第 46 卷　第 6 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2021 年 6 月
Vol. 46　No. 6　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　Jun.　2021

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2021.06.007

一类边界奇异临界椭圆方程正解的存在性①

贾润杰，　商彦英

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 近年来，带有 Hardy 项和 Hardy-Sobolev 临界指数的奇异椭圆方程受到了广泛关注．根据奇异点所在区域的位置可以分为内部奇异($0\in\Omega$)和边界奇异($0\in\partial\Omega$)两种情况．边界奇异情况下，区域在原点处的曲率性质对方程解的存在性有着深刻的影响，对于低阶扰动的情形下椭圆方程解的存在性已有相应的结果．本文研究了在高阶扰动情形下具有边界奇异性的椭圆方程，利用山路引理、强极大值原理和一些分析技巧，证明了其正解的存在性，并且研究了边界的曲率性质及有关参数对方程解的存在性的影响．

关　键　词： Hardy-Sobolev 临界指数；山路引理；边界奇异性；高阶扰动

中图分类号：O176.3　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1000-5471(2021)06-0036-06

研究如下半线性椭圆问题：

$$\begin{cases} -\Delta u-\mu\dfrac{u}{|x|^2}=\dfrac{|u|^{2^*(s)-2}}{|x|^s}u+g(x,u) & x\in\Omega \\ u=0 & x\in\partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

其中，Ω 是 $\mathbb{R}^N(N\geqslant 3)$ 中带有 C^2 边界 $\partial\Omega$ 的有界区域且 $0\in\partial\Omega$，$0\leqslant\mu<\overline{\mu}=\dfrac{(N-2)^2}{4}$，$0\leqslant s<2$，$2^*(s)=\dfrac{2(N-s)}{N-2}$ 是 Hardy-Sobolev 临界指数，$2^*=2^*(0)=\dfrac{2N}{N-2}$ 是 Sobolev 临界指数，$g\in C(\overline{\Omega}\times\mathbb{R},\mathbb{R})$．令 $G(x,t)=\int_0^t g(x,s)\mathrm{d}s$ 是 $g(x,t)$ 的原函数．在本文中，假设 g 满足以下条件：

(g_1) $\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{g(x,t)}{t}=0$ 对 $x\in\overline{\Omega}$ 一致成立；

(g_2) $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{g(x,t)}{t^{2^*-1}}=0$ 对 $x\in\overline{\Omega}$ 一致成立；

(g_3) $\forall x\in\overline{\Omega}$，$t\in\mathbb{R}_+\backslash\{0\}$，存在 $2<\beta<2^*$，使得 $0<\beta G(x,t)\leqslant g(x,t)t$ 成立．

由 Hardy-Sobolev 不等式，当 $0\leqslant\mu<\overline{\mu}$ 时，$\|u\|=\left(\int_\Omega\left(|\nabla u|^2-\mu\dfrac{u^2}{|x|^2}\right)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$ 等价于 $H_0^1(\Omega)$ 空间中的范数(见文献[1])．最佳 Hardy-Sobolev 常数定义为

① 收稿日期：2021-01-14
基金项目：国家自然科学基金项目(11971393)．
作者简介：贾润杰，硕士研究生，主要从事非线性泛函分析的研究．
通信作者：商彦英，副教授．

$$A_{\mu,s}(\Omega)=\inf_{u\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}}\frac{\int_\Omega\left(|\nabla u|^2-\mu\frac{u^2}{|x|^2}\right)\mathrm{d}x}{\left(\int_\Omega\frac{|u|^{2^*(s)}}{|x|^s}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{2^*(s)}}}\tag{2}$$

近年来，带有 Hardy-Sobolev 临界指数和 Hardy 项的奇异椭圆方程是研究的热点，受到广泛关注，可参考文献[1-9]. 特别地，文献[2]研究了 $0\in\Omega$ 的情形，证明了问题(1) 存在两个正解. 对于 $0\in\partial\Omega$ 的情形，与 $0\in\Omega$ 的情形是不同的，文献[10]首先研究了这种情形，得到了：当 $N\geqslant 4$ 且 $\partial\Omega$ 在 0 处的主曲率是负的时，$A_{\mu,s}(\Omega)$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中能取到；然而，当 $0\in\Omega$ 且 Ω 是有界域时，$A_{\mu,s}(\Omega)$ 不能取到. 最近，文献[11-15]也研究了相关的临界和奇异问题.

在低阶扰动的情形下，即 g 满足条件：

(g_2')：$\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{g(x,t)}{t^{2^*(s)-1}}=0$ 对于 $x\in\overline{\Omega}$ 一致成立.

时，文献[8]研究了两个正解的存在性. 在高阶扰动(g 满足条件(g_2))的条件下，问题(1) 解的存在性还没有相关结果. 本文研究高阶扰动情况下边界的曲率性质和参数 μ,s,β 对问题(1) 解的存在性的影响，得到以下主要结果：

定理 1　假设 g 满足条件$(g_1)-(g_3)$，$\partial\Omega$ 在 0 处的主曲率是负的. 若以下条件之一成立：

(i) $N\geqslant 3$，$0<s<2$ 且 $0\leqslant\mu<\overline{\mu}$；

(ii) $N\geqslant 4$，$s=0$ 且 $0<\mu<\overline{\mu}$.

则问题(1) 至少有一个正解.

定理 2　假设 $N\geqslant 3$，$0\leqslant s<2$ 且 $0\leqslant\mu<\overline{\mu}$. 如果 g 满足条件$(g_1)-(g_3)$，且以下条件之一成立：

(i) $\partial\Omega$ 在 0 处的主曲率等于 0，且 $\beta>\max\left\{2,\dfrac{N-2\sqrt{\overline{\mu}-\mu}}{\sqrt{\overline{\mu}}}\right\}$；

(ii) $\partial\Omega$ 在 0 处的主曲率大于 0，且 $\beta>\max\left\{\dfrac{N-2\sqrt{\overline{\mu}-\mu})}{\sqrt{\overline{\mu}}},\dfrac{N-1}{\sqrt{\overline{\mu}}}\right\}$.

则问题(1) 至少有一个正解.

推论 1　假设 $N\geqslant 3$，$0\leqslant s<2$ 且 $0\leqslant\mu\leqslant\overline{\mu}-\dfrac{1}{4}$. 如果 g 满足条件$(g_1)-(g_3)$，$\beta>\dfrac{N-1}{\sqrt{\overline{\mu}}}$，则问题(1) 至少有一个正解.

注 1　与文献[2]相比较，在边界奇异的情形下，边界在原点处的曲率性质对问题(1) 解的存在性有着本质的影响.

问题(1) 相应的能量泛函是

$$I(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega\left(|\nabla u|^2-\mu\frac{u^2}{|x|^2}\right)\mathrm{d}x-\frac{1}{2^*(s)}\int_\Omega\frac{(u^+)^{2^*(s)}}{|x|^s}\mathrm{d}x-\int_\Omega G(x,u^+)\mathrm{d}x\qquad u\in H_0^1(\Omega)\tag{3}$$

众所周知，问题(1) 的正解和泛函 I 在 $H_0^1(\Omega)$ 中的临界点是一一对应的. 称 $u\in H_0^1(\Omega)$ 是问题(1) 的弱解，如果对于任何的 $v\in H_0^1(\Omega)$，有

$$\langle I'(u),v\rangle=\int_\Omega\left(\nabla u\nabla v-\mu\frac{uv}{|x|^2}\right)\mathrm{d}x-\int_\Omega\frac{(u^+)^{2^*(s)-1}}{|x|^s}v\mathrm{d}x-\int_\Omega g(x,u^+)v\mathrm{d}x=0\tag{4}$$

引理 1　如果条件(g_1)和(g_2)成立，则 $u=0$ 是 I 在 $H_0^1(\Omega)$ 中的局部极小值点.

证　由条件(g_1)和(g_2)，对于任何的 $\varepsilon>0$，和 $t\in\mathbb{R}_+$，$x\in\overline{\Omega}$，存在 $C(\varepsilon)>0$，使得

$$G(x,t)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}t^2+C(\varepsilon)t^{2^*}$$

成立. 结合 Hardy-Sobolev 不等式，对于 ε 充分小，我们得到

$$I(u)=\frac{1}{2}\|u\|^{2}-\frac{1}{2^{*}(s)}\int_{\Omega}\frac{(u^{+})^{2^{*}(s)}}{|x|^{s}}\mathrm{d}x-\int_{\Omega}G(x,u^{+})\mathrm{d}x\geqslant$$

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{C_{1}\varepsilon}{2}\right)\|u\|^{2}-C_{2}\|u\|^{2^{*}(s)}-C_{3}\|u\|^{2^{*}}$$

因为 $2<2^{*}(s)\leqslant 2^{*}$，当 $\|u\|$ 充分小时，$I(u)\geqslant 0=I(0)$. 即 $u=0$ 是 I 的局部极小值点.

引理 2　假设条件(g_1)，(g_2) 和(g_3) 成立. 如果 $u=0$ 是 I 的唯一临界点，则对于每个 $c<\frac{2-s}{2(N-s)}A_{\mu,s}(\mathbb{R}_{+}^{N})^{\frac{N-s}{2-s}}$，$I$ 满足$(\mathrm{PS})_c$ 条件.

证　令序列$\{u_n\}\subset H_0^1(\Omega)$ 满足

$$I(u_n)\rightarrow c<\frac{2-s}{2(N-s)}A_{\mu,s}(\mathbb{R}_{+}^{N})^{\frac{N-s}{2-s}}\qquad I'(u_n)\rightarrow 0\tag{5}$$

则

$$o(1)\|u_n^{-}\|=\langle I'(u_n),u_n^{-}\rangle=\|u_n^{-}\|^{2}-\int_{\Omega}g(x,u_n^{+})u_n^{-}\mathrm{d}x=\|u_n^{-}\|^{2}$$

其中，$u_n^{-}=\max\{-u_n,0\}$. 因此，在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $u_n^{-}\rightarrow 0$. 对 $\rho=\min\{\beta,2^{*}(s)\}$，利用条件$(g_3)$ 可以得到

$$c+1+o(1)\|u_n^{+}\|\geqslant I(u_n)-\frac{1}{\rho}\langle I'(u_n),u_n^{+}\rangle=$$

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\rho}\right)\|u_n\|^{2}+\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{2^{*}(s)}\right)\int_{\Omega}\frac{(u_n^{+})^{2^{*}(s)}}{|x|^{s}}\mathrm{d}x-$$

$$\int_{\Omega}\left(G(x,u_n^{+})-\frac{1}{\rho}g(x,u_n^{+})u_n^{+}\right)\mathrm{d}x\geqslant$$

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\rho}\right)\|u_n^{+}\|^{2}$$

所以，$\{u_n^{+}\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中是有界的. 故存在子序列，仍然记为$\{u_n^{+}\}$，使得在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $u_n^{+}\rightharpoonup u_0$. 由 I' 的弱连续性，对于所有的 $w\in H_0^1(\Omega)$，当 $n\rightarrow\infty$ 时，我们有

$$0=\lim_{n\rightarrow\infty}\langle I'(u_n),w\rangle=\langle I'(u_0),w\rangle$$

这表明$I'(u_0)=0$. 因此，u_0 是 I 在 $H_0^1(\Omega)$ 中的临界点. 根据假设，0 是 I 的唯一临界点，则 $u_0=0$. 类似于文献[8]的引理 3.2，我们可以利用反证法证明在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $u_n^{+}\rightarrow 0$. 结合 $u_n^{-}\rightarrow 0$，得到 $u_n\rightarrow 0$. 所以，当 $c<\frac{2-s}{2(N-s)}A_{\mu,s}(\mathbb{R}_{+}^{N})^{\frac{N-s}{2-s}}$ 时，I 满足$(\mathrm{PS})_c$ 条件.

令 $\phi\in H_0^1(\Omega)$ 是使得$\int_{\mathbb{R}_{+}^{N}}\frac{|\phi|^{2^{*}(s)}}{|x|^{s}}\mathrm{d}x=1$ 和 $\|\phi\|^{2}=A_{\mu,s}(\mathbb{R}_{+}^{N})$ 的正泛函. 对任何的 $\sigma>0$ 和 $\gamma\in\mathbb{R}^{1}$，令

$$\theta_{\sigma}(x)=x-\frac{\gamma}{\sigma}|x'|^{2}e_{N}\qquad \phi_{\sigma}(x)=\sigma^{\frac{N}{2^{*}}}\phi^{\sigma}(\sigma x)\psi_{\sigma}(\sigma x)\qquad x'=(x_1,x_2,\cdots,x_{N-1},0)$$

并且 $\phi^{\sigma}(x)=\phi(\theta_{\sigma}(x))$，$\psi_{\sigma}$ 是使得对于 $|x|\leqslant\frac{1}{2}\delta\sigma$，，$\psi_{\sigma}\equiv 1$ 和 $|x|\geqslant\delta\sigma$，$|\psi_{\sigma}'|\leqslant C\frac{1}{\sigma}$，$\psi_{\sigma}\equiv 0$ 成立的径向对称函数. 由文献[10]中的方法，可以得到

$$\|\phi_{\sigma}\|^{2}=A_{\mu,s}(\mathbb{R}_{+}^{N})+2\left(C_4-\frac{C_5}{2^{*}(s)}\right)\frac{\gamma}{\sigma}+O(\sigma^{-2\sqrt{\bar{\mu}-\mu}})\tag{6}$$

$$\int_{\Omega}\frac{|\phi_{\sigma}|^{2^{*}(s)}}{|x|^{s}}\mathrm{d}x=1-C_5\frac{\gamma}{\sigma}+O(\sigma^{-\frac{2(N-s)\sqrt{\bar{\mu}-\mu}}{N-2}})\tag{7}$$

而且，对于 $N\geqslant 3$，$2\leqslant q<2^{*}$，有

$$\int_{\Omega}|\phi_{\sigma}|^{q}\mathrm{d}x=C_6\sigma^{q\sqrt{\bar{\mu}}-N}+o(\sigma^{q\sqrt{\bar{\mu}}-N})\tag{8}$$

引理 3　在定理 1 或者定理 2 的条件下，存在 $u^* \in H_0^1(\Omega)$，$u^* \neq 0$，使得

$$\sup_{t\geqslant 0} I(tu^*) < \frac{2-s}{2(N-s)} A_{\mu,s}(\mathbb{R}_+^N)^{\frac{N-s}{2-s}}$$

证　如果定理 1 的条件成立，由文献[16]的定理 1.2，我们得到 $A_{\mu,s}(\Omega) < A_{\mu,s}(\mathbb{R}_+^N)$，且 $A_{\mu,s}(\Omega)$ 由某个正函数 $\omega \in H_0^1(\Omega)$ 达到. 令

$$F(t\omega) = \frac{t^2}{2}\|\omega\|^2 - \frac{t^{2^*(s)}}{2^*(s)}\int_\Omega \frac{|\omega|^{2^*(s)}}{|x|^s}\mathrm{d}x$$

由 $G(x, t)$ 的非负性，我们有

$$\sup_{t\geqslant 0} I(t\omega) \leqslant \sup_{t\geqslant 0} F(t\omega) = \frac{2-s}{2(N-s)} A_{\mu,s}(\Omega)^{\frac{N-s}{2-s}} < \frac{2-s}{2(N-s)} A_{\mu,s}(\mathbb{R}_+^N)^{\frac{N-s}{2-s}}$$

在定理 2 的假设下，利用条件(g_3)可以证明，$G(x, t) \geqslant C|t|^\beta$ 对所有的 $x \in \overline{\Omega}$，$t > 0$ 成立. 结合(6)—(8)式，可以得到

$$\begin{aligned} I(t\phi_\sigma) &= \frac{t^2}{2}\|\phi_\sigma\|^2 - \frac{t^{2^*(s)}}{2^*(s)}\int_\Omega \frac{|\phi_\sigma|^{2^*(s)}}{|x|^s}\mathrm{d}x - \int_\Omega G(x, t\phi_\sigma)\mathrm{d}x \leqslant \\ &\frac{t^2}{2}\|\phi_\sigma\|^2 - \frac{t^{2^*(s)}}{2^*(s)}\int_\Omega \frac{|\phi_\sigma|^{2^*(s)}}{|x|^s}\mathrm{d}x - Ct^\beta\int_\Omega |\phi_\sigma|^\beta \mathrm{d}x = \\ &\frac{t^2}{2}\left(A_{\mu,s}(\mathbb{R}_+^N) + 2\left(C_4 - \frac{C_5}{2^*(s)}\right)\frac{\gamma}{\sigma} + O(\sigma^{-2\sqrt{\bar{\mu}-\mu}})\right) - \\ &\frac{t^{2^*(s)}}{2^*(s)}\left(1 - C_5\frac{\gamma}{\sigma} + O(\sigma^{-\frac{2(N-s)\sqrt{\bar{\mu}-\mu}}{N-2}})\right) - C_7 t^\beta \sigma^{\beta\sqrt{\bar{\mu}}-N} + o(\sigma^{\beta\sqrt{\bar{\mu}}-N}) \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} H(t\phi_\sigma) &= \frac{t^2}{2}\left(A_{\mu,s}(\mathbb{R}_+^N) + 2\left(C_4 - \frac{C_5}{2^*(s)}\right)\frac{\gamma}{\sigma} + O(\sigma^{-2\sqrt{\bar{\mu}-\mu}})\right) - \\ &\frac{t^{2^*(s)}}{2^*(s)}\left(1 - C_5\frac{\gamma}{\sigma} + O(\sigma^{-\frac{2(N-s)\sqrt{\bar{\mu}-\mu}}{N-2}})\right) - C_7 t^\beta \sigma^{\beta\sqrt{\bar{\mu}}-N} + o(\sigma^{\beta\sqrt{\bar{\mu}}-N}) \end{aligned}$$

由文献[10]中定理 4.2 的证明，当 σ 足够大时，$\sup\limits_{t\geqslant 0} H(t\phi_\sigma)$ 在 t_M 处取到最大值，其中

$$t_M = A_{\mu,s}(\mathbb{R}_+^N)^{\frac{1}{2^*(s)-2}} - C\sigma^{\beta\sqrt{\bar{\mu}}-N} + O(\sigma^{-2\sqrt{\bar{\mu}-\mu}}) + O(\gamma\sigma^{-1})$$

因此

$$\begin{aligned} &\sup_{t\geqslant 0} I(t\phi_\sigma) \leqslant \sup_{t\geqslant 0} H(t\phi_\sigma) = H(t_M\phi_\sigma) = \\ &\frac{2-s}{2(N-s)} A_{\mu,s}(\mathbb{R}_+^N)^{\frac{N-s}{2-s}} - C_8\sigma^{\beta\sqrt{\bar{\mu}}-N} + O(\sigma^{-2\sqrt{\bar{\mu}-\mu}}) + O(\gamma\sigma^{-1}) + o(\sigma^{\beta\sqrt{\bar{\mu}}-N}) \end{aligned}$$

情形 1　记 γ 是 $\partial\Omega$ 在 0 处的主曲率. 如果 $\beta > \dfrac{N-2\sqrt{\bar{\mu}-\mu}}{\sqrt{\bar{\mu}}}$，则 $\beta\sqrt{\bar{\mu}} - N > -2\sqrt{\bar{\mu}-\mu}$. 若 $\gamma = 0$，则当 σ 充分大时，有

$$\sup_{t\geqslant 0} I(t\phi_\sigma) < \frac{2-s}{2(N-s)} A_{\mu,s}(\mathbb{R}_+^N)^{\frac{N-s}{2-s}}$$

情形 2　假设 $\gamma > 0$. 如果 $\beta > \max\left\{\dfrac{N-2\sqrt{\bar{\mu}-\mu}}{\sqrt{\bar{\mu}}}, \dfrac{N-1}{\sqrt{\bar{\mu}}}\right\}$，则 $\beta\sqrt{\bar{\mu}} - N > -2\sqrt{\bar{\mu}-\mu}$ 且 $\beta\sqrt{\bar{\mu}} - N > -1$. 因此，当 σ 充分大时仍然有

$$\sup_{t\geqslant 0} I(t\phi_\sigma) < \frac{2-s}{2(N-s)} A_{\mu,s}(\mathbb{R}_+^N)^{\frac{N-s}{2-s}}$$

令 $u^* = \phi_\sigma$，则当 $\sigma > 0$ 充分大时结论成立.

定理1和定理2的证明　假设 $u=0$ 是 I 在 $H_0^1(\Omega)$ 中的唯一临界点. 根据引理1，存在 $\alpha>0$，$r>0$，对 $\forall v\in\partial B_r=\{v\in H_0^1(\Omega):\|v\|=r\}$，都有 $I(v)>\alpha$. 又由引理3，存在 $u^*\in H_0^1(\Omega)$，$u^*\not\equiv 0$，使得

$$\sup_{t\geqslant 0} I(tu^*)<\frac{2-s}{2(N-s)}A_{\mu,s}(\mathbb{R}_+^N)^{\frac{N-s}{2-s}}$$

并且容易证明 $\lim\limits_{t\to+\infty} I(tu^*)\to-\infty$. 因此，可以选择 $t_0>0$ 使得 $\|t_0u^*\|>r$ 和 $I(t_0u^*)<0$. 由山路引理，存在序列 $\{v_n\}\subset H_0^1(\Omega)$ 满足 $I(v_n)\to c\geqslant\alpha$ 和 $I'(v_n)\to 0$，其中

$$c=\inf_{h\in\tau}\max_{t\in[0,1]} I(h(t))\qquad \tau=\{h\in C([0,1],H_0^1(\Omega)):h(0)=0,\ h(1)=t_0u^*\}$$

注意到

$$0<\alpha\leqslant c=\inf_{h\in\tau}\max_{t\in[0,1]} I(h(t))\leqslant\max_{t\in[0,1]} I(tt_0u^*)\leqslant$$

$$\sup_{t\geqslant 0} I(tu^*)<\frac{2-s}{2(N-s)}A_{\mu,s}(\mathbb{R}_+^N)^{\frac{N-s}{2-s}}$$

结合引理2，在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $v_n\to 0$. 因此，当 $n\to\infty$ 时，

$$I(v_n)\to I(0)=0=c\geqslant\alpha>0$$

矛盾. 所以，存在 $u\in H_0^1(\Omega)$，使得 $u\not\equiv 0$ 是 I 的临界点. 因为

$$\|u^-\|^2=\langle I'(u),u^-\rangle=0$$

所以 $u=u^+\geqslant 0$. 由强极大值原理，我们得到 $u>0$. 因此，定理1和定理2成立.

对于推论1，若 $0\leqslant\mu\leqslant\bar{\mu}-\frac{1}{4}$ 和 $\beta>\frac{N-1}{\sqrt{\bar{\mu}}}$，则

$$O(\sigma^{-2\sqrt{\bar{\mu}-\mu}})=O(\sigma^{-1})\qquad \beta\sqrt{\bar{\mu}}-N>-1$$

因此，对充分大的 σ，

$$\sup_{t\geqslant 0} I(t\phi_\sigma)<\frac{2-s}{2(N-s)}A_{\mu,s}(\mathbb{R}_+^N)^{\frac{N-s}{2-s}}$$

对主曲率 γ 没有任何限制. 由前面的证明可知推论1成立.

参考文献:

[1] FILIPPUCCI R, PUCCI P, ROBERT F. On a p-Laplace Equation with Multiple Critical Nonlinearities [J]. J Math Pures Appl, 2009, 91(2): 156-177.

[2] DING L, TANG C L. Existence and Multiplicity of Solutions for Semilinear Elliptic Equations with Hardy Terms and Hardy-Sobolev Critical Exponents [J]. Appl Math Lett, 2007, 20(12): 1175-1183.

[3] WANG M C, ZHANG Q. Existence of Solutions for Singular Critical Semilinear Elliptic Equation [J]. Appl Math Lett, 2019, 94: 217-223.

[4] CERAMI G, ZHONG X, ZOU W. On Some Nonlinear Elliptic PDEs with Sobolev-Hardy Critical Exponents and a Li-Lin Open Problem [J]. Calc Var Partial Differential Equations, 2015, 54(2): 1793-1829.

[5] HSIA C H, LIN C S, WADADE H. Revisiting an Idea of Brézis and Nirenberg [J]. J Funct Anal, 2010, 259(7): 1816-1849.

[6] LIN C S, WADADE H. Minimizing Problems for the Hardy-Sobolev Type Inequality with the Singularity on the Boundary [J]. Tohoku Math J, 2012, 64(1): 79-103.

[7] MARCUS M, NGUYEN P T. Moderate Solutions of Semilinear Elliptic Equations with Hardy Potential [J]. Poincaré Anal Non Linéaire, 2017, 34(1): 69-88.

[8] SHANG Y Y. Existence and Multiplicity of Positive Solutions for Some Hardy-Sobolev Critical Elliptic Equation with Boundary Singularities [J]. Nonlinear Anal, 2012, 75(5): 2724-2734.

[9] YANG H T, CHEN J H. A Result on Hardy-Sobolev Critical Elliptic Equations with Boundary Singularities [J]. Com-

mun Pure Appl Anal, 2007, 6(1): 191-201.

[10] GHOUSSOUB H, KANG X S. Hardy-Sobolev Critical Elliptic Equations with Boundary Singularities [J]. Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire, 2004, 21(6): 767-793.

[11] 张　黔，邓志颖. 含临界指数项和双重奇异项的 Kirchhoff 型椭圆边值方程的正解 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2020, 45(2): 11-19.

[12] 张　鹏，彭云飞，张晓飞. 一类带临界指数项的 Kirchhoff-Schrödinger-Poisson 系统正解的存在性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2020, 45(12): 28-35.

[13] 桂于雁. 几类分数阶椭圆型问题解的存在性与多解性 [D]. 重庆：西南大学, 2020.

[14] 余　芳，陈文晶. 带有临界指数增长的分数阶问题解的存在性 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2020, 42(10): 116-123.

[15] 冯　敏，周　军. 一类带有奇异项的非局部抛物方程解的爆破 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2020, 42(7): 124-129.

[16] CHERN J L, LIN C S. Minimizers of Caffarelli-Kohn-Nirenberg Inequalities with the Singularity on the Boundary [J]. Arch Rational Mech Anal, 2010, 197(2): 401-432.

Existence of Positive Solution for Some Boundary Singular Critical Elliptic Equation

JIA Run-jie,　SHANG Yan-ying

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: In recent years, singular elliptic equations with Hardy term and Hardy-Sobolev critical exponent have been widely concerned. According to the location of the domain where the singular points are located, they can be divided into two cases: internal singular ($0 \in \Omega$) and boundary singular ($0 \in \partial\Omega$). In case of boundary singularity, the curvature property of the domain at the origin has a profound influence to the existence of the solution. In addition, under the condition of low order perturbation, the existence of the solution of elliptic equation has some corresponding results. In this paper, the elliptic equations have been studied with boundary singularity in the case of high order perturbation. By means of Mountain pass lemma, strong maximum principle and some analysis techniques, the existence of positive solution for this equation has been obtained. And, the influence of the existence of the solutions by the curvature properties of the boundary and the corresponding parameters been studied.

Key words: Hardy-Sobolev critical exponent; mountain pass lemma; boundary singularities; high order perturbation

责任编辑　廖　坤