

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2021.06.008

关于常曲率曲面上测地线密度的注记^①

张芷若, 冯书香

西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715

摘要: 首先将常曲率曲面上一些基本的三角公式改写成统一的形式. 然后定义了常曲率曲面上测地线集的密度, 通过常曲率曲面上的三角公式以及参数变换证明了该密度与坐标选取无关. 最后给出了常曲率曲面上测地线集密度的几种形式.

关键词: 常曲率曲面; 测地线密度; 三角公式

中图分类号: O186.5

文献标志码: A

文章编号: 1000-5471(2021)06-0042-05

几何是数学中最为直观、具体且与现实生活最为贴近的一门数学分支^[1-2], 非欧几何是欧氏几何的进一步推广, 常曲率曲面是欧氏平面的推广, 常曲率曲面上测地线集的密度是积分几何中重要的概念. 文献[3]运用常曲率曲面上测地线集的密度将平面上经典的 Cauchy-Crofton 公式推广到了常曲率曲面上. 关于平面上直线集的密度可参见文献[4-5]. 文献[6-8]研究了常曲率曲面上测地线集的密度. 受文献[7]的启发, 本文利用常曲率曲面上基本的三角公式证明了常曲率曲面上的测地线集的密度与坐标选取无关, 还得到了常曲率曲面上测地线集密度的其他形式.

曲面的 Weingarten 变换是曲面切平面到自身的一个自共轭变换. Weingarten 变换在 $P \in S$ 点的两个实特征值称为曲面 S 在 P 点的主曲率, 分别记为 k_1, k_2 , $K = k_1 k_2$ 称为曲面的 Gauss 曲率. Gauss 曲率 K 为常数的曲面称为常曲率曲面.

记高斯曲率恒为常数 ϵ 的曲面为 Σ_ϵ , 不失一般性, 本文仅考虑 ϵ 取 1, 0, -1 的情形. 即 $\epsilon = 1$ 时, Σ_1 为单位球面; $\epsilon = 0$ 时, Σ_0 为欧氏平面; $\epsilon = -1$ 时, Σ_{-1} 为双曲平面.

Σ_ϵ 上测地曲率恒等于 0 的曲线称为测地线, 欧氏平面上的测地线为直线, 单位球面上的测地线为大圆. 在曲面 Σ_ϵ 上选一条测地线作为 v -曲线: $u = 0$. 取与 v -曲线正交的测地线族作为 u -曲线: v 为常数. 再取 u -曲线的正交轨线作为 v -曲线. 在这样的半测地线坐标网下, 曲面 Σ_ϵ 的第一基本形式简化为^[9-11]

$$ds^2 = du^2 + cn_\epsilon^2(u)dv^2$$

定义函数

$$cn_\epsilon(t) = \begin{cases} \cos t & \epsilon = 1 \\ 1 & \epsilon = 0 \\ \cosh t & \epsilon = -1 \end{cases} \quad sn_\epsilon(t) = \begin{cases} \sin t & \epsilon = 1 \\ t & \epsilon = 0 \\ \sinh t & \epsilon = -1 \end{cases}$$

$$tn_\epsilon(t) = \frac{sn_\epsilon(t)}{cn_\epsilon(t)} \quad ct n_\epsilon(t) = \frac{1}{tn_\epsilon(t)}$$

关于以上函数, 有^[2]

$$\epsilon sn_\epsilon^2(t) + cn_\epsilon^2(t) = 1 \quad cn_\epsilon'(t) = -\epsilon sn_\epsilon(t) \quad sn_\epsilon'(t) = cn_\epsilon(t)$$

① 收稿日期: 2020-10-19

基金项目: 国家自然科学基金项目(11971415).

作者简介: 张芷若, 硕士研究生, 主要从事积分几何与凸几何分析的研究.

$$sn_\epsilon^2(t)(1 + \epsilon tn_\epsilon^2(t)) = tn_\epsilon^2(t) \quad [sn_\epsilon^{-1}(t)]' = \frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon t^2}}$$

Σ_ϵ 上以 a, b, c 为边, α, β, γ 为对应角的测地三角形满足以下公式^[3,12]:

$$cn_\epsilon(a) = cn_\epsilon(b)cn_\epsilon(c) + \epsilon sn_\epsilon(b)sn_\epsilon(c)\cos\alpha \quad (1)$$

$$\frac{sn_\epsilon(a)}{\sin\alpha} = \frac{sn_\epsilon(b)}{\sin\beta} = \frac{sn_\epsilon(c)}{\sin\gamma} \quad (2)$$

$$sn_\epsilon(a)\cos\beta = cn_\epsilon(b)sn_\epsilon(c) - sn_\epsilon(b)cn_\epsilon(c)\cos\alpha \quad (3)$$

$$cn_\epsilon(c) = \frac{\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} \quad (4)$$

取定 Σ_ϵ 上的一点 O , 以及 O 处的一个方向. G 为 Σ_ϵ 上的一条测地线. 已知有唯一一条测地线 G_0 过 O 点, 且与 G 正交于点 A , 记 v 为 O 沿 G_0 到 G 的距离, 即 $\widehat{OA} = v$, θ 为 G_0 与 O 处取定的方向所形成的夹角(图 1). 则测地线集 $\{G\}$ 的密度定义为

$$dG = cn_\epsilon(v)dv \wedge d\theta \quad (5)$$

Σ_ϵ 上测地线集的密度 $dG = cn_\epsilon(v)dv \wedge d\theta$ 是在欧氏空间运动群下的不变密度^[8,13].

定理 1 常曲率曲面 Σ_ϵ 上测地线集的密度与固定点 O 以及点 O 处的固定方向的选择无关.

证 现考虑 Σ_ϵ 上另一固定点 O_1 , 以及 O_1 处的一个固定方向. 可知过 O_1 有唯一一条测地线 G_1 与 G 正交. 记 G_1 与 G 相交于 A_1 , 且 G_1 与 O_1 处的固定方向所形成的夹角为 θ_1 . 并将 OA, OO_1, OA_1 用测地线段连接起来. 记 α, α_1 为测地线 OO_1 分别与 O, O_1 处的固定方向所形成的夹角(图 2). 为了方便, 我们还记

$$\begin{aligned} \widehat{OA} = v & \quad \widehat{O_1A_1} = v_1 & \widehat{AA_1} = \lambda & \quad \widehat{OO_1} = \rho & \quad \widehat{OA_1} = \mu & \quad \widehat{O_1A} = u \\ \angle OAO_1 = \psi & \quad \angle OA_1O_1 = \varphi & \angle AOO_1 = \theta - \alpha & \quad \angle OO_1A_1 = \pi - (\theta_1 - \alpha_1) \end{aligned}$$

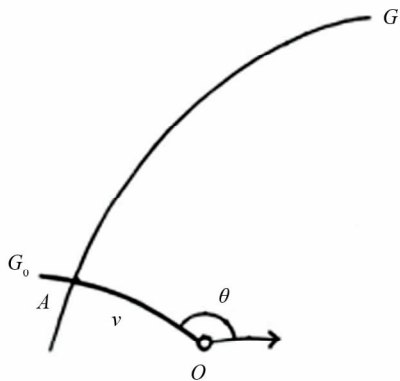


图 1 常曲率曲面上测地线的密度

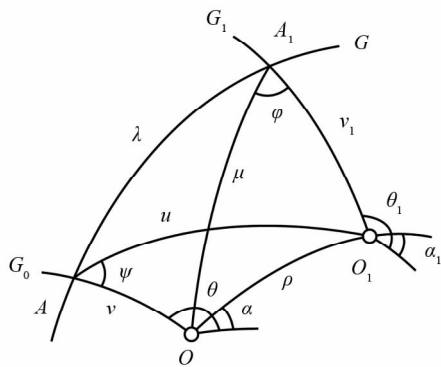


图 2 测地线密度的性质

在测地三角形 ΔOO_1A_1 中应用(3)式, 有

$$sn_\epsilon(\mu)\cos\varphi = cn_\epsilon(\rho)sn_\epsilon(v_1) + sn_\epsilon(\rho)cn_\epsilon(v_1)\cos(\theta_1 - \alpha_1) \quad (6)$$

在测地三角形 ΔOAA_1 中应用(2)式, 有

$$\frac{sn_\epsilon(\mu)}{\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{sn_\epsilon(v)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)} \quad (7)$$

将(7)式代入到(6)式, 得

$$sn_\epsilon(v) = sn_\epsilon(\mu)\cos\varphi = cn_\epsilon(\rho)sn_\epsilon(v_1) + sn_\epsilon(\rho)cn_\epsilon(v_1)\cos(\theta_1 - \alpha_1) \quad (8)$$

类似地, 在测地三角形 ΔOO_1A 和测地三角形 ΔO_1AA_1 中先后应用(3)式与(2)式, 有

$$sn_\epsilon(v_1) = sn_\epsilon(u)\cos\psi = cn_\epsilon(\rho)sn_\epsilon(v) - sn_\epsilon(\rho)cn_\epsilon(v)\cos(\theta - \alpha) \quad (9)$$

由(8)式和(9)式可知

$$\frac{\partial(v, \theta)}{\partial(v_1, \theta_1)} = \frac{cn_\epsilon^2(v_1)\sin(\theta_1 - \alpha_1)}{cn_\epsilon^2(v)\sin(\theta - \alpha)} \quad (10)$$

在测地三角形 ΔOAA_1 中用(3)式, 可得

$$sn_\epsilon(\mu) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = sn_\epsilon(\mu) \sin \varphi = cn_\epsilon(v) sn_\epsilon(\lambda) \quad (11)$$

在测地三角形 ΔOO_1A_1 中用(2)式, 可得

$$\frac{sn_\epsilon(\mu)}{\sin(\theta_1 - \alpha_1)} = \frac{sn_\epsilon(\rho)}{\sin \varphi} \quad (12)$$

由(11), (12)式可知

$$cn_\epsilon(v) sn_\epsilon(\lambda) = sn_\epsilon(\mu) \sin \varphi = sn_\epsilon(\rho) \sin(\theta_1 - \alpha_1) \quad (13)$$

类似地, 在测地三角形 ΔO_1AA_1 和 ΔOO_1A 中应用(3)式和(2)式, 有

$$cn_\epsilon(v_1) sn_\epsilon(\lambda) = sn_\epsilon(u) \sin \psi = sn_\epsilon(\rho) \sin(\theta - \alpha) \quad (14)$$

则由(13), (14)式, 可将(10)式化简得

$$\frac{\partial(v, \theta)}{\partial(v_1, \theta_1)} = \frac{cn_\epsilon(v_1)}{cn_\epsilon(v)} \quad (15)$$

即

$$cn_\epsilon(v) dv \wedge d\theta = cn_\epsilon(v_1) dv_1 \wedge d\theta_1 \quad (16)$$

综上所述, 测地线集的密度 $dG = cn_\epsilon(v) dv \wedge d\theta$ 并不取决于固定点 O 以及点 O 处所选择的固定方向.

定理 2 若测地线 G 与常曲率曲面 Σ_ϵ 上一曲线 C 相交, 取其交点之一 P , 并且在 P 点, C 与 G 所形成的夹角为 ϕ , s 为曲线 C 上 P 处的弧长参数(对于 C 上某一初始点). 则测地线集 $\{G\}$ 的密度为

$$dG = \sin \phi ds \wedge d\phi \quad (17)$$

证 设 G 与常曲率曲面 Σ_ϵ 上一曲线 C 相交(图 3).

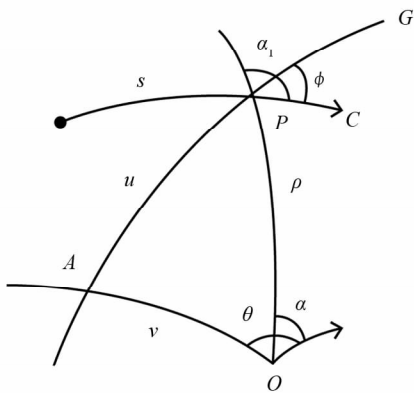


图 3 G 与 C 相交

取 v 为常数的曲线是和测地线 OA 正交的测地线, u 为常数的曲线是它们正交的轨迹. 曲线 C 在此半测地坐标网下有

$$ds^2 = du^2 + cn_\epsilon^2(u) dv^2 \quad (18)$$

因此, 如果测地线 $G(v$ 为常数) 与曲线 C 相交于点 P , 并形成夹角 ϕ , 则

$$\sin \phi = \frac{cn_\epsilon(u) dv}{ds} \quad (19)$$

从而

$$dv = \frac{\sin \phi}{cn_\epsilon(u)} ds \quad (20)$$

因此(5)式可写作

$$dG = cn_\epsilon(v) \frac{\sin \phi}{cn_\epsilon(u)} ds \wedge d\theta \quad (21)$$

记 ρ 为测地线段 OP 的弧长, u 为测地线段 AP 的弧长, α 为测地线 OP 与 O 点处固定方向所形成的夹

角, α_1 为测地线 OP 与 C 所形成的夹角. 在测地三角形 ΔOAP 中, 由(3),(2)式, 有

$$\cot(\alpha_1 - \phi) = cn_\varepsilon(\rho) \tan(\theta - \alpha) \quad (22)$$

微分可得

$$\frac{d\phi}{\sin^2(\alpha_1 - \phi)} = \frac{cn_\varepsilon(\rho) d\theta}{\cos^2(\theta - \alpha)} \quad (23)$$

又在测地三角形 ΔOAP 中, 由(1) - (3)式可推得

$$\cos(\theta - \alpha) = cn_\varepsilon(u) \sin(\alpha_1 - \phi) \quad cn_\varepsilon(\rho) = cn_\varepsilon(u) cn_\varepsilon(v) \quad (24)$$

因此

$$\frac{cn_\varepsilon(\rho) \sin^2(\alpha_1 - \phi)}{\cos^2(\theta - \alpha)} = \frac{cn_\varepsilon(v)}{cn_\varepsilon(u)} \quad (25)$$

代入到(23),(21)式后可得

$$dG = \sin \phi ds \wedge d\phi \quad (26)$$

定理 3 若测地线 G 与常曲率曲面 Σ_ε ($\varepsilon \neq 0$) 上两相互正交于 Q 点的测地线 G_0, G_1 分别相交于 P, H , 记 $\widehat{QP} = s$, $\widehat{QH} = t$. 则测地线集 $\{G\}$ 的密度公式为

$$dG = \frac{sn_\varepsilon(t)}{sn_\varepsilon(s) \sqrt{\varepsilon[1 - cn_\varepsilon^2(t)cn_\varepsilon^2(s)]}} ds \wedge dt \quad (27)$$

证 在测地线 G 上 $\widehat{HP} = u$, 点 P 处 G_0 与 G 的夹角为 ϕ (图 4).

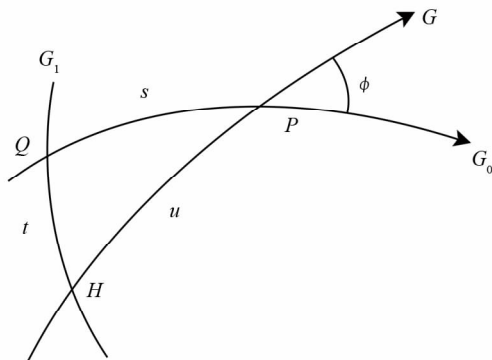


图 4 G 与 G_0, G_1 相关

在测地三角形 ΔQHP 中运用(1)式, 可得

$$cn_\varepsilon(t) = cn_\varepsilon(u) cn_\varepsilon(s) + \varepsilon sn_\varepsilon(u) sn_\varepsilon(s) \cos \phi$$

微分可得

$$sn_\varepsilon(t) dt = sn_\varepsilon(u) sn_\varepsilon(s) \sin \phi d\phi \quad (28)$$

代入定理 2 中得到的测地线密度公式, 可得

$$dG = \frac{sn_\varepsilon(t)}{sn_\varepsilon(u) sn_\varepsilon(s)} ds \wedge dt \quad (29)$$

在测地三角形 ΔQHP 中运用三角公式

$$cn_\varepsilon(u) = cn_\varepsilon(t) cn_\varepsilon(s) + \varepsilon sn_\varepsilon(t) sn_\varepsilon(s) \cos \frac{\pi}{2} = cn_\varepsilon(t) cn_\varepsilon(s) \quad \varepsilon sn_\varepsilon^2(u) + cn_\varepsilon^2(u) = 1$$

可得

$$sn_\varepsilon(u) = \sqrt{\varepsilon[1 - cn_\varepsilon^2(t)cn_\varepsilon^2(s)]}$$

代入(29)式, 有

$$dG = \frac{sn_\varepsilon(t)}{sn_\varepsilon(s) \sqrt{\varepsilon[1 - cn_\varepsilon^2(t)cn_\varepsilon^2(s)]}} ds \wedge dt$$

参考文献:

- [1] 徐文学, 夏云伟. 高等几何中启发式教学的探讨 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2017, 42(4): 142-145.
- [2] 姚中伟, 刘健成. 球空间中子流形上 L^p 调和 1-形式的消灭定理 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2020, 42(4): 82-87.
- [3] 艾万君, 曾春那, 姜德烁. 常曲率平面上的 Crofton 公式的一个统一证明 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2012, 37(8): 37-39.
- [4] 任德麟. 积分几何学引论 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1988.
- [5] SANTALÓ L A, KAC M. Integral Geometry and Geometric Probability [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- [6] SANTALÓ L A. Integral Formulas in Crofton's Style on the Sphere and Some Inequalities Referring to Spherical Surves [J]. Duke Mathematical Journal, 1942, 9(4): 707-722.
- [7] SANTALÓ L A. Integral Geometry on Surfaces of Constant Negative Curvature [J]. Duke Mathematical Journal, 1943, 10(4): 687-704.
- [8] SANTALÓ L A. Integral Geometry on Surfaces [J]. Duke Mathematical Journal, 1949, 16(2): 361-375.
- [9] 梅向明, 黄敬之. 微分几何 [M]. 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2008.
- [10] 苏步青, 胡和生, 沈纯理, 等. 微分几何 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1979.
- [11] 彭家贵, 陈 卿. 微分几何 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2002.
- [12] 张捍卫, 张红利, 喻铮铮. 利用四元数的运算法则推导球面三角公式 [J]. 大地测量与地球动力学, 2020, 40(6): 608-611.
- [13] 杨 琴, 孙振祖. 曲面上测地线集合的测度与直线汇的 Cartan 测度 [J]. 西北师范大学学报(自然科学版), 2015, 51(5): 27-28, 54.

Notes on Density of Geodesics on Surface of Constant Curvature

ZHANG Zhi-ruo, FENG Shu-xiang

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: In this paper, some basic trigonometric formulae on the surface of constant curvature are rewritten into unified forms. Then the density of the sets of geodesics on the surface of constant curvature is defined, and it is proved that the density is independent of the choice of coordinates by the trigonometric formulae and parameter variations. Some other forms of the density are also given.

Key words: the surface of constant curvature; density of geodesics; trigonometric formulae

责任编辑 廖 坤