DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2021.06.006

一类临界奇异 Kirchhoff 型椭圆边值问题的正解①

樊洪森，　邓志颖

重庆邮电大学 理学院，重庆 400065

摘要：讨论了一类带 Sobolev-Hardy 临界指数项的 Kirchhoff 型椭圆边值问题，应用 Nehari 流形、纤维映射和 Brezis-Lieb 引理等方法，证明了该问题在一定条件下正解的存在性，推广和改进了最近的一些结果.

关　键　词：正解；Sobolev-Hardy 临界指数；Nehari 流形；Kirchhoff 型问题

中图分类号：O175.25　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000-5471(2021)06-0027-09

讨论一类 Kirchhoff 型椭圆系统正解的存在性问题：

$$\begin{cases} -\mathscr{L}(u)\left(\Delta u-\mu \dfrac{u}{|x|^2}\right)=h(x)\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\dfrac{|u|^{\alpha-2}u|v|^{\beta}}{|x|^{s}}+\mu_1 f(x)\dfrac{|u|^{r-2}u}{|x|^{l}} & x\in\Omega \\ -\mathscr{L}(v)\left(\Delta v-\mu \dfrac{v}{|x|^2}\right)=h(x)\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\dfrac{|v|^{\beta-2}v|u|^{\alpha}}{|x|^{s}}+\mu_2 g(x)\dfrac{|v|^{r-2}v}{|x|^{l}} & x\in\Omega \\ u=v=0 & x\in\partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\mathscr{L}(\cdot)=a+b\left[\int_{\Omega}(|\nabla\cdot|^2-\mu|\cdot|^2|x|^{-2})\mathrm{d}x\right]^{\frac{2-s}{2}}$，$\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 是包含原点的有界光滑区域，$\mu_1,\mu_2>0$，$0\leqslant\mu<\dfrac{1}{4}$，$0\leqslant s$，$l<2$，$1<r<2$，$a\geqslant r(3-s)(2-s)^{-1}$，$b>0$，$\alpha,\beta>1$，$\alpha+\beta=2^*(s)=\dfrac{2(N-s)}{N-2}$ 是 Sobolev-Hardy 临界指数，当 $N=3$ 时，$\alpha+\beta=6-2s$.

文献[1] 最早提出了相关的数学模型，文献[2] 引入泛函分析框架之后，越来越多的学者研究 Kirchhoff 型方程. 近年来，人们对 Kirchhoff 问题的研究已经获得了非常丰富的成果[3-11]. 文献[12]应用变分方法研究了一类含 Sobolev-Hardy 临界指数项的奇异椭圆系统，证明了系统正解的多重性. 文献[13] 研究了更一般的情形，应用类似的变分方法，获得了两个正解的存在性. 文献[3] 研究了方程

$$\left\{a+b\left[\int_{\mathbb{R}^3}\left(|\nabla u|^2-\mu\frac{u^2}{|x|^2}\right)\mathrm{d}x\right]^{\frac{2-\alpha}{2}}\right\}\left(-\Delta u-\mu\frac{u}{|x|^2}\right)=\frac{|u|^{2^*(\alpha)-2}u}{|x|^{\alpha}}+\lambda\frac{f(x)|u|^{q-2}u}{|x|^{\beta}} \qquad x\in\mathbb{R}^3 \tag{2}$$

其中 $a,b>0$，$\mu\in\left[0,\dfrac{1}{4}\right)$，$\alpha,\beta\in[0,2)$，$1<q<2$ 和 $2^*(\alpha)=6-2\alpha$. 文献[3] 运用 Nehari 流形和纤维映射等方法证明了方程(2) 在适当条件下至少存在两个正解，并通过山路定理和 Ekeland 变分原理获得了解的一些收敛性质.

受上述文献的启发，我们考虑：对于奇异 Kirchhoff 型椭圆耦合系统，系统(1) 是否也存在正解？据我们所知，该问题目前尚未有人研究过. 本文的主要困难在于：系统(1) 含有 Sobolev-Hardy 临界指数项，其所对应的能量泛函不再满足(PS) 条件，从而不能使用通常的变分方法和有关技巧. 本文应用 Nehari 流形和纤维映射[14] 等方法克服了上述困难.

---

① 收稿日期：2020-04-26

基金项目：国家自然科学基金项目(11971339，11601052)；重庆邮电大学金课基金项目(XJKXX20201-15).

作者简介：樊洪森，硕士研究生，主要从事非线性椭圆边值问题的研究.

首先，定义 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 中的范数为 $\left(\int_\Omega |\nabla \cdot|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$. 依据 Hardy 不等式

$$\int_\Omega |u|^{-2}|x|^2 \mathrm{d}x \leqslant 4\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x \qquad \forall u \in W_0^{1,2}(\Omega) \tag{3}$$

可在 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 中定义新的范数

$$\|u\| = \left[\int_\Omega (|\nabla u|^2 - \mu u^2 |x|^{-2})\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}$$

由(3)式可知，上述范数与通常范数 $\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$ 等价. 同时，定义乘积 Sobolev 空间 $E = W_0^{1,2}(\Omega) \times W_0^{1,2}(\Omega)$，赋以范数

$$\|(u, v)\|_E = \left[\int_\Omega (|\nabla u|^2 - \mu u^2 |x|^{-2})\mathrm{d}x + \int_\Omega (|\nabla v|^2 - \mu v^2 |x|^{-2})\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}$$

并定义 Sobolev-Hardy 最佳临界常数

$$A_l = \inf_{u \in W_0^{1,2}(\Omega)\backslash\{0\}} \frac{\int_\Omega (|\nabla u|^2 - \mu u^2 |x|^{-2})\mathrm{d}x}{\left(\int_\Omega |u|^{2^*(l)} |x|^{-l} \mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{2^*(l)}}} \tag{4}$$

$$A_s = \inf_{(u, v) \in E\backslash\{(0, 0)\}} \frac{\|(u, v)\|^2}{\left(\int_\Omega |u|^\alpha |v|^\beta |x|^{-s} \mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{2^*(s)}}} \tag{5}$$

现定义系统(1)在 E 中对应的能量泛函 $\mathscr{J}: E \longrightarrow \mathbb{R}$ 为

$$\begin{aligned}\mathscr{J}_{\mu_1,\mu_2}(u, v) = &\frac{a}{2}\|(u, v)\|^2 + \frac{b}{4-s}(\|u\|^{4-s} + \|v\|^{4-s}) - \\ &\frac{1}{\alpha+\beta}\int_\Omega h(x)\frac{|u|^\alpha |v|^\beta}{|x|^s}\mathrm{d}x - \frac{1}{r}K_{\mu_1,\mu_2}(u, v)\end{aligned} \tag{6}$$

其中

$$K_{\mu_1,\mu_2}(u, v) = \int_\Omega (\mu_1 f(x)|u|^r |x|^{-l} + \mu_2 g(x)|v|^r |x|^{-l})\mathrm{d}x \tag{7}$$

容易验证 $\mathscr{J}_{\mu_1,\mu_2}(u, v) \in C^1$，且对任意 $(\varphi_1, \varphi_2) \in E$，有

$$\begin{aligned}\langle \mathscr{J}_{\mu_1,\mu_2}'(u, v), (\varphi_1, \varphi_2)\rangle = &\mathscr{L}(u) \cdot \int_\Omega \left(\nabla u \nabla \varphi_1 - \mu\frac{u\varphi_1}{|x|^2}\right)\mathrm{d}x + \mathscr{L}(v) \cdot \int_\Omega \left(\nabla v \nabla \varphi_2 - \mu\frac{v\varphi_2}{|x|^2}\right)\mathrm{d}x - \\ &\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\int_\Omega h(x)\frac{|u|^{\alpha-2}u|v|^\beta}{|x|^s}\varphi_1 \mathrm{d}x - \mu_1\int_\Omega f(x)\frac{|u|^{r-2}u}{|x|^l}\varphi_1 \mathrm{d}x - \\ &\frac{\beta}{\alpha+\beta}\int_\Omega h(x)\frac{|v|^{\beta-2}v|u|^\alpha}{|x|^s}\varphi_2 \mathrm{d}x - \mu_2\int_\Omega g(x)\frac{|v|^{r-2}v}{|x|^l}\varphi_2 \mathrm{d}x\end{aligned} \tag{8}$$

特别地，由(7)式和(8)式可得

$$\langle \mathscr{J}_{\mu_1,\mu_2}'(u, v), (u, v)\rangle = a\|(u, v)\|^2 + b(\|u\|^{4-s} + \|v\|^{4-s}) - \int_\Omega h(x)|u|^\alpha |v|^\beta |x|^{-s}\mathrm{d}x - K_{\mu_1,\mu_2}(u, v)$$

由于系统(1)的弱解对应于 $\mathscr{J}_{\mu_1,\mu_2}(u, v)$ 的临界点. 因此，为了获得本文结果，我们设：

(M) $f(x), g(x), h(x) \in L^\infty(\Omega)$，$f(x), g(x), h(x) \geqslant 0$，且在 Ω 中 $f(x), g(x), h(x) \neq 0$

定理 1　存在 $\Lambda^* > 0$，使得当 $0 < (\mu_1 |f|_\infty)^{\frac{2}{2-r}} + (\mu_2 |g|_\infty)^{\frac{2}{2-r}} < \Lambda^*$，且 f, g, h 满足条件(M)时，系统(1)至少存在一个正解.

注 1　文献[3]研究的是方程，本文考虑的是方程组，本文的结果是对文献[3]的补充. 文献[4]考虑的是 $\mu, s, l = 0$，$h(x) \equiv 2$，$f(x) \equiv g(x) \equiv 1$，因此相对于文献[4]，本文考虑了更一般的情形.

为了证明定理 1，我们需要引入 Nehari 流形和纤维映射. 由 $\mathscr{J}_{\mu_1,\mu_2}(u, v)$ 的定义可知，其在空间 E 上没有下界，因此引入 Nehari 流形

$$N_{\mu_1,\mu_2}=\{(u,v)\in E\backslash\{(0,0)\}:\langle \mathscr{J}_{\mu_1,\mu_2}(u,v),(u,v)\rangle=0\}\tag{9}$$

易知，$(u,v)\in N_{\mu_1,\mu_2}$ 当且仅当

$$a\|(u,v)\|^2+b(\|u\|^{4-s}+\|v\|^{4-s})-\int_\Omega h(x)|u|^\alpha|v|^\beta|x|^{-s}\mathrm{d}x-K_{\mu_1,\mu_2}(u,v)=0$$

因此，N_{μ_1,μ_2} 包含了系统(1)的所有非平凡解. 同时，如果$(u,v)\in N_{\mu_1,\mu_2}$，则由(6)式和(9)式可得

$$\begin{aligned}\mathscr{J}_{\mu_1,\mu_2}(u,v)=&\frac{a}{2}\|(u,v)\|^2+\frac{b}{4-s}(\|u\|^{4-s}+\|v\|^{4-s})-\\&\frac{1}{2^*(s)}\int_\Omega h(x)|u|^\alpha|v|^\beta|x|^{-s}\mathrm{d}x-\frac{1}{r}K_{\mu_1,\mu_2}(u,v)=\\&\frac{a(r-2)}{2r}\|(u,v)\|^2+\frac{b(r+s-4)}{r(4-s)}(\|u\|^{4-s}+\|v\|^{4-s})-\\&\frac{r+2s-6}{r(6-2s)}\int_\Omega h(x)|u|^\alpha|v|^\beta|x|^{-s}\mathrm{d}x=\\&\frac{a(2-s)}{6-2s}\|(u,v)\|^2+\frac{b(2-s)}{(4-s)(6-2s)}(\|u\|^{4-s}+\|v\|^{4-s})-\\&\frac{6-2s-r}{r(6-2s)}K_{\mu_1,\mu_2}(u,v)\end{aligned}\tag{10}$$

对任意的$(u,v)\in E$，定义

$$\Phi_{\mu_1,\mu_2}(u,v)=\langle \mathscr{J}_{\mu_1,\mu_2}(u,v),(u,v)\rangle\tag{11}$$

于是任给$(u,v)\in N_{\mu_1,\mu_2}$，有

$$\begin{aligned}\langle\Phi'_{\mu_1,\mu_2}(u,v),(u,v)\rangle=&2a\|(u,v)\|^2+b(4-s)(\|u\|^{4-s}+\|v\|^{4-s})-\\&(6-2s)\int_\Omega h(x)\frac{|u|^\alpha|v|^\beta}{|x|^s}\mathrm{d}x-rK_{\mu_1,\mu_2}(u,v)=\\&a(2-r)\|(u,v)\|^2+b(4-s-r)(\|u\|^{4-s}+\|v\|^{4-s})-\\&(6-2s-r)\int_\Omega h(x)\frac{|u|^\alpha|v|^\beta}{|x|^s}\mathrm{d}x=\\&a(2s-4)\|(u,v)\|^2+b(s-2)(\|u\|^{4-s}+\|v\|^{4-s})-\\&(r+2s-6)K_{\mu_1,\mu_2}(u,v)\end{aligned}\tag{12}$$

现在，我们将 N_{μ_1,μ_2} 分成 3 部分：

$$\begin{cases}N^+_{\mu_1,\mu_2}=\{(u,v)\in N_{\mu_1,\mu_2}:\langle\Phi'_{\mu_1,\mu_2}(u,v),(u,v)\rangle>0\}\\N^0_{\mu_1,\mu_2}=\{(u,v)\in N_{\mu_1,\mu_2}:\langle\Phi'_{\mu_1,\mu_2}(u,v),(u,v)\rangle=0\}\\N^-_{\mu_1,\mu_2}=\{(u,v)\in N_{\mu_1,\mu_2}:\langle\Phi'_{\mu_1,\mu_2}(u,v),(u,v)\rangle<0\}\end{cases}\tag{13}$$

引理 1　$\mathscr{J}_{\mu_1,\mu_2}(u,v)$ 在 N_{μ_1,μ_2} 上强制且有下界.

证　由于 $f(x)\in L^\infty(\Omega)$，故存在 $R_0>0$，使得 $\mathrm{supp}f\subset B_{R_0}(0)$. 应用 Hölder 不等式与(4)式可得

$$\begin{aligned}\int_\Omega\mu_1 f(x)|u|^r|x|^{-l}\mathrm{d}x\leqslant&\mu_1|f|_\infty\left(\int_{B_{R_0}(0)}|x|^{-l}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2^*(l)-r}{2^*(l)}}\left(\int_{B_{R_0}(0)}|u|^{2^*(l)}|x|^{-l}\mathrm{d}x\right)^{\frac{r}{2^*(l)}}\leqslant\\&\mu_1|f|_\infty C_1A_l^{-\frac{r}{2}}\|u\|^r\end{aligned}$$

其中 $C_1=\left(\frac{3\omega_3R_0^{3-l}}{3-l}\right)^{\frac{2^*(l)-r}{2^*(l)}}$，$\omega_3=\frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{3\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中的单位球的体积. 同理可得

$$\int_\Omega\mu_2 g(x)|v|^r|x|^{-l}\mathrm{d}x\leqslant\mu_2|g|_\infty C_1A_l^{-\frac{r}{2}}\|v\|^r$$

结合(7)式可知

$$K_{\mu_1,\mu_2}(u,v)\leqslant C_1A_l^{-\frac{r}{2}}e_{\mu_1,\mu_2}^{\frac{2-r}{2}}\|(u,v)\|^r\qquad e_{\mu_1,\mu_2}=(\mu_1|f|_\infty)^{\frac{2}{2-r}}+(\mu_2|g|_\infty)^{\frac{2}{2-r}}\tag{14}$$

从而结合(10)式和(14)式，可推出

$$\mathscr{J}_{\mu_1,\mu_2}(u,v) \geqslant \frac{a(2-s)}{6-2s}\|(u,v)\|^2 + \frac{b(2-s)}{(4-s)(6-2s)}(\|u\|^{4-s}+\|v\|^{4-s}) - \frac{6-2s-r}{r(6-2s)}C_1 A_l^{-\frac{r}{2}} e_{\mu_1,\mu_2}^{\frac{2-r}{2}}\|(u,v)\|^r \tag{15}$$

依据 $1<r<2$，$0\leqslant s<2$，可得 $\mathscr{J}_{\mu_1,\mu_2}(u,v)$ 在 N_{μ_1,μ_2} 上强制且有下界.

引理 2 存在 $\Lambda_0>0$，使得当 $0<e_{\mu_1,\mu_2}<\Lambda_0$ 时，有 $N^0_{\mu_1,\mu_2}=\varnothing$.

证 先设

$$\Lambda_0 = A_l^{\frac{r}{2-r}} A_s^{\frac{3-s}{2-s}}\left[\frac{a(4-2s)}{C_1(6-2s-r)}\right]^{\frac{2}{2-r}}\left[\frac{a(2-r)}{|h|_\infty(6-2s-r)}\right]^{\frac{1}{2-s}} \tag{16}$$

下面用反证法证明引理 2，假设结论不成立，即 $N^0_{\mu_1,\mu_2}\neq\varnothing$. 那么对任意的 $(u,v)\in N^0_{\mu_1,\mu_2}$，由(5),(12)式及(13)式可得

$$a(2-r)\|(u,v)\|^2 \leqslant (6-2s-r)\int_\Omega h(x)\frac{|u|^\alpha|v|^\beta}{|x|^s}\mathrm{d}x \leqslant (6-2s-r)|h|_\infty A_s^{-3+s}\|(u,v)\|^{6-2s}$$

所以

$$\|(u,v)\| \geqslant \left[\frac{a(2-r)}{|h|_\infty(6-2s-r)}A_s^{3-s}\right]^{\frac{1}{4-2s}} \tag{17}$$

再由(12)-(14)式得

$$a(4-2s)\|(u,v)\|^2 \leqslant (6-2s-r)K_{\mu_1,\mu_2}(u,v) \leqslant (6-2s-r)C_1 A_l^{-\frac{r}{2}} e_{\mu_1,\mu_2}^{\frac{2-r}{2}}\|(u,v)\|^r$$

所以

$$\|(u,v)\| \leqslant \left[\frac{6-2s-r}{a(4-2s)}C_1 A_l^{-\frac{r}{2}} e_{\mu_1,\mu_2}^{\frac{2-r}{2}}\right]^{\frac{1}{2-r}} \tag{18}$$

从而结合(17)式和(18)式，可得

$$e_{\mu_1,\mu_2} \geqslant A_l^{\frac{r}{2-r}} A_s^{\frac{3-s}{2-s}}\left[\frac{a(4-2s)}{C_1(6-2s-r)}\right]^{\frac{2}{2-r}}\left[\frac{a(2-r)}{|h|_\infty(6-2s-r)}\right]^{\frac{1}{2-s}}$$

这与条件 $0<e_{\mu_1,\mu_2}<\Lambda_0$ 矛盾.

引理 3 设 (u_1,v_1) 是 $\mathscr{J}_{\mu_1,\mu_2}(u,v)$ 在 N_{μ_1,μ_2} 上的局部极小值点，并且 $(u_1,v_1)\notin N^0_{\mu_1,\mu_2}$，那么 (u_1,v_1) 是 $\mathscr{J}_{\mu_1,\mu_2}(u,v)$ 的临界点.

证 由文献[4]，我们可类似得证.

由引理 2，对于 $0<e_{\mu_1,\mu_2}<\Lambda_0$，有 $N_{\mu_1,\mu_2}=N^+_{\mu_1,\mu_2}\cup N^-_{\mu_1,\mu_2}$，现作如下定义：

$$\delta_{\mu_1,\mu_2} = \inf_{(u,v)\in N_{\mu_1,\mu_2}} \mathscr{J}_{\mu_1,\mu_2}(u,v)$$

$$\delta^+_{\mu_1,\mu_2} = \inf_{(u,v)\in N^+_{\mu_1,\mu_2}} \mathscr{J}_{\mu_1,\mu_2}(u,v)$$

$$\delta^-_{\mu_1,\mu_2} = \inf_{(u,v)\in N^-_{\mu_1,\mu_2}} \mathscr{J}_{\mu_1,\mu_2}(u,v)$$

则有如下的引理：

引理 4 若 $0<e_{\mu_1,\mu_2}<\Lambda^*$，其中 $\Lambda^*=\left(\frac{r}{2}\right)^{\frac{2}{2-r}}\Lambda_0$，则：

(i) $\delta_{\mu_1,\mu_2}\leqslant\delta^+_{\mu_1,\mu_2}<0$；

(ii) 存在常数 $k_0>0$，有 $\delta^-_{\mu_1,\mu_2}>k_0$.

证 (i) 对任意的 $(u,v)\in N^+_{\mu_1,\mu_2}$，由(12)式和(13)式可知

$$\int_\Omega h(x)\frac{|u|^\alpha|v|^\beta}{|x|^s}\mathrm{d}x < \frac{a(2-r)}{6-2s-r}\|(u,v)\|^2 + \frac{b(4-s-r)}{6-2s-r}(\|u\|^{4-s}+\|v\|^{4-s}) \tag{19}$$

从而由(10)式与(19)式可推出

$$\mathscr{J}_{\mu_1,\mu_2}(u,v) < \frac{a(2-s)(r-2)}{r(6-2s)}\|(u,v)\|^2 + \frac{b(2-s)(r+s-4)}{r(4-s)(6-2s)}(\|u\|^{4-s}+\|v\|^{4-s})$$

再依据 δ_{μ_1,μ_2} 和 $\delta^+_{\mu_1,\mu_2}$ 的定义可得 $\delta_{\mu_1,\mu_2}\leqslant\delta^+_{\mu_1,\mu_2}<0$. 故(i)成立.

(ii) 对任意的 $(u,v)\in N^-_{\mu_1,\mu_2}$，类似(17)式有

$$\|(u,v)\|>\left[\frac{a(2-r)}{|h|_\infty(6-2s-r)}A_s^{3-s}\right]^{\frac{1}{4-2s}}\tag{20}$$

从而结合(15)式和(20)式以及 $0<e_{\mu_1,\mu_2}<\Lambda^*$，得出

$$\begin{aligned}\mathscr{I}_{\mu_1,\mu_2}(u,v)\geqslant&\|(u,v)\|^r\left[\frac{a(2-s)}{6-2s}\|(u,v)\|^{2-r}-\frac{6-2s-r}{r(6-2s)}C_1A_l^{-\frac{r}{2}}e_{\mu_1,\mu_2}^{\frac{2-r}{2}}\right]\geqslant\\&\left[\frac{a(2-r)}{|h|_\infty(6-2s-r)}A_s^{3-s}\right]^{\frac{r}{4-2s}}\left\{\frac{a(2-s)}{6-2s}\left[\frac{a(2-r)}{|h|_\infty(6-2s-r)}A_s^{3-s}\right]^{\frac{2-r}{4-2s}}-\right.\\&\left.\frac{6-2s-r}{r(6-2s)}C_1A_l^{-\frac{r}{2}}e_{\mu_1,\mu_2}^{\frac{2-r}{2}}\right\}=k_0>0\end{aligned}$$

引理 5　对任意的 $(u,v)\in E\backslash\{(0,0)\}$，当 $\int_\Omega h(x)|u|^\alpha|v|^\beta|x|^{-s}\mathrm{d}x>0$，$K_{\mu_1,\mu_2}(u,v)>0$ 时，存在唯一的 t^+ 以及 t^-，满足 $0<t^+<T_0<t^-$，使得 $(t^+u,t^+v)\in N^+_{\mu_1,\mu_2}$，$(t^-u,t^-v)\in N^-_{\mu_1,\mu_2}$，且

$$\mathscr{I}_{\mu_1,\mu_2}(t^+u,t^+v)=\inf_{0\leqslant t\leqslant T_0}\mathscr{I}_{\mu_1,\mu_2}(tu,tv)\qquad\mathscr{I}_{\mu_1,\mu_2}(t^-u,t^-v)=\sup_{t\geqslant0}\mathscr{I}_{\mu_1,\mu_2}(tu,tv)$$

证　设

$$\varphi_0(t)=\langle\mathscr{I}'_{\mu_1,\mu_2}(tu,tv),(tu,tv)\rangle\tag{21}$$

$$\varphi_1(t)=\langle\Phi'_{\mu_1,\mu_2}(tu,tv),(tu,tv)\rangle\tag{22}$$

$$\varphi_2(t)=\mathscr{I}_{\mu_1,\mu_2}(tu,tv)\tag{23}$$

和

$$m(t)=at^{2-r}\|(u,v)\|^2+bt^{4-s-r}(\|u\|^{4-s}+\|v\|^{4-s})-t^{6-2s-r}\int_\Omega h(x)|u|^\alpha|v|^\beta|x|^{-s}\mathrm{d}x\tag{24}$$

则由(21)式和(23)式可推出

$$\varphi_0(t)=t^r[m(t)-K_{\mu_1,\mu_2}(u,v)]\tag{25}$$

依据(24)式有 $\lim\limits_{t\to0^+}m(t)=0$，$\lim\limits_{t\to+\infty}m(t)=-\infty$ 和

$$\begin{aligned}m'(t)=&t^{5-2s-r}\Big[a(2-r)t^{-4+2s}\|(u,v)\|^2+b(4-s-r)t^{-2+s}(\|u\|^{4-s}+\|v\|^{4-s})-\\&(6-2s-r)\int_\Omega h(x)|u|^\alpha|v|^\beta|x|^{-s}\mathrm{d}x\Big]\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}g(t)=&a(2-r)t^{-4+2s}\|(u,v)\|^2+b(4-s-r)t^{-2+s}(\|u\|^{4-s}+\|v\|^{4-s})-\\&(6-2s-r)\int_\Omega h(x)|u|^\alpha|v|^\beta|x|^{-s}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

容易得出 $g'(t)<0$，又因

$$\lim_{t\to0^+}g(t)=+\infty$$

$$\lim_{t\to+\infty}g(t)=-(6-2s-r)\int_\Omega h(x)\frac{|u|^\alpha|v|^\beta}{|x|^s}\mathrm{d}x<0$$

所以存在唯一的 $T_0>0$，使得 $g(T_0)=0$. 故当 $t\in(0,T_0)$ 时，$m'(t)>0$；当 $t\in(T_0,+\infty)$ 时，$m'(t)<0$. 因此 $m(t)$ 在 T_0 处取得最大值.

特别地，当 $b=0$ 时，设

$$m_0(t)=at^{2-r}\|(u,v)\|^2-t^{6-2s-r}\int_\Omega h(x)|u|^\alpha|v|^\beta|x|^{-s}\mathrm{d}x$$

$$g_0(t)=a(2-r)t^{-4+2s}\|(u,v)\|^2-(6-2s-r)\int_\Omega h(x)|u|^\alpha|v|^\beta|x|^{-s}\mathrm{d}x$$

易知 $g_0(t)$ 有唯一解，设 t_0 为 $g_0(t)$ 的唯一解，则

$$t_0=\left[\frac{(6-2s-r)\int_\Omega h(x)\,|u|^\alpha\,|v|^\beta\,|x|^{-s}\mathrm{d}x}{a(2-r)\,\|(u,v)\|^2}\right]^{\frac{-1}{4-2s}}$$

可知 t_0,T_0 分别满足

$$a(2-r)\,\|(u,v)\|^2=t_0^{4-2s}(6-2s-r)\int_\Omega h(x)\,|u|^\alpha\,|v|^\beta\,|x|^{-s}\mathrm{d}x$$

$$a(2-r)\,\|(u,v)\|^2\leqslant T_0^{4-2s}(6-2s-r)\int_\Omega h(x)\,|u|^\alpha\,|v|^\beta\,|x|^{-s}\mathrm{d}x \tag{26}$$

可知 $t_0^{4-2s}<T_0^{4-2s}$. 从而由(24)式和(26)式可得

$$m(T_0)=\frac{a(4-2s)}{6-2s-r}T_0^{2-r}\,\|(u,v)\|^2+\frac{b(2-s)}{6-2s-r}T_0^{4-s-r}(\|u\|^{4-s}+\|v\|^{4-s})\geqslant$$
$$\frac{a(4-2s)}{6-2s-r}T_0^{2-r}\,\|(u,v)\|^2\geqslant\frac{a(4-2s)}{6-2s-r}t_0^{2-r}\,\|(u,v)\|^2=m_0(t_0) \tag{27}$$

再依据(14)式及(27)式和 $0<e_{\mu_1,\mu_2}<\Lambda^*$ 可推出

$$m(0)=0<K_{\mu_1,\mu_2}(u,v)\leqslant C_1A_l^{-\frac{r}{2}}e_{\mu_1,\mu_2}^{\frac{2-r}{2}}\,\|(u,v)\|^r<$$
$$\frac{ar(4-2s)}{2(6-2s-r)}\left[\frac{a(2-r)}{|h|_\infty(6-2s-r)}A_s^{3-s}\right]^{\frac{2-r}{4-2s}}\|(u,v)\|^r\leqslant$$
$$m_0(t_0)\leqslant m(T_0)$$

因此,由(25)式可知,存在唯一的 t^+ 和 t^- 使得 $0<t^+<T_0<t^-$ 和 $m(t^+)=m(t^-)=K_{\mu_1,\mu_2}(u,v)$,由此可得 $(t^+u,t^+v)\in N_{\mu_1,\mu_2}$,$(t^-u,t^-v)\in N_{\mu_1,\mu_2}$. 再由(22)式可以推出

$$\varphi_1(t^+)=(t^+)^{r+1}m'(t^+)>0\qquad \varphi_1(t^-)=(t^-)^{r+1}m'(t^-)<0$$

则 $(t^+u,t^+v)\in N_{\mu_1,\mu_2}^+$,以及 $(t^-u,t^-v)\in N_{\mu_1,\mu_2}^-$. 又结合(23)式及(24)式可得到

$$\varphi'_2(t)=t^{r-1}[m(t)-K_{\mu_1,\mu_2}(u,v)]$$

从而当 $t\in[0,t^+]$ 和 $t\in[t^-,+\infty)$ 时,$\varphi'_2(t)<0$;当 $t\in[t^+,t^-]$ 时,$\varphi'_2(t)>0$. 又因 $(t^-u,t^-v)\in N_{\mu_1,\mu_2}^-$,由引理 4 可知 $\varphi_2(t^-)>0$,因此

$$\mathscr{J}_{\mu_1,\mu_2}(t^+u,t^+v)=\inf_{0\leqslant t\leqslant T_0}\mathscr{J}_{\mu_1,\mu_2}(tu,tv)\qquad \mathscr{J}_{\mu_1,\mu_2}(t^-u,t^-v)=\sup_{t\geqslant 0}\mathscr{J}_{\mu_1,\mu_2}(tu,tv)$$

下面给出系统(1)正解存在性的详细证明. 应用 Ekeland 变分原理和文献[5]中的引理 5.2,有如下的结果:

引理 6 存在 $\Lambda^*>0$,使得当 $0<(\mu_1|f|_\infty)^{\frac{2}{2-r}}+(\mu_2|g|_\infty)^{\frac{2}{2-r}}<\Lambda^*$ 时,$\mathscr{J}_{\mu_1,\mu_2}(u,v)$ 在 N_{μ_1,μ_2} 上存在 $(\mathrm{PS})_{\delta_{\mu_1,\mu_2}}$ 序列 $\{(u_n,v_n)\}$.

引理 7 若 $\{(u_n,v_n)\}$ 是 $\mathscr{J}_{\mu_1,\mu_2}(u,v)$ 的 $(\mathrm{PS})_c$ 序列,且在 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 上 $u_n\rightharpoonup u$,$v_n\rightharpoonup v$,则有 $\mathscr{J}_{\mu_1,\mu_2}(u,v)=0$ 和 $\mathscr{J}_{\mu_1,\mu_2}(u,v)>-C_0[(\mu_1|f|_\infty)^{\frac{2}{2-r}}+(\mu_2|g|_\infty)^{\frac{2}{2-r}}]$.

证 因为 $\{(u_n,v_n)\}$ 是 $\mathscr{J}_{\mu_1,\mu_2}(u,v)$ 的 $(\mathrm{PS})_c$ 序列,且在 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 上 $u_n\rightharpoonup u$,$v_n\rightharpoonup v$,容易验证 $\mathscr{J}_{\mu_1,\mu_2}(u,v)=0$. 再结合(10),(14)式和 Young 不等式,当 $a\geqslant r(3-s)(2-s)^{-1}$ 时,可得

$$\mathscr{J}_{\mu_1,\mu_2}(u,v)\geqslant\frac{a(2-s)}{6-2s}\|(u,v)\|^2-\frac{6-2s-r}{r(6-2s)}C_1A_l^{-\frac{r}{2}}e_{\mu_1,\mu_2}^{\frac{2-r}{2}}\,\|(u,v)\|^r\geqslant$$
$$\left[\frac{a(2-s)}{6-2s}-\frac{r}{2}\right]\|(u,v)\|^2-\frac{2-r}{2}\left[\frac{6-2s-r}{r(6-2s)}C_1A_l^{-\frac{r}{2}}e_{\mu_1,\mu_2}^{\frac{2-r}{2}}\right]^{\frac{2}{2-r}}\geqslant$$
$$-C_0[(\mu_1|f|_\infty)^{\frac{2}{2-r}}+(\mu_2|g|_\infty)^{\frac{2}{2-r}}]$$

其中 $C_0=\frac{2-r}{2}\left[\frac{6-2s-r}{r(6-2s)}C_1A_l^{-\frac{r}{2}}\right]^{\frac{2}{2-r}}$.

引理 8 若

$$c<c^*=\frac{2-s}{6-2s}\left[\frac{(aA_s)^{3-s}}{|h|_\infty}\right]^{\frac{1}{2-s}}-C_0e_{\mu_1,\mu_2} \tag{28}$$

成立，那么 $\mathscr{J}_{\mu_1,\mu_2}(u,v)$ 满足$(PS)_c$ 条件.

证　设$\{(u_n,v_n)\}\subset E$ 是 $\mathscr{J}'_{\mu_1,\mu_2}(u,v)$ 的$(PS)_c$ 序列，且满足

$$\mathscr{J}_{\mu_1,\mu_2}(u_n,v_n)=c+o_n(1)\qquad \mathscr{J}'_{\mu_1,\mu_2}(u_n,v_n)=o_n(1)\tag{29}$$

首先证明$\{(u_n,v_n)\}$ 在 E 中有界，由(14)式和(29)式可得

$$\begin{aligned}c+1+o_n(1)\|(u_n,v_n)\|\geqslant&\mathscr{J}_{\mu_1,\mu_2}(u_n,v_n)-\frac{1}{4-s}\langle\mathscr{J}'_{\mu_1,\mu_2}(u_n,v_n),(u_n,v_n)\rangle\geqslant\\&\frac{a(2-s)}{2(4-s)}\|(u_n,v_n)\|^2-\frac{4-s-r}{r(4-s)}C_1A_l^{-\frac{r}{2}}e_{\mu_1,\mu_2}^{\frac{2-r}{2}}\|(u_n,v_n)\|^r\end{aligned}$$

因为 $1<r<2$，则$\{(u_n,v_n)\}$ 在 E 中有界，故存在子列(仍记为$\{(u_n,v_n)\}$)及$(u,v)\in E$，使得

$$\begin{cases}u_n\rightharpoonup u,\ v_n\rightharpoonup v & x\in W_0^{1,2}(\Omega)\\ u_n\to u,\ v_n\to v & x\in L^q(\Omega,|x|^{-l}),\ 1\leqslant q<2^*(l)\\ u_n\to u,\ v_n\to v & \text{a. e. } x\in\Omega\end{cases}\tag{30}$$

因此

$$K_{\mu_1,\mu_2}(u_n,v_n)=K_{\mu_1,\mu_2}(u,v)+o_n(1)\qquad \mathscr{J}'_{\mu_1,\mu_2}(u,v)=0\tag{31}$$

设$(\bar{u}_n,\bar{v}_n)=(u_n-u,v_n-v)$，通过 Brezis-Lieb 引理[15] 和文献[16]中的引理 2.1，有

$$\|(\bar{u}_n,\bar{v}_n)\|^2=\|(u_n,v_n)\|^2-\|(u,v)\|^2+o_n(1)\tag{32}$$

$$\int_\Omega h(x)|\bar{u}_n|^\alpha|\bar{v}_n|^\beta|x|^{-s}\mathrm{d}x=\int_\Omega h(x)|u_n|^\alpha|v_n|^\beta|x|^{-s}\mathrm{d}x-\int_\Omega h(x)|u|^\alpha|v|^\beta|x|^{-s}\mathrm{d}x\tag{33}$$

从而结合(29)—(33)式，可得

$$\begin{aligned}c-\mathscr{J}_{\mu_1,\mu_2}(u,v)+o_n(1)=&\frac{a}{2}\|(\bar{u}_n,\bar{v}_n)\|^2+\frac{b}{4-s}(\|\bar{u}_n\|^{4-s}+\|\bar{v}_n\|^{4-s})-\\&\frac{1}{6-2s}\int_\Omega h(x)|\bar{u}_n|^\alpha|\bar{v}_n|^\beta|x|^{-s}\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{34}$$

$$o_n(1)=a\|(\bar{u}_n,\bar{v}_n)\|^2+b(\|\bar{u}_n\|^{4-s}+\|\bar{v}_n\|^{4-s})-\int_\Omega h(x)|\bar{u}_n|^\alpha|\bar{v}_n|^\beta|x|^{-s}\mathrm{d}x\tag{35}$$

不失一般性，设

$$\|(\bar{u}_n,\bar{v}_n)\|^2=m+o_n(1)$$
$$\|\bar{u}_n\|^{4-s}+\|\bar{v}_n\|^{4-s}=l+o_n(1)$$

于是由(35)式可知

$$\int_\Omega h(x)|\bar{u}_n|^\alpha|\bar{v}_n|^\beta|x|^{-s}\mathrm{d}x=am+bl+o_n(1)$$

如果 $m=0$，则结论成立. 与之相反，若 $m>0$，由(6)式得出

$$m|h|_\infty^{\frac{2}{2^*(s)}}=|h|_\infty^{\frac{2}{2^*(s)}}\lim_{n\to\infty}\|(\bar{u}_n,\bar{v}_n)\|^2\geqslant A_s(am+bl)^{\frac{2}{2^*(s)}}\geqslant A_s(am)^{\frac{2}{2^*(s)}}$$

所以

$$m\geqslant(aA_s^{\frac{2^*(s)}{2}}|h|_\infty^{-1})^{\frac{2}{2^*(s)-2}}$$

因此，由(34),(35)式及引理 7，有

$$c=\mathscr{J}_{\mu_1,\mu_2}(u,v)+\frac{am}{2}+\frac{bl}{4-s}-\frac{am+bl}{6-2s}\geqslant\frac{2-s}{6-2s}(aA_s^{\frac{2^*(s)}{2}}|h|_\infty^{-1})^{\frac{1}{2-s}}-C_0e_{\mu_1,\mu_2}=c^*$$

这与(28)式矛盾，从而可得 $m=0$，即当 $n\to\infty$ 时，在 E 中$(u_n,v_n)\to(u,v)$.

引理 9　存在 $\Lambda^*>0$，使得当 $0<e_{\mu_1,\mu_2}<\Lambda^*$ 时，$\mathscr{J}_{\mu_1,\mu_2}(u,v)$ 存在极小值点$(u_0^+,v_0^+)\in N_{\mu_1,\mu_2}^+$，则：

(i) $\mathscr{J}_{\mu_1,\mu_2}(u_0^+,v_0^+)=\delta_{\mu_1,\mu_2}=\delta_{\mu_1,\mu_2}^+<0$；

(ii) (u_0^+,v_0^+)是系统(1)的一个正解；

(iii) 当$(\mu_1,\mu_2)\to(0^+,0^+)$时，有 $\mathscr{J}_{\mu_1,\mu_2}(u_0^+,v_0^+)\to 0$.

证　由引理 6 可知，$\mathscr{J}_{\mu_1,\mu_2}(u,v)$ 在 N_{μ_1,μ_2} 上存在极小化序列$\{(u_n,v_n)\}$，使得

$$\mathscr{J}_{\mu_1,\mu_2}(u_n,v_n)=\delta_{\mu_1,\mu_2}+o_n(1)\qquad \mathscr{J}'_{\mu_1,\mu_2}(u_n,v_n)=o_n(1)$$

因为$\mathscr{J}_{\mu_1,\mu_2}(u,v)$在$N_{\mu_1,\mu_2}$上强制且有下界，则存在子序列(仍记为$\{(u_n,v_n)\}\subset N_{\mu_1,\mu_2}$)且$(u_0^+,v_0^+)\in E$，使得当$n\to\infty$时有

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u_0^+,\ v_n \rightharpoonup v_0^+ & x\in W_0^{1,2}(\Omega) \\ u_n \to u_0^+,\ v_n \to v_0^+ & x\in L^q(\Omega,|x|^{-l}),\ 1\leqslant q<2^*(l) \\ u_n \rightharpoonup u_0^+,\ v_n \rightharpoonup v_0^+ & x\in L^{2^*(s)}(\Omega,|x|^{-s}) \\ u_n \to u_0^+,\ v_n \to v_0^+ & \text{a.e. } x\in\Omega \end{cases}$$

这意味着

$$K_{\mu_1,\mu_2}(u_n,v_n)\to K_{\mu_1,\mu_2}(u_0^+,v_0^+)$$

由$\{(u_n,v_n)\}\subset N_{\mu_1,\mu_2}$和(10)式，可以得出

$$K_{\mu_1,\mu_2}(u_n,v_n)=\frac{ar(2-s)}{6-2s-r}\|(u_n,v_n)\|^2+\frac{br(2-s)}{(4-s)(6-2s-r)}(\|u_n\|^{4-s}+\|v_n\|^{4-s})-\frac{r(6-2s)}{6-2s-r}\mathscr{J}_{\mu_1,\mu_2}(u_n,v_n)$$

从而当$n\to\infty$时，依据引理 4(i)，可得

$$K_{\mu_1,\mu_2}(u_0^+,v_0^+)=\lim_{n\to\infty}K_{\mu_1,\mu_2}(u_n,v_n)\geqslant-\frac{r(6-2s)}{6-2s-r}\delta_{\mu_1,\mu_2}>0$$

因此，(u_0^+,v_0^+)是系统(1)的非平凡解.

下证在$W_0^{1,2}(\Omega)$上$u_n\to u_0^+$，$v_n\to v_0^+$，且$\mathscr{J}_{\mu_1,\mu_2}(u_0^+,v_0^+)=\delta_{\mu_1,\mu_2}<0$. 应用Fatou引理，当$(u_0^+,v_0^+)\in N_{\mu_1,\mu_2}$时，由(10)式可得

$$\delta_{\mu_1,\mu_2}\leqslant\mathscr{J}_{\mu_1,\mu_2}(u_0^+,v_0^+)\leqslant\liminf_{n\to\infty}\mathscr{J}_{\mu_1,\mu_2}(u_n,v_n)=\delta_{\mu_1,\mu_2}$$

这意味着$\mathscr{J}_{\mu_1,\mu_2}(u_0^+,v_0^+)=\delta_{\mu_1,\mu_2}$以及

$$\lim_{n\to\infty}\|(u_n,v_n)\|^2=\|(u_0^+,v_0^+)\|^2 \qquad \lim_{n\to\infty}(\|u_n\|^{4-s}+\|v_n\|^{4-s})=\|u_0^+\|^{4-s}+\|v_0^+\|^{4-s}$$

设$(\tilde{u}_n,\tilde{v}_n)=(u_n,v_n)-(u_0^+,v_0^+)$，则由引理 8 的证明可知，在$W_0^{1,2}(\Omega)$上$u_n\to u_0^+$，$v_n\to v_0^+$.

进一步证明$(u_0^+,v_0^+)\in N_{\mu_1,\mu_2}^+$和$\mathscr{J}_{\mu_1,\mu_2}(u_0^+,v_0^+)=\delta_{\mu_1,\mu_2}^+$. 反之，若$(u_0^+,v_0^+)\in N_{\mu_1,\mu_2}^-$，由引理 5 可知，存在唯一的$t^+$和$t^-$，使得$(t^+u_0^+,t^+v_0^+)\in N_{\mu_1,\mu_2}^+$，$(t^-u_0^+,t^-v_0^+)\in N_{\mu_1,\mu_2}^-$. 特别地，有$t^+<t^-=1$. 当$t\in(t^+,t^-)$时，有$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{J}_{\mu_1,\mu_2}(tu,tv)>0$，则存在$\bar{t}\in(t^+,t^-)$，使得

$$\delta_{\mu_1,\mu_2}\leqslant\delta_{\mu_1,\mu_2}^+\leqslant\mathscr{J}_{\mu_1,\mu_2}(t^+u_0^+,t^+v_0^+)<\mathscr{J}_{\mu_1,\mu_2}(\bar{t}u_0^+,\bar{t}v_0^+)<J_{\mu_1,\mu_2}(t^-u_0^+,t^-v_0^+)=\delta_{\mu_1,\mu_2}$$

矛盾. 从而可得$(u_0^+,v_0^+)\in N_{\mu_1,\mu_2}^+$和$\mathscr{J}_{\mu_1,\mu_2}(u_0^+,v_0^+)=\delta_{\mu_1,\mu_2}^+$. 又由于$\mathscr{J}_{\mu_1,\mu_2}(u_0^+,v_0^+)=\mathscr{J}_{\mu_1,\mu_2}(|u_0^+|,|v_0^+|)$，那么由引理 3 和强极大值原理，可得$(u_0^+,v_0^+)$是系统(1)的一个正解.

最后，由(15)式和引理 4(i)，有

$$0>\delta_{\mu_1,\mu_2}^+=\mathscr{J}_{\mu_1,\mu_2}(u_0^+,v_0^+)>-\frac{6-2s-r}{r(6-2s)}C_1A_l^{-\frac{r}{2}}e_{\mu_1,\mu_2}^{\frac{2-r}{2}}\|(u_0^+,v_0^+)\|^r$$

因此，当$(\mu_1,\mu_2)\to(0^+,0^+)$时，有$\mathscr{J}_{\mu_1,\mu_2}(u_0^+,v_0^+)\to 0$.

定理 1 的证明　由引理 9，存在$\Lambda^*>0$，使得当$0<(\mu_1|f|_\infty)^{\frac{2}{2-r}}+(\mu_2|g|_\infty)^{\frac{2}{2-r}}<\Lambda^*$，且$f,g,h$满足条件(M)时，系统(1)至少存在一个正解$(u_0^+,v_0^+)\in N_{\mu_1,\mu_2}^+$.

参考文献：

[1] KIRCHHOFF G. Mechanik [M]. Leipzig: Teuhner, 1883.

[2] LIONS J L. On Some Questions in Boundary Value Problems of Mathematical Physics [J]. North-Holland Mathematics Studies, 1978, 30: 284-346.

[3] SHEN L J. Multiplicity and Asymptotic Behavior of Solutions for Kirchhoff Type Equations Involving the Hardy-Sobolev Exponent and Singular Nonlinearity [J]. Journal of Inequalities and Applications, 2018, 2018(1): 1-19.

[4] ZHANG Q, DENG Z Y. Existence of Positive Solutions for a Coupled System of Kirchhoff Type Equations with Sobolev Critical Exponent [J]. Journal of Mathematics and Informatics, 2019, 15: 19-31.

[5] CHEN C Y, KUO Y C, WU T F. The Nehari Manifold for a Kirchhoff Type Problem Involving Sign-Changing Weight Functions [J]. Journal of Differential Equations, 2011, 250(4): 1876-1908.

[6] CHUNG N. Existence of Positive Solutions for a Class of Kirchhoff Type Systems Involving Critical Exponents [J]. Filomat, 2019, 33(1): 267-280.

[7] ZUO J B, AN T Q, YANG L B, et al. The Nehari Manifold for a Fractional p-Kirchhoff System Involving Sign-Changing Weight Function and Concave-Convex Nonlinearities [J]. Journal of Function Spaces, 2019, 2019: 1-9.

[8] 孙宜民. 一类 Kirchhoff 型方程组极小能量解的存在性 [J]. 西北大学学报(自然科学版), 2018, 48(6): 793-796.

[9] 孙宜民. 一类 Kirchhoff 型非局部方程组正解的存在性 [J]. 陕西师范大学学报(自然科学版), 2019, 47(2): 21-25.

[10] 邵正梅, 欧增奇. 具有凹凸非线性项的 Kirchhoff 方程的多解性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2020, 45(4): 25-29.

[11] 张　黔, 邓志颖. 含临界指数项和双重奇异项的 Kirchhoff 型椭圆边值方程的正解 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2020, 45(2): 11-19.

[12] HSU T S, LI H L. Multiplicity of Positive Solutions for Singular Elliptic Systems With Critical Sobolev-Hardy and Concave Exponents [J]. Acta Mathematica Scientia, 2011, 31(3): 791-804.

[13] LI Y X, GAO W J. Existence of Multiple Solutions for Singular Quasilinear Elliptic System With Critical Sobolev-Hardy Exponents and Concave-Convex Terms [J]. Acta Mathematica Scientia, 2013, 33(1): 107-121.

[14] BROWN K J, ZHANG Y P. The Nehari Manifold for a Semilinear Elliptic Equation With a Sign Changing Weight Function [J]. Journal of Differential Equations, 2003, 193(2): 481-499.

[15] BREZIS H, LIEB E. A Relation Between Pointwise Convergence of Functions and Convergence of Functionals [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1983, 88(3): 486-490.

[16] HAN P G. The Effect of the Domain Topology on the Number of Positive Solutions of an Elliptic System Involving Critical Sobolev Exponents [J]. Houston Journal of Mathematics, 2006, 32(4): 1241-1257.

On Positive Solutions for a Class of Critical Singular Kirchhoff-Type Elliptic Boundary Value Problems

FAN Hong-Sen,　DENG Zhi-Ying

School of Science, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China

Abstract: This paper deals with a class of Kirchhoff-type elliptic boundary value equations involving the critical Sobolev-Hardy exponents. Based upon the Nehari manifold, fiber mapping, and Brezis-Lieb lemma etc, the existence of positive solutions for the problem has been obtained under the appropriate conditions, and some recent results been generalized and significantly improved.

Key words: positive solution; critical Sobolev-Hardy exponent; Nehari manifold; Kirchhoff-type problems

责任编辑　廖　坤