第 46 卷 第 6 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2021 年 6 月
Vol. 46 No. 6 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Jun. 2021

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2021.06.009

关于单位速度外法向流下的几何不变量的注记①

张增乐

重庆文理学院 数学与大数据学院,重庆 永川 402160

摘要: 对于平面上的卵形域,本文发现其 Ros 亏格为单位速度外法向流下的几何不变量. 进一步,对于欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中的卵形域,本文将给出一些新的单位速度外法向流下的几何不变量,这些几何不变量将包含平面上的结果.

关 键 词: 单位速度外法向流;几何不变量;Ros 亏格;等周亏格

中图分类号: O186.5 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5471(2021)06-0047-05

给定欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的一凸体 K,若 K 沿着外法向的演化速度是单位的,那么就得到了单位速度外法向流,它在许多实际问题中都有应用[1]. 在单位速度外法向流下,凸体 K 在 $t \geqslant 0$ 时的像为 $K + tB^n$,其中 B^n 为欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球. 特别地,对于平面中面积为 A,周长为 L 的凸体 K,像 $K + tB^2$ 的面积 A_t 是关于时间 t 的一个多项式:$A_t = A + Lt + \pi t^2$,该式被称为 K 的 Steiner 多项式. 该式在建立 Bonnesen-型等周不等式方面有重要的应用(参见文献[2-4]).

单位速度外法向流下的几何不变量是数学中的重要研究对象,例如:著名的等周亏格 $\Delta = L^2 - 4\pi A$ 是单位速度外法向流下的一不变量(参见文献[1]).

文献[5]得到了以下著名的不等式,现被称为 Ros 不等式:

Ros 不等式:设 Σ 为嵌入在 $\mathbb{R}^3$ 中的紧致闭 C^2 曲面,其包含的体积为 V. 若 Σ 的平均曲率 $H > 0$,则

$$\int_{\Sigma} \frac{1}{H} \mathrm{d}A \geqslant 3V \tag{1}$$

其中 A 为 Σ 的面积,等号成立当且仅当 Σ 为球面.

不等式(1)由文献[6]推广到了 $n \geqslant 3$ 维空间中. 对于平面上的卵形域 K,文献[7]得到了以下结果:设 K 为欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 上的卵形域,其周长与面积分别为 L 与 A,则

$$\int_{\partial K} \frac{1}{\kappa} \mathrm{d}s \geqslant 2A \tag{2}$$

其中 s 为弧长参数,κ 为边界 ∂K 的曲率,等号成立当且仅当 K 为圆盘. 文献[6]加强了不等式(2),得到以下结果:

$$\int_{\partial K} \frac{1}{\kappa} \mathrm{d}s \geqslant \frac{L^2}{2\pi} \tag{3}$$

等号成立当且仅当 K 为圆盘. 由平面上的等周不等式知(3)式强于(2)式. (2)式被称为是平面上的 Ros 不等式,同时,几何量

---

① 收稿日期:2020-05-04

基金项目:重庆市自然科学基金面上项目(cstc2020jcyj-msxmX0779);重庆市教委科学技术研究项目(KJQN201901312).

作者简介:张增乐,讲师,博士,主要从事积分几何与凸几何分析的研究.

$$\int_{\gamma} \frac{1}{\kappa} \mathrm{d}s - 2A$$

被称为平面上的 Ros 亏格.

关于单位速度外法向流下的几何不变量的其他相关研究可参见文献[8-12]. 本文将说明(3)式中的几何量$\int_{\partial K} \frac{1}{\kappa} \mathrm{d}s - \frac{L^2}{2\pi}$及平面上的 Ros 亏格是单位速度外法向流下的几何不变量. 更进一步，我们将推广平面上的结果到 3 维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中，给出 3 维欧氏空间中单位速度外法向流下新的几何不变量，并且这些新的几何不变量将包含平面中的结果.

1 预备知识

设 K 为欧氏空间中的点集，若对于任意两点 $x, y \in K$，有 $\lambda x + (1-\lambda) y \in K$，$0 < \lambda < 1$，则称 K 为凸集. $\mathbb{R}^n$ 中的非空紧凸集 K 称为凸体. 凸体的边界 ∂K 称为凸超曲面. 若 ∂K 是 C^2 光滑的，则称 K 为卵形域. 凸体 K 的支撑函数定义为 $p_K(u) = \max\{u \cdot x: x \in K\}$，$u \in S^{n-1}$，其中 S^{n-1} 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球面.

对于平面的卵形域，我们有以下结论：

命题 1 设 K 为平面上的卵形域，其周长和面积分别为 L 和 A，κ 和 $\mathrm{d}s$ 分别是边界 ∂K 的曲率和弧长微元，则：

(i) $\mathrm{d}s = (p + p'')\mathrm{d}\theta$；

(ii) $\kappa = \dfrac{1}{p + p''}$；

(iii) $A = \dfrac{1}{2}\int_{S^1} p(p + p'')\mathrm{d}\theta$；

(iv) $L = \int_{S^1} (p + p'')\mathrm{d}\theta = \int_{S^1} p\mathrm{d}\theta$.

设 $\kappa_1, \cdots, \kappa_{n-1}$ 为超曲面 ∂K 上 x 处的主曲率，则 ∂K 的第 k 阶平均曲率 H_k 分别为

$$H_k = \binom{n-1}{k}^{-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n-1} \kappa_{i_1} \cdots \kappa_{i_k} \qquad k = 1, \cdots, n-1$$

其中 $H_0 = 1$；当 $k = 1$ 时，H_1 为超曲面 ∂K 的平均曲率；当 $k = n-1$ 时，H_{n-1} 为超曲面 ∂K 的 Gauss 曲率. Gauss 曲率与曲面的面积元有如下关系：

$$H_{n-1}\mathrm{d}S(x) = \mathrm{d}u \tag{4}$$

其中 $u \in S^{n-1}$ 为边界 ∂K 上 x 处的单位外法向量，$\mathrm{d}u$ 表示 S^{n-1} 上的面积元.

凸体 K 的 k -阶均质积分 $W_k(k = 0, 1, \cdots, n-1)$ 定义为

$$W_k(K) = \frac{1}{n}\int_{\partial K} h(K, u) H_k \mathrm{d}S \tag{5}$$

且 $W_n(K) = \omega_n$，其中 ω_n 为 $\mathbb{R}^n$ 中单位球的体积. 由定义可知

$$W_0(K) = V(K) \qquad nW_1(K) = S(K)$$

对于均质积分 $W_0(K), \cdots, W_n(K)$，成立以下 Alexandrov-Fenchel 不等式：

$$W_j^{k-i}(K) \geqslant W_i^{k-j}(K) W_k^{j-i}(K) \qquad 0 \leqslant i < j < k \leqslant n \tag{6}$$

等号成立当且仅当 K 为球.

2 $\mathbb{R}^2$ 中单位速度外法向流下的几何不变量

定理 1 设 K 为欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 中的周长为 L 的卵形域，κ 为边界 ∂K 的曲率，则几何量

$$\int_{\partial K} \frac{1}{\kappa} \mathrm{d}s - \frac{L^2}{2\pi} \tag{7}$$

是单位速度外法向流下的几何不变量.

证　在时刻 $t \geqslant 0$ 时，K 在单位速度外法向流下的像为 $K+tB^2$，其支撑函数为 $p_t = p+t$. 设 κ_t 和 $\mathrm{d}s_t$ 分别是边界 $\partial(K+tB^2)$ 的曲率和弧长微元，由命题 1 中的(i),(ii),(iv) 知

$$\int_{\partial(K+tB)} \frac{1}{\kappa_t}\mathrm{d}s_t = \int_{S^1}(p+p''+t)^2\mathrm{d}\theta = \int_{\partial K}\frac{1}{\kappa}\mathrm{d}s + 2Lt + 2\pi t^2$$

设 L_t 是边界 $\partial(K+tB^2)$ 的周长，则

$$L_t = L + 2\pi t$$

从而

$$\int_{\partial(K+tB)} \frac{1}{\kappa_t}\mathrm{d}s(t) - \frac{L_t^2}{2\pi} = \int_{\partial K}\frac{1}{\kappa}\mathrm{d}s - \frac{L^2}{2\pi}$$

因此 $\int_{\partial K}\frac{1}{\kappa}\mathrm{d}s - \frac{L^2}{2\pi}$ 是单位速度外法向流下的几何不变量.

由定理 1，我们可以得到平面上的 Ros 亏格也是单位速度外法向流下的几何不变量.

定理 2　设 K 为 $\mathbb{R}^2$ 中的卵形域，κ 为边界 ∂K 的曲率. 则 Ros 亏格

$$\int_{\partial K}\frac{1}{\kappa}\mathrm{d}s - 2A \tag{8}$$

是单位速度外法向流下的几何不变量.

证　Ros 亏格可改写为

$$\int_{\partial K}\frac{1}{\kappa}\mathrm{d}s - 2A = \int_{\partial K}\frac{1}{\kappa}\mathrm{d}s - \frac{L^2}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}(L^2 - 4\pi A) \tag{9}$$

由于等周亏格与几何量 $\int_{\partial K}\frac{1}{\kappa}\mathrm{d}s - \frac{L^2}{2\pi}$ 均是单位速度外法向流下的几何不变量，因此 Ros 亏格也是该流下的不变量.

3　$\mathbb{R}^3$ 中单位速度外法向流下的几何不变量

在本节中，我们将给出 $\mathbb{R}^3$ 中单位速度外法向流下新的几何不变量，这些不变量将包含平面的情形.

定理 3　设 K 为 $\mathbb{R}^3$ 中的卵形域，H,G 分别为边界 ∂K 的平均曲率与 Gauss 曲率，$W_i(K)(i=0,1,2,3)$ 为 K 的第 i 阶均质积分. 则几何量

$$W_2(K)^2 - W_1(K)W_3(K) \tag{10}$$

与

$$\int_{S^2}\left(\frac{H}{G}\right)^2\mathrm{d}u - \frac{9}{4\pi}W_2(K)^2 \tag{11}$$

是单位速度外法向流下的几何不变量.

证　在时刻 $t \geqslant 0$ 时，K 在单位速度外法向流下的像为 $K+tB^3$，设 G_t 和 H_t 分别表示边界 $\partial(K+tB^3)$ 的 Gauss 曲率和平均曲率. 由 Gauss 曲率和平均曲率的定义可知

$$\frac{1}{G_t} = \frac{1}{G} + 2\frac{H}{G}t + t^2$$

再由(4) 式可知，像 $K+tB^3$ 的面积 A_t 为

$$A_t = \int_{S^2}\frac{1}{G_t}\mathrm{d}u = A + 2\left(\int_{\partial K} H\,\mathrm{d}S(x)\right)t + 4\pi t^2 \tag{12}$$

且

$$\frac{H_t}{G_t} = \frac{H}{G} + t \tag{13}$$

设 $\mathrm{d}S$ 和 $\mathrm{d}S_t$ 分别表示 ∂K 和 $\partial(K+tB^3)$ 的面积元，由(12) 式和(13) 式，我们有

$$W_2(K+tB)^2 - W_1(K+tB)W_3(K+tB) =$$
$$\frac{1}{3^2}\left(\int_{\partial(K+tB)} H_t \mathrm{d}S_t\right)^2 - \frac{A_t}{3}\omega_3 =$$
$$\frac{1}{9}\left(\int_{\partial K} H\mathrm{d}S + 4\pi t\right)^2 - \frac{4\pi}{9}\left(A + 2\left(\int_{\partial K} H\mathrm{d}S\right)t + 4\pi t^2\right) =$$
$$W_2(K)^2 - W_1(K)W_3(K)$$

以及

$$\int_{S^2}\left(\frac{H(t)}{G(t)}\right)^2 \mathrm{d}u - \frac{9}{4\pi}W_2(K+tB)^2 =$$
$$\int_{S^2}\left(\frac{H}{G}+t\right)^2 \mathrm{d}u - \frac{1}{4\pi}\left(\int_{\partial K} H\mathrm{d}S + 4\pi t\right)^2 =$$
$$\int_{S^2}\left(\frac{H}{G}\right)^2 \mathrm{d}u - \frac{9}{4\pi}W_2(K)^2$$

因此，几何量 $W_2(K)^2 - W_1(K)W_3(K)$ 和 $\int_{S^2}\left(\frac{H}{G}\right)^2 \mathrm{d}u - \frac{9}{4\pi}W_2(K)^2$ 均是单位速度外法向流下的几何不变量.

注 1 (10) 式与(11) 式中的几何量分别是平面上的等周亏格和(7) 式中几何量的 3 维推广情形，且(10) 式和(11) 式中的几何量均是非负的. 事实上，在 3 维欧氏空间中，(6) 式中的指数分别取 $j=2$，$k=3$，$i=1$，可得(10) 式中的几何量是非负的. 由 Cauchy-Schwartz 不等式，有

$$4\pi\int_{S^2}\left(\frac{H}{G}\right)^2 \mathrm{d}u = \int_{S^2}\mathrm{d}u\int_{S^2}\left(\frac{H}{G}\right)^2 \mathrm{d}u \geqslant \left(\int_{S^2}\frac{H}{G}\mathrm{d}u\right)^2 = 9W_2(K)^2 \tag{14}$$

因此，(11) 式中的几何量仍是非负的.

类似地，我们还可得到以下几何不变量.

定理 4 设 K 为 $\mathbb{R}^3$ 中的卵形域，H,G 分别为边界 ∂K 的平均曲率与 Gauss 曲率，$W_i(K)(i=0,1,2,3)$ 为 K 的第 i 阶均质积分. 则几何量

$$\int_{S^2}\left(\frac{H}{G}\right)^2 \mathrm{d}u - 3W_1(K) \tag{15}$$

是单位速度外法向流下的非负几何不变量.

证 由于 $W_3(K) = \frac{4\pi}{3}$，我们可将(15) 式改写为

$$4\pi\int_{S^2}\left(\frac{H}{G}\right)^2 \mathrm{d}u - 9W_1(K)W_3(K) =$$
$$4\pi\left(\int_{S^2}\left(\frac{H}{G}\right)^2 \mathrm{d}u - \frac{9}{4\pi}W_2(K)^2\right) + 9\left(W_2(K)^2 - W_1(K)W_3(K)\right)$$

再由定理 3 和注 1 直接可得(15) 式中的几何量是单位速度外法向流下的非负不变量.

对于平面上的卵形域，(15) 式中的几何量即是 Ros 亏格.

参考文献：

[1] GREEN M, OSHER S. Steiner Polynomials, Wulff Flows, and Some New Isoperimetric Inequalities for Convex Plane Curves [J]. Asian Journal of Mathematics, 1999, 3(3): 659-676.

[2] 周家足. 平面 Bonnesen 型不等式 [J]. 数学学报, 2007, 50(6): 1397-1402.

[3] 曾春娜, 周家足, 岳双珊. 两平面凸域的对称混合等周不等式 [J]. 数学学报, 2012, 55(2): 355-362.

[4] ZHANG Z L, ZHOU J Z. Bonnesen-Style Wulff Isoperimetric Inequality [J]. Journal of Inequalities and Applications, 2017, 2017(1): 1-12.

[5] ROS A. Compact Hypersurfaces with Constant Scalar Curvature and a Congruence Theorem [J]. Journal of Differential Geometry，1988，27(2)：215-220.

[6] 周家足，姜德烁，李　明，等. 超曲面的 Ros 定理 [J]. 数学学报，2009，52(6)：1075-1084.

[7] ZHOU J Z. Curvature Inequalities for Curves [J]. Inter Comp Math Sci Appl，2007(2-4)：145-147.

[8] SCHNEIDER R. Convex Bodies：the Brunn-Minkowski Theory [M]. Cambridge：Cambridge University Press，2014.

[9] 周家足，任德麟. 从积分几何的观点看几何不等式 [J]. 数学物理学报(A 辑)，2010，30(5)：1322-1339.

[10] 杨　林，罗　淼，何邦财，等. Orlicz-Aleksandrov 体的混合体积 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2020，45(8)：25-28.

[11] 王胜军，窦井波. Heisenberg 型群上的广义 Picone 恒等式及其应用 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2020，42(2)：48-54.

[12] 姚中伟，刘建成. 球空间中子流形上 L^p 调和 1-形式的消灭定理 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2020，42(4)：82-87.

Notes on Invariants of Unit-Speed Outward Normal Flow

ZHANG Zeng-le

School of Mathematics and Big Data，Chongqing University of Arts And Sciences，Yongchuan Chongqing 402160，China

Abstract：For plane ovaloid domain，it is found that Ros' deficit is an invariant of the unit-speed outward normal flow. Moreover，some new invariants of the unit-speed outward normal flow are given for ovaloid domain in $\mathbb{R}^3$，which are the generalizations of the invariants in $\mathbb{R}^2$.

Key words：unit-speed outward normal flow；geometric invariant；Ros deficit；isoperimetric deficit

责任编辑　廖　坤