衡量网络可靠性和容错性的两个重要参数[4]. 连通度 $\kappa(G)$ 和边连通度 $\lambda(G)$ 越大,网络的可靠性就越高. 但是,这两个参数有明显的不足之处,比如,在互连网络的实际应用当中,与一个处理器相连接的所有处理器(链路)同时发生故障的可能性较低,所以用这两个参数衡量网络可靠性和容错性是不精确的. 为克服这些不足之处,可以通过对 $G-S$ 的每一个分支强加一些限制条件来推广图 G 的经典连通度(边连通度),这里 $S\subset V(G)$ $(S\subset E(G))$. 文献[5]首次考虑了这个问题并且提出了图 G 的条件连通度(边连通度)的概念.

设 $\mathscr{G}$ 是图 G 所具有的一种性质. 文献[5]定义了图 G 的条件连通度(边连通度):如果 G 中存在某种点子集(边子集),使得 G 删除这种点子集(边子集)后得到的图不连通且每个连通分支都具有性质 $\mathscr{G}$,则所有这种点子集(边子集)中基数最小的点子集(边子集)的基数称为图 G 的条件连通度(边连通度),记为 $\kappa(G:\mathscr{G})$ $(\lambda(G:\mathscr{G}))$.

---

① 收稿日期:2020-05-04

基金项目:新疆维吾尔自治区高校科研计划项目(XJEDU2018Y021);国家级大学生创新创业训练计划项目(201810758035).

作者简介:蔡学鹏,讲师,硕士,主要从事图论及其应用的研究.

随后，文献[6-7]研究了下面所述的一种条件连通度(边连通度)：设G是连通图且g是非负整数，如果图G中存在某种点子集(边子集)，使得G中删除这种点子集(边子集)后得到的图不连通并且每个分支的点数超过g，则所有这种点子集(边子集)中基数最小的点子集(边子集)的基数称为图G的g-额外连通度(g-额外边连通度)，记为$\kappa_g(G)(\lambda_g(G))$. $\kappa_1(G)(\lambda_1(G))$也称作图$G$的超连通度(超边连通度). 明显地，如果$G$不是完全图，则$\kappa_0(G)=\kappa(G)$且$\lambda_0(G)=\lambda(G)$. 因此，$g$-额外连通度($g$-额外边连通度)可以认为是经典连通度(边连通度)的一种推广形式，并且它能更加精确地衡量大型并行处理系统的可靠性和容错性. 网络(图)的g-额外连通度(g-额外边连通度)已被许多学者所研究，详细结果可参看文献[8-19]及相关文献.

在平行计算系统中，n维超立方体Q_n[18]、n维折叠超立方体FQ_n[19]和交叉超立方体$EH(s,t)$[2]是3个重要的互连网络. 基于这3个网络，文献[20]提出了一个新的网络交换折叠超立方体$EFH(s,t)$，$EFH(s,t)$是在$EH(s,t)$的基础上增加了一些额外的边获得的，并且这些边称为补边. 交换折叠超立方体有许多重要的特性，比如它有短的直径和低消费因子. 关于交换折叠超立方体$EFH(s,t)$特性的详细结果可参看文献[10,20-22].

文献[11]证明了：$\kappa_1(EH(s,t))=\lambda_1(EH(s,t))=2s$，$1\leqslant s\leqslant t$. 文献[17]证明了：$\kappa_2(EH(s,t))=3s-2$，$2\leqslant s\leqslant t$；$\lambda_2(EH(s,t))=3s-1$，$3\leqslant s\leqslant t$. 文献[21-22]探究了交换折叠超立方体$EFH(s,t)$的连通度和边连通度，并且证明了：$\kappa(EFH(s,t))=\lambda(EFH(s,t))=s+2$，$1\leqslant s\leqslant t$. 文献[10]证明了：$\kappa_1(EFH(s,t))=\lambda_1(EFH(s,t))=2s+2$，$1\leqslant s\leqslant t$. 本文探讨交换折叠超立方体$EFH(s,t)$的2-额外边连通度，最终确定了$\lambda_2(EFH(s,t))=3s+2$，$6\leqslant s\leqslant t$.

1　预备知识

一个n元二进制字符串$x=x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_0$的第$i$个字符$x_i$记为$x[i]$，$0\leqslant i\leqslant n-1$.

记$x[i:j]=x_ix_{i-1}\cdots x_j$. $\bar{x}=\bar{x}_{n-1}\bar{x}_{n-2}\cdots\bar{x}_0$，其中$\bar{x}_i=1-x_i$. 设$y=y_{n-1}y_{n-2}\cdots y_0$. 令$H(x,y)=\sum_{i=1}^{n-1}|x_i-y_i|$称为$x=x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_0$与$y=y_{n-1}y_{n-2}\cdots y_0$的哈明距离.

定义 1[3]　设交换超立方体$EH(s,t)=G(V,E)$，s,t是正整数. 交换超立方体的点集为

$$V(EH(s,t))=\{a_{s-1}a_{s-2}\cdots a_1a_0b_{t-1}b_{t-2}\cdots b_1b_0c\mid a_i,b_j,c\in\{0,1\},0\leqslant i\leqslant s-1,0\leqslant j\leqslant t-1\}$$

交换超立方体的边集

$$E(EH(s,t))=\{(u,v)\mid(u,v)\in V(EH(s,t))\times V(EH(s,t))\}$$

是由3种类型的边E_1,E_2,E_3构成的. 其中

E_1：$u[s+t:1]=v[s+t:1]$，$u[0]\neq v[0]$

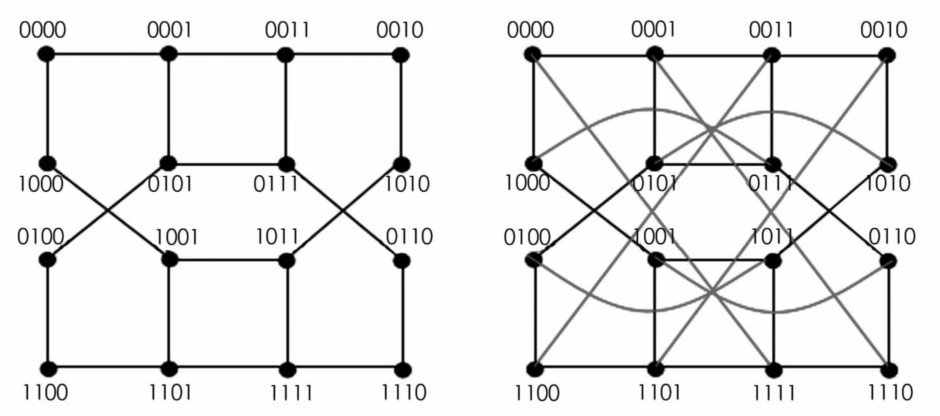
E_2：$u[t:1]=v[t:1]$，$H(u[s+t:t+1],v[s+t:t+1])=1$，$u[0]=v[0]=0$

E_3：$u[s+t:t+1]=v[s+t:t+1]$，$H(u[t:1],v[t:1])=1$，$u[0]=v[0]=1$

定义 2[20]　交换折叠超立方体记为$EFH(s,t)$，它是由交换超立方体$EH(s,t)$中的任意两个互补的点$u=a_{s-1}a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}b_{t-2}\cdots b_0c$和$\bar{u}=\bar{a}_{s-1}\bar{a}_{s-2}\cdots\bar{a}_0\bar{b}_{t-1}\bar{b}_{t-2}\cdots\bar{b}_0\bar{c}$增加一条边后得到的. 这些新增加的边称为$EFH(s,t)$的补边，补边构成的集合记为$\bar{M}$. $EFH(s,t)-\bar{M}$中的边称为交叉边.

图$EH(1,2)$和$EFH(1,2)$如图1所示.

设任意一条边$(u,v)\in E(EFH(s,t)-\bar{M})$，则存在唯一确定的$i\in\{0,1,2,3,\cdots,s+t\}$使得$u[i]\neq v[i]$且$u[j]=v[j](j=1,2,\cdots,i-1,i+1,\cdots,s+t)$，此时称边$(u,v)$是$i$-边. 如果$EFH(s,t)-\bar{M}$中两个点$u$和$v$通过$i$-边相邻，则称$u$和$v$沿维数$i$相邻. 我们也称$u$是$v$的$i$-邻点，记作$v=u_i$. 由定义可知$u_{ij}$是$u_i$的$j$-邻点，明显地，$u_{ii}=u$. $EFH(s,t)-\bar{M}$中的边(u,u_i)称为顶点u的i-边，记作$e_i(u)$. 设$\bar{e}(u)=(u,\bar{u})\in\bar{M}$表示与顶点$u$关联的补边. 下面的讨论中，我们规定$e_{s+t}(u)=(u,u_{s+t})$是$EFH(s,t)$中的边，其中$u_{s+t}$与$u$的二进制字符串最左边的位不同. 同理$e_0(u)=(u,u_0)$是$EFH(s,t)$中的边，其中$u_0$与$u$的二进制字符串最右边的位不同.



(a) $EH(1,2)$ (b) $EFH(1,2)$

图1 图 $EH(1,2)$ 和 $EFH(1,2)$

设 $u\in V(EFH(s,t))$. 通过定义2，如果 $u[0]=0$，则 $d_{EFH(s,t)}(u)=s+2$，否则 $d_{EFH(s,t)}(u)=t+2$. 下面给出 $EH(s,t)$ 和 $EFH(s,t)$ 的一些结论：

引理1[4] $\kappa(EH(s,t))=\lambda(EH(s,t))=s+1$，$1\leqslant s\leqslant t$.

引理2[11] $\kappa_1(EH(s,t))=\lambda_1(EH(s,t))=2s$，$1\leqslant s\leqslant t$.

引理3[11] $EH(s,t)$ 同构于 $EH(t,s)$.

引理4[20] $EFH(s,t)$ 同构于 $EFH(t,s)$.

通过引理3和引理4，可以在下面讨论中设 $s\leqslant t$，则 $\delta(EH(s,t))=s+1$ 且 $\delta(EFH(s,t))=s+2$.

引理5[4] $EH(s,t)$ 可分解成两个 $EH(s-1,t)$ 或两个 $EH(s,t-1)$.

根据 $EFH(s,t)$ 的定义容易得出 $EFH(s,t)$ 具有下面性质：

性质1 交换折叠超立方体网络 $EFH(s,t)$ 可以分解成两个子图 L 和 R，其中

$$V(L)=\{0a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0c\mid a_i,b_j,c\in\{0,1\},\ 0\leqslant i\leqslant s-2,\ 1\leqslant j\leqslant t-1\}$$

$$V(R)=\{1a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0c\mid a_i,b_j,c\in\{0,1\},\ 0\leqslant i\leqslant s-2,\ 1\leqslant j\leqslant t-1\}$$

L 和 R 分别是由点集 $V(L)$ 和 $V(R)$ 诱导的子图. 明显地，L 和 R 都同构于 $EH(s-1,t)$，并且 L 和 R 之间的边是由 E_2 和 $\overline{M}$ 构成的. 记作 $EFH(s,t)=L\oplus R$. 令 $u\in V(L)$(或 $u\in V(R)$)，则 u 在 R(或 L)中通过交叉边的邻点记作 u_L(或 u_R). 明显地，$u_{s+t}=u_L$(或 $u_{s+t}=u_R$). 令 $M_{s+t}=\{(u,u_{s+t})\mid u\in L,\ u_{s+t}\in R\}$.

文献[13]证明了折叠超立方体 $FQ_n(n\geqslant 4)$ 中不含3-圈，并且任何不相邻的两个点的共同邻点的个数不超过2. 因此容易得到下面的引理：

引理6 交换折叠超立方体 $EFH(s,t)$ 中不含3-圈，并且任何不相邻的两个点的共同邻点的个数不超过2个.

引理7 若 P 为 $EFH(s,t)$ 中任意一条长度是2的路，则 $|NE_{EFH(s,t)}(P)|\geqslant 3s+2$.

证 由 $EFH(s,t)$ 的定义及引理6，容易证明 $|NE_{EFH(s,t)}(P)|\geqslant 3s+2$.

引理8 设 $K\subset E(EH(s,t))$ 并且 $|K|<2s$，$s\geqslant 2$. 则 $EH(s,t)-K$ 满足下面两种情形之一：

(i) $EH(s,t)-K$ 是连通的；

(ii) $EH(s,t)-K$ 有两个分支，其中一个分支是一个孤立点.

证 如果 $EH(s,t)-K$ 是连通的，则情形(i)成立. 现在可假设 $EH(s,t)-K$ 是不连通的. 因为 $\lambda(EH(s,t))=s+1$ 并且 $|K|<2s=\lambda_1(EH(s,t))$，所以 $EH(s,t)-K$ 中至少包含一个孤立点. 假设有两个孤立点，记为 x,y. 由于

$$|NE_{EH(s,t)}(x)|\geqslant s+1 \qquad |NE_{EH(s,t)}(y)|\geqslant s+1$$

$EH(s,t)$ 至少移除 $2s+1$ 条边才能得到两个孤立点，而 $|K|<2s$，因此在 $EH(s,t)-K$ 中只存在一个孤立点.

设 u 是 $EH(s,t)-K$ 中唯一一个孤立点. 因为

$$\lambda(EH(s,t)-\{u\}) \geqslant \kappa(EH(s,t)-\{u\}) \geqslant \kappa(EH(s,t))-1$$

$$|E(EH(s,t)-\{u\})\cap K| \leqslant |K|-|NE_{EH(s,t)}(u)| < s-1$$

所以 $EH(s,t)-K-\{u\}$ 是连通的. 因此情形(ii) 成立.

2　交换折叠超立方体网络的额外边连通度

定理 1　设 $EFH(s,t)=L\oplus R$. 对于任意的 $F\subseteq E(EFH(s,t))$，令 $F_L=F\cap E(L)$，$F_R=E\cap V(R)$，$F_{M_{s+t}}=F\cap M_{s+t}$，$F_{\overline{M}}=F\cap \overline{M}$. 如果 $|F|\leqslant 3s+1$ 并且 $EFH(s,t)-F$ 中既无孤立点也无孤立边，则 $R-F_R$(或 $L-F_L$) 中每一个顶点均与 $L-F_L$(或 $R-F_R$) 中一个顶点连通.

证　对于任意的顶点 $u=1a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0c\in V(R-F_R)$，分以下两种情形进行讨论：

情形 1　$u=1a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 0$. 如果 $e_{s+t}(u)\notin F_{M_{s+t}}$ 或 $\bar{e}(u)\notin F_{\overline{M}}$，则定理 1 得证. 因此我们假设 $e_{s+t}(u)\in F_{M_{s+t}}$ 且 $\bar{e}(u)\in F_{\overline{M}}$. 如果 $u_0=1a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 1\notin F_R$，$u_{0i'}=1a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots\bar{b}_{i'}\cdots b_0 1\notin F_R$，$u_{0i'0}=1a_{s-2}\cdots a_0 b_{t-1}\cdots \bar{b}_{i'}\cdots b_0 0\notin F_R$ 且 $u_{0i'0(s+t)}=0a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots\bar{b}_{i'}\cdots b_0 0\notin F_L$(或者 $u_0\notin F_R$，$\bar{u}_0\notin F_L$)，也就是说 $e_0(u)\notin F_R$，$e_{i'}(u_0)\notin F_R$，$e_0(u_{0i'})\notin F_R$，$e_{s+t}(u_{0i'0})\notin F_{M_{s+t}}$(或者 $e_0(u)\notin F_R$，$\bar{e}(u_0)\notin F_{\overline{M}}$)，那么从 u 出发总存在 1 条路径 $u\to u_0\to u_{0i'}\to u_{0i'0}\to u_{0i'0(s+t)}$(或者 $u\to u_0\to\bar{u}_0$) 使其连接至 $L-F_L$，则定理 1 得证. 因此我们假设 $e_0(u)\in F_R$. 令 $A=\{e_i(u), e_{s+t}(u_i)(\bar{e}(u_i)) \mid t+1\leqslant i\leqslant s+t-1\}\cap F$，如果 $|A|<s-1$，那么存在某个 i，$t+1\leqslant i\leqslant s+t-1$，使得 $e_i(u)\notin F_R$ 且 $e_{s+t}(u_i)\notin F_{M_{s+t}}$(或者 $e_i(u)\notin F_R$ 且 $\bar{e}(u_i)\notin F_{\overline{M}}$)，则定理 1 得证. 因此假设 $|A|\geqslant s-1$.

因为 $EFH(s,t)-F$ 中不存在孤立点，则存在某条边 $e_i(u)=(u,u_i)\notin F_R$，其中 $t+1\leqslant i\leqslant s+t-1$，那么可知 $u_i=1a_{s-2}\cdots\bar{a}_i\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 0$. 如果 $e_{s+t}(u_i)=(u_i,u_{i(s+t)})\notin F_{M_{s+t}}$ 或者 $\bar{e}(u_i)=(u_i,\bar{u}_i)\notin F_{\overline{M}}$，则定理 1 得证. 因此假设 $e_{s+t}(u_i)=(u_i,u_{i(s+t)})\in F_{M_{s+t}}$ 且 $\bar{e}(u_i)=(u_i,\bar{u}_i)\in F_{\overline{M}}$. 如果 $e_0(u_i)=(u_i,u_{i0})\notin F_R$，此时可形成一条通向 $L-F_L$ 的路径：$u\to u_i\to u_{i0}\to u_{i0i'}\to u_{i0i'0}\to u_{i0i'0(s+t)}$(或者 $u\to u_i\to u_{i0}\to\bar{u}_{i0}$) 其中 $1\leqslant i'\leqslant t$，则定理 1 可证. 因此假设 $e_0(u_i)=(u_i,u_{i0})\in F_R$. 令

$$B=\{e_j(u_i), e_{s+t}(u_{ij})(\bar{e}(u_{ij}))\mid t+1\leqslant j\leqslant s+t-1, j\neq i\}\cap F$$

如果 $|B|<s-2$，那么存在某个 $j(t+1\leqslant j\leqslant s+t-1, j\neq i)$，使得 $e_j(u_i)\notin F_R$ 且 $e_{s+t}(u_{ij})\notin F_{M_{s+t}}$(或者 $e_j(u_i)\notin F_R$ 且 $\bar{e}(u_{ij})\notin F_{\overline{M}}$)，则 u 可通过一条路径连接至 $L-F_L$，定理 1 得证. 因此假设 $|B|\geqslant s-2$.

因为 $EFH(s,t)-F$ 中不存在孤立边，因此存在 $e_j(u_i)=(u_i,u_{ij})\notin F_R$，$j\neq i$. 那么 u 经过 u_{ij} 至 $L-F_L$ 可构造如下路径：$e_i(u)\to e_j(u_i)\to e_{(s+t)}(u_{ij})$；$e_i(u)\to e_j(u_i)\to e_0(u_{ij})\to e_{i'}(u_{ij0})\to e_0(u_{ij0i'})\to e_{(s+t)}(u_{ij0i'0})$，其中 $1\leqslant i'\leqslant t$；$e_k(u_{ij})\to e_{s+t}(u_{ijk})$，其中 $t+1\leqslant k\leqslant s+t-1$，$k\neq i,j$.

设 $C=\{e_{s+t}(u), e_0(u), \bar{e}(u), e_{s+t}(u_i), e_0(u_i), \bar{e}(u_i)\}$. 因为

$$|F-(A\cup B\cup C)|=|F|-|A|-|B|-|C|\leqslant 3s+1-(s-1)-(s-2)-6=s-3$$

然而 u 可通过 u_{ij} 构造 $s-2$ 条通向 $L-F_L$ 的路径，则 u 可通过一条路径使得 u 与 $L-F_L$ 中的某个点路连通，定理 1 得证.

情形 2　$u=1a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 1$. 由于 $N(u)\cap V(L)=\{\bar{u}\}$. 如果 $\bar{e}(u)\notin F_{\overline{M}}$，则定理 1 得证. 因此我们可假设 $\bar{e}(u)\in F_{\overline{M}}$. 如果 $e_0(u)\notin F_R$，则存在一条路径 $e_0(u)\to e_{s+t}(u_0)$(或者 $e_0(u)\to\bar{e}(u_0)$)，使得 u 连通至 $L-F_L$，则定理 1 得证. 因此我们假设 $e_0(u)\in F_R$. 令

$$A'=\{e_{i'}(u), e_0(u_{i'}), e_{s+t}(u_{i'0})(\bar{e}(u_{i'}))\mid 1\leqslant i'\leqslant t\}\cap F$$

如果 $|A'|<t$，则必定存在某一 $i'(1\leqslant i'\leqslant t)$，使得 $e_{i'}(u)\notin F_R$，$e_0(u_{i'})\notin F_R$，$e_{(s+t)}(u_{i'0})\notin F_{M_{s+t}}$(或者 $e_{i'}(u)\notin F_R$，$\bar{e}(u_{i'})\notin F_{\overline{M}}$)，使得 u 与 $L-F_L$ 连通. 否则 $|A'|\geqslant t$.

因为 $EFH(s,t)-F$ 中不存在孤立点，因此存在某一条边 $e_{i'}(u)=(u,u_{i'})\notin F_R(1\leqslant i'\leqslant t)$，如果 $\bar{e}(u_{i'})\notin F_{\overline{M}}$，则定理 1 得证. 因此我们假设 $\bar{e}(u_{i'})\in F_{\overline{M}}$. 如果 $e_0(u_{i'})=(u_{i'},u_{i'0})\notin F_R$，则可构造一条通向 $L-F_L$ 的路径：$e_{i'}(u)\to e_0(u_{i'})\to e_{s+t}(u_{i'0})$(或者 $e_{i'}(u)\to e_0(u_{i'})\to\bar{e}(u_{i'0})$)，则定理 1 得证. 因此假设

$e_0(u_{i'})=(u_{i'},u_{i'0})\in F_R$. 令

$$B'=\{e_{j'}(u_{i'}),e_0(u_{i'j'}),e_{s+t}(u_{i'j'0})(\bar{e}(u_{i'j'}))\mid 1\leqslant j'\leqslant t,j'\neq i'\}\cap F$$

如果 $|B'|<t-1$，那么存在某个 $j'(1\leqslant j'\leqslant t,j'\neq i')$，使得 $e_{j'}(u_{i'})\notin F_R$ 且 $e_{s+t}(u_{i'j'})\notin F_{M_{s+t}}$(或者 $e_{j'}(u_{i'})\notin F_R$ 且 $\bar{e}(u_{i'j'})\notin F_{\bar{M}}$)，则 u 可通过一条路径连接至 $L-F_L$，定理 1 得证. 因此假设 $|B'|\geqslant t-1$.

因为 $EFH(s,t)-F$ 中不存在孤立边，因此存在 $e_{j'}(u_{i'})=(u_{i'},u_{i'j'})\notin F_R$, $j'\neq i'$. 那么 u 经过 $u_{i'j'}$ 至 $L-F_L$ 可构造如下路径：$e_{i'}(u)\to e_{j'}(u_{i'})\to\bar{e}(u_{i'j'})$；$e_{i'}(u)\to e_{j'}(u_{i'})\to e_0(u_{i'j'})\to e_{s+t}(u_{i'j'0})e_{i'}(u)\to e_{j'}(u_{i'})\to e_{k'}(u_{i'j'})\to e_0(u_{i'j'k'})\to e_{s+t}(u_{i'j'k'0})$，其中 $1\leqslant k'\leqslant t$, $k'\neq i',j'$.

设 $C'=\{\bar{e}(u),e_0(u),e_0(u_{i'}),\bar{e}(u_{i'})\}$. 因为

$$|F-(A'\cup B'\cup C')|=|F|-|A'|-|B'|-|C'|\leqslant 3s+1-t-(t-1)-4\leqslant s-2$$

然而 u 可通过 $u_{i'j'}$ 构造 t 条通向 $L-F_L$ 的路径. 则 u 至少可通过一条路径使得 u 与 $L-F_L$ 中的某个点路连通，定理 1 得证.

定理 2 $\lambda_2(EFH(s,t))=3s+2$，其中 $s\geqslant 6$.

证 设 P 为 $EFH(s,t)$ 中一条长度为 2 的路径，由引理 7 可知 $|NE_{EFH(s,t)}(P)|\geqslant 3s+2$. 通过 $EFH(s,t)$ 的定义，$EFH(s,t)-P$ 既不包含孤立顶点也不包含孤立边. 因此可知 $\lambda_2(EFH(s,t))\leqslant 3s+2$.

接下来只需证明 $\lambda_2(EFH(s,t))\geqslant 3s+2$，即证明对于任意的顶点集 $S\subseteq E(EFH(s,t))$，当 $|S|=3s+1$ 且不存在孤立顶点也不存在孤立边时，$EFH(s,t)-S$ 是连通的. 设 $EFH(s,t)=L\oplus R$.

方便起见，我们设 $S_L=S\cap E(L)$, $S_R=S\cap E(R)$, $S_{M_{s+t}}=S\cap M_{s+t}$, $S_{\bar{M}}=S\cap\bar{M}$. 不失一般性，令 $|S_L|\leqslant|S_R|$，那么可知 $|S_L|\leqslant\dfrac{(3s+1)}{2}<2s-2$, $s\geqslant 6$. 通过引理 8，我们可知 $L-S_L$ 满足下面两种情形之一：$L-S_L$ 是连通的；$L-S_L$ 有两个分支，其中一个分支是一个孤立顶点. 现在考虑这两种情形.

情形 1 $L-S_L$ 是连通的

由定理 1 可知 $R-S_R$ 中任意一顶点与 $L-S_L$ 中一顶点连通. 因此 $EFH(s,t)-F$ 是连通的.

情形 2 $L-S_L$ 有两个连通分支，其中一个是孤立点.

设 $u=0a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0c$ 是 $L-S_L$ 中的一个孤立点. 此时有 $|S_L|\geqslant|NE_L(u)|\geqslant s$. 接下来我们证明 $EFH(s,t)-S$ 中 u 与 $L-S_L-\{u\}$ 是连通的：

情形 2.1 当 $u=0a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 1$ 时，我们有 $N(u)\cap V(R)=\{\bar{u}\}$. 如果 $\bar{e}(u)=(u,\bar{u})\in S_{\bar{M}}$，则 u 为 $EFH(s,t)-S$ 中的孤立点，这与 $EFH(s,t)-S$ 不存在孤立点矛盾. 因此 $\bar{e}(u)=(u,\bar{u})\in S_{\bar{M}}$. 方便起见设 $v=\bar{u}$. 如果 $e_{s+t}(v)=(v,v_{s+t})\notin S_{M_{s+t}}$，则定理 2 得证. 因此假设 $e_{s+t}(v)=(v,v_{s+t})\in S_{M_{s+t}}$. 如果 $e_0(v)\notin S_R$, $e_{i'}(v_0)\notin S_R$, $e_0(v_{0i'})\notin S_R$, $e_{s+t}(v_{0i'0})\notin S_{M_{s+t}}$(或者 $e_0(v)=(v,v_0)\notin S_R$, $\bar{e}(v_0)=(v_0,\bar{v}_0)\notin S_{\bar{M}}$)，则定理 2 得证. 因此假设 $e_0(v)=(v,v_0)\in S_R$. 设

$$A=\{e_i(v),e_{s+t}(v_i)(\bar{e}(v_i))\mid t+1\leqslant i\leqslant s+t-1\}\cap S$$

如果 $|A|<s-1$，则存在某个 $i(t+1\leqslant i\leqslant s+t-1)$ 使得 $e_i(v)\notin S_R$, $e_{s+t}(v_i)\notin S_{M_{s+t}}$(或者 $e_i(v)\notin S_R$, $\bar{e}(v_i)\notin S_{\bar{M}}$)，则定理 2 得证. 因此假设 $|A|\geqslant s-1$.

因为 $EFH(s,t)-S$ 不存在孤立边，因此存在某个 $i(t+1\leqslant i\leqslant s+t-1)$ 使得 $e_i(v)=(v,v_i)\notin S_R$，则 u 通过 v_i 构造连接 u 到 $L-\{u\}$ 的路径为：$\bar{e}(u)\to e_i(v)\to e_j(v_i)\to e_{s+t}(v_{ij})$，其中 $t+1\leqslant j\leqslant s+t-1$, $j\neq i$；$e_i(v)\to e_0(v_i)\to e_{i'}(v_{i0})\to e_0(v_{i0i'})\to e_{s+t}(v_{i0i'0})$(或者 $e_i(v)\to e_0(v_i)\to\bar{e}(v_{i0})$)，其中 $1\leqslant i'\leqslant t$；$e_i(v)\to e_{s+t}(v_i)$；$e_i(v)\to\bar{e}(v_i)$.

由于 $|S-(S_L\cup A\cup\{e_0(v),e_{s+t}(v)\})|\leqslant 3s-s-(s-1)-2=s-1$，且 u 通过 v_i 可构造 $s+1$ 条通向 $L-\{u\}$ 的路径，故至少存在一条路径使 u 与 $L-S_L-\{u\}$ 连通，定理 2 得证.

情形 2.2 当 $u=0a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 0$ 时，因为 $EFH(s,t)-S$ 中不存在孤立点，故 $e_{s+t}(u)=(u,u_{s+t})\notin F_{M_{s+t}}$ 或者 $\bar{e}(u)=(u,\bar{u})\notin F_{\bar{M}}$. 下面考虑两种情形：(i) $e_{s+t}(u)\notin S_{M_{s+t}}$ 且 $\bar{e}(u)\notin S_{\bar{M}}$；(ii) $e_{s+t}(u)\notin S_{M_{s+t}}$ 且 $\bar{e}(u)\in S_{\bar{M}}$，或者 $e_{s+t}(u)\in S_{M_{s+t}}$ 且 $\bar{e}(u)\notin S_{\bar{M}}$.

(i) $e_{s+t}(u) \notin S_{M_{s+t}}$ 且 $\bar{e}(u) \notin S_{\bar{M}}$. 由 $EFH(s,t)$ 的定义可知 u_{s+t} 和 $\bar{u}$ 在 R 中没有共同的邻点. 方便起见，设 $v = u_{s+t}$，$w = \bar{u}$，通过引理 7，我们可知 $v(= u_R)$ 和 $w(= \bar{u})$ 在 L 中有两个共同的邻点，即 $N_L(v) \cap N_L(w) = \{u, \bar{v}(= w_{s+t})\}$. 如果 $\bar{e}(v) \notin S_{\bar{M}}$ 或者 $e_{s+t}(w) \notin S_{M_{s+t}}$，则定理 2 得证. 因此假设 $\bar{e}(v) \in S_{\bar{M}}$ 且 $e_{s+t}(w) \in S_{M_{s+t}}$. 我们可构造 $s+t$ 条连接接 v(或者 w) 至 $L - S_L - \{u, \bar{v}(= w_R)\}$ 的路径. 即：

$e_i(v) \to e_{s+t}(v_i)$ 或者 $e_i(v) \to \bar{e}(v_i)$，其中 $t+1 \leqslant i \leqslant s+t-1$；$e_0(v) \to e_{i'}(v_0) \to e_0(v_{0i'}) \to e_{s+t}(v_{0i'0})$ 或者 $e_0(v) \to \bar{e}(v_0)$，其中 $1 \leqslant i' \leqslant t$；$e_0(w) \to e_{s+t}(w_0)$；$e_{j'}(w) \to e_0(w_{j'}) \to e_{s+t}(w_{j'0})$ 或者 $e_{j'}(w) \to \bar{e}(w_{j'})$，其中 $1 \leqslant j' \leqslant t$. 由于 $|S - (S_L \cup \{\bar{e}(v), e_{s+t}(w)\})| \leqslant 3s + 1 - s - 2 = 2s - 1$，且 u 通过 v(或者 w) 可构造 $s+t(\geqslant 2s)$ 条通向 $L - \{u\}$ 的路径，故至少存在一条路径使 u 与 $L - S_L - \{u\}$ 连通，定理 2 得证.

(ii) $e_{s+t}(u) \notin S_{M_{s+t}}$ 且 $\bar{e}(u) \in S_{\bar{M}}$，或者 $e_{s+t}(u) \in S_{M_{s+t}}$ 且 $\bar{e}(u) \notin S_{\bar{M}}$. 不失一般性我们假设 $e_{s+t}(u) \notin S_{M_{s+t}}$ 且 $\bar{e}(u) \in S_{\bar{M}}$. 如果 $\bar{e}(u_{s+t}) \notin S_{\bar{M}}$，则定理 2 得证. 因此我们假设 $\bar{e}(u_{s+t}) \in S_{\bar{M}}$. 如果 $e_0(u_{s+t}) \notin S_R$，$e_{i'}(u_{(s+t)0}) \notin S_R$，$e_0(u_{(s+t)0i'}) \notin S_R$，$e_{s+t}(u_{(s+t)0i'0}) \notin S_{M_{s+t}}$(或者 $e_0(u_{s+t}) \notin S_R$，$\bar{e}(u_{(s+t)0}) \notin S_{\bar{M}}$)，则定理 2 得证. 因此我们假设 $e_0(u_{s+t}) \in S_R$. 因为 $EFH(s,t) - S$ 中不存在孤立边，因此 $NE_R(u_{s+t}) \cap S \neq \emptyset$. 假设 $e_i(u_{s+t}) = (u_{s+t}, u_{(s+t)i}) \notin S_R$，其中 $t+1 \leqslant i \leqslant s+t-1$. 对于任意的点 $v \in N_R(\{u_{s+t}, u_{(s+t)i}\})$，设 $D = \{e_{s+t}(v) \mid e_{s+t}(v) \in M_{s+t}\}$(或者 $D = \{\bar{e}(v) \mid \bar{e}(v) \in \bar{M}\}$)，并且 $|D| = 2s - 2$. 容易知道 $D \not\subset (N_L(u) \cup \{\bar{u}, \bar{u}_R, u_{R0}\})$. 由于 $|S - (S_L \cup \{\bar{e}(u), \bar{e}(u_{s+t}), e_0(u_{s+t})\})| \leqslant 3s - s - 3 = 2s - 3$，所以 S 中至多有 $2s-3$ 条边在 D 中. 因此在 D 中至少存在一条边不属于 S. 即 u 与 $L - S_L - \{u\}$ 连通.

3　小　　结

本文在交换折叠超立方体网络经典边连通度和超边连通度的基础上深入研究，进一步研究了其 2-额外边连通度，证明了：当 $t \geqslant s \geqslant 6$ 时，$\lambda_2(EFH(s,t)) = 3s + 2$. 也就是说，$EFH(s,t)$ 中至少删除 $3s+2$ 条边，才能得到不包含孤立顶点和孤立边的非连通图.

参考文献：

[1] BONDY J A, MURTY U S R. Graph Theory with Applications [M]. London: Macmillan Education UK, 1976.

[2] 唐保祥，任　韩. 2 类图完美匹配计数公式的嵌套递推求法 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2019，44(8)：23-27.

[3] 刘秀丽. 几类特殊图的 Mycielski 图的(2，1)-全标号 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2018，40(12)：100-104.

[4] MA M J. The Connectivity of Exchanged Hypercubes [J]. Discrete Mathematics Algorithms and Applications, 2010, 2(2): 213-220.

[5] HARARY F. Conditional Connectivity [J]. Networks, 1983, 13(3): 347-357.

[6] FABREGA J, FIOL M A. Extraconnectivity of Graphs with Large Girth [J]. Discrete Math, 1994, 127(1-3): 163-170.

[7] FABREGA J, FIOL M A. On the Extraconnectivity of Graphs [J]. Discrete Math, 1996, 155(1-3): 49-57.

[8] CAI X P, VUMAR E. The Super Connectivity of Folded Crossed Cubes [J]. Information Processing Letters, 2019, 142: 52-56.

[9] CAI X P, YANG W. On 2-Extra Edge Connectivity of Folded Crossed Cubes [J]. 中国科学技术大学学报，2020，50(2)：315-322.

[10] 蔡学鹏，马　丽. 交换折叠超立方体的超连通度 [J]. 安徽师范大学学报(自然科学版)，2020，43(3)：216-222.

[11] MA M J, ZHU L Y. The Super Connectivity of Exchanged Hypercubes [J]. Information Processing Letters, 2011, 111(8): 360-364.

[12] NING W T. The Super Connectivity of Exchanged Crossed Cube [J]. Information Processing Letters, 2016, 116(2): 80-84.

[13] ZHU Q, XU J M, HOU X M, et al. On Reliability of the Folded Hypercubes [J]. Information Sciences, 2007, 177(8): 1782-1788.

[14] CHANG N W, TSAI C Y, HSIEH S Y. On 3-Extra Connectivity and 3-Extra Edge Connectivity of Folded Hypercubes [J]. IEEE Transactions on Computers, 2014, 63(6): 1594-1600.

[15] HONG W S, HSIEH S Y. Extra Edge Connectivity of Hypercube-Like Networks [J]. International Journal of Parallel Emergent and Distributed Systems, 2013, 28(2): 123-133.
[16] LI X J, XU J M. Edge-Fault Tolerance of Hypercube-Like Networks [J]. Information Processing Letters, 2013, 113(19-21): 760-763.
[17] 梁家荣, 白 杨, 王新阳. 评估交换超立方体网络可靠性的一种新方法 [J]. 电子与信息学报, 2015, 37(3): 693-699.
[18] SAAD Y, SCHULTZ M H. Topological Properties of Hypercubes [J]. IEEE Transactions on Computers, 1988, 37(7): 867-872.
[19] EL-AMAWY A, LATIF I S. Properties and Performance of Folded Hypercubes [J]. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 1991, 2(1): 31-42.
[20] QI H, LI Y, LI K Q, et al. An Exchanged Folded Hypercube-Based Topology Structure for Interconnection Networks [J]. Concurrency and Computa Pract Exper, 2015, 27(16): 4194-4210.
[21] 蔡学鹏, 杨 伟, 任佰通, 等. 交换折叠超立方体的连通度 [J]. 井冈山大学学报(自然科学版), 2019, 40(4): 8-11.
[22] NING W T. The Connectivity of Exchanged Folded Hypercube [J]. Parallel Processing Letters, 2020, 30(1): 2050003.

On 2-Extra Edge Connectivity of Exchanged Folded Hypercubes

CAI Xue-peng

College of Mathematics and Physics, Xinjiang Agricultural University, Urumqi 830052, China

Abstract: The g-extra connectivity is an important parameter in measuring the reliability and fault tolerance of large interconnection networks. Let G be a connected graph and an integer $g \geqslant 0$. The g-extra connectivity of a connected , denoted by $\lambda_g(G)$, is the minimum cardinality of a set of edges, if it exists, whose deletion disconnects G and leaves each remaining component with more than g vertices. A new interconnection network, named exchanged folded hypercube is $EFH(s, t)$. The 2-extra edge connectivity, which is an important measure in evaluating the reliability, is utilized to analyze the reliability of exchanged folded hypercube interconnection network. Then 2-extra connectivity of exchanged folded hypercube interconnection network $EFH(s, t)$ is obtained. It shows that the 2-extra edge connectivity of $EFH(s, t)$ is equal to $3s+2$ for $6 \leqslant s \leqslant t$, which implies that at least $3s+2$ edges are removed to get a disconnected graph without isolated vertices(resp. edges).

Key words: exchanged folded hypercube; extra edge connectivity; interconnection network

责任编辑 廖 坤